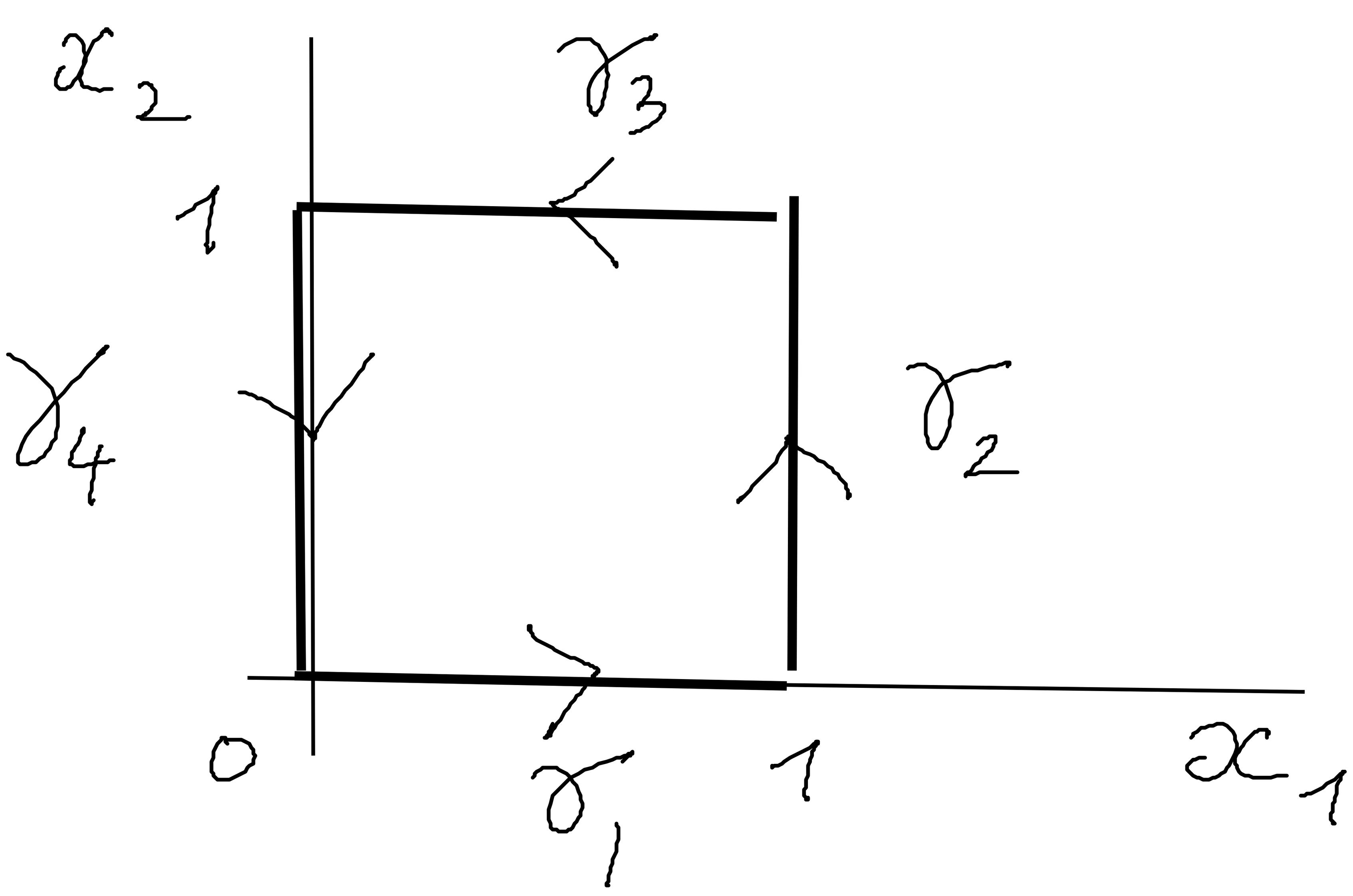
Exercices sur les 1-formes

Sur le plan $\mathbb{R}^2$, avec les coordonnées (x_1, x_2), on considère le chemin fermé :



① $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$,

alors $df = 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2$

$$\int_{\gamma_1} df = \int_0^1 \left(2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt}\right) dt$$

avec $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 0$, $\dfrac{dx_1}{dt} = 1$

donc $\displaystyle\int_{\gamma_1} df = \int_0^1 2t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2\,\frac{1}{2} = 1$

de même, $\int_{\gamma_2} df = \int_0^1 2x_2 \frac{dx_2}{dt}\, dt = \int_0^1 2t\, dt = 1$

$$\int_{\gamma_3} df = \int_0^1 2x_1 \frac{dx_1}{dt}\, dt = \int_0^1 2(1-t)(-1) dt = -2\int_0^1 dt + \int_0^1 2t dt$$

$$= -2 + 1 = -1$$

$$\int_{\gamma_4} df = \int_0^1 2x_2 \frac{dx_2}{dt}\, dt = 2\int_0^1 (1-t)(-1) dt = -1$$

On vérifie que $\int_{\gamma} df = \int_{\gamma_1} df + \int_{\gamma_2} df + \int_{\gamma_3} df + \int_{\gamma_4} df = 0$

que l'on obtient directement par $\int_{\gamma} df = f(\gamma_{fin}) - f(\gamma_{init})$

$= 0$ car $\gamma_{fin} = \gamma_{init}$

2) Soit $\alpha = x_2\, dx_1$: 1 forme de composantes $\alpha_1 = x_2$, $\alpha_2 = 0$

donc $d\alpha = -\, dx_1 \wedge dx_2 \neq 0$ donc α n'est pas fermée

$\int_{\gamma_1} \alpha = 0$, $\int_{\gamma_2} \alpha = 0$, $\int_{\gamma_3} \alpha = \int_0^1 \frac{d(1-t)}{dt}\, dt = -1$, $\int_{\gamma_4} \alpha = 0$

donc $\displaystyle\int_\gamma \alpha = -1,$

On vérifie que $\displaystyle\int_\gamma \alpha = \iint_C d\alpha = -\iint_C dx_1\,dx_2 = -1.$

3 a)