Loi du déplacement de Wien

(1) On rappelle la loi de Planck :
la densité d'énergie par unité de volume
par intervalle de fréquence $[\omega, \omega + d\omega]$,
à la température T est

$$v_T(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1\right)}$$

On cherche $\omega = \omega_{max}$ pour laquelle $\omega \mapsto v_T(\omega)$
est maximale. On fait le changement de variable
$\omega \mapsto x = \frac{\hbar \omega}{kT} \iff \omega = \frac{kTx}{\hbar}$

$$v_T(x) = \frac{\hbar (kT)^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \left(\frac{x^3}{e^x - 1}\right)$$

Donc $\frac{dv_T}{dx} = 0 \iff 3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x = 0$

$$\iff 3(1 - e^{-x}) = x \quad (*)$$

Pour résoudre approximativement cette équation (*)

on pose $x = 3 - \varepsilon$ et on suppose $|\varepsilon| \ll 1$.

$$(*) \Longleftrightarrow \quad 3\left(1 - e^{-3} e^{\varepsilon}\right) = 3 - \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad -3 e^{-3}\left(1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2)\right) = -\varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon\left(1 - 3e^{-3}\right) \approx 3 e^{-3}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon = \frac{3e^{-3}}{1-3e^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}e^{3} - 1} \approx 0.17$$

Donc $x \simeq 3 - \varepsilon \simeq 2.82$

$$\omega_{max} = x \frac{kT}{\hbar} = \alpha T,$$

$$\alpha = x\frac{k}{\hbar} \simeq \frac{2.82 \,.\, 1{,}38 . 10^{-23}\, 2\pi}{6{,}62 . 10^{-34}} = 3{,}7 . 10^{11} \; K^{-1} s^{-1}$$

Utilité de cette loi : en observant ω_{max} (couleur apparente) on déduit la température T de l'objet ou de l'étoile.

$$v_T = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\hbar \omega} \right.}$$