Definition des Fermions et Bosons

Ensemble Canonique

Etat : $m = (N_0, N_1, N_2, \dots)$

avec N_n : nombre de particules dans l'état φ_n

$$N = \sum_{n \geqslant 0} N_n \quad \text{fixé}$$

- Si Fermions, alors $0 \leqslant N_n \leqslant 1$.
- Si Bosons alors $N_n \geqslant 0$ est quelconque.

(1) **Loi de Boltzmann** $P(m) = \frac{1}{Z_N} e^{-\beta E(m)}$

on a $1 = \sum_m P(m)$

$$\Leftrightarrow Z_N = \sum_m e^{-\beta E(m)}$$

donc $\partial_\beta Z_N = \sum_m -E(m) e^{-\beta E(m)}$

Energie moyenne :

$$\langle E \rangle = \sum_m P(m)\, E(m)$$

$$= \frac{1}{Z_N} \sum_m E(m)\, e^{-\beta E(m)}$$

$$= -\frac{1}{Z_N} \partial_\beta Z_N = -\partial_\beta \ln Z_N$$

② Entropie

$$S = -k \sum_m P(m) \ln P(m)$$

$$= -k \sum_m P(m) \ln\left(\frac{1}{Z_N} e^{-\beta E(m)}\right)$$

$$= -k \sum_m P(m) \left(-\beta E(m) - \ln Z_N\right)$$

$$= \beta k \underbrace{\left(\sum_m P(m) E(m)\right)}_{\langle E \rangle} + k \ln Z_N \underbrace{\left(\sum_m P(m)\right)}_{1}$$

$$= \frac{1}{T} \langle E \rangle + k \ln Z_N$$

Ensemble grand canonique

(1) $$P(m) = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta(E(m) - \mu N(m))}$$

$$1 = \sum_m P(m)$$

$$\Leftrightarrow \quad \Xi = \sum_m e^{-\beta(E(m) - \mu N(m))}$$

$$= \sum_N \sum_{\substack{m \text{ tq} \\ N(m)=N}} e^{-\beta E(m)} e^{\beta \mu N}$$

$$= \sum_N e^{N\beta\mu} Z_N$$

(2) $$\partial_\beta \Xi = \sum_m -(E(m) - \mu N(m)) e^{-\beta(E(m)-\mu N(m))}$$

$$\frac{\partial_\beta \Xi}{\Xi} = -\sum_m E(m) \left(\underbrace{\frac{1}{\Xi} e^{-\beta(E(m)-\mu N(m))}}_{} \right)$$