

Méthode Variationnelle du champ moyen dans le modèle d'Ising

① $M(b) := \sum_x b_x$: magnétisation
 $x \in \mathbb{R}$: paramètre.

$$P_x(b) := \frac{1}{\sum_{\sigma_x} e^{x M(b)}} = \frac{1}{\sum_{\sigma_x} e^{x \sum_x b_x}}$$

$$= \frac{1}{\sum_{\sigma_x} \prod_x e^{x b_x}}$$

et $\sum_{\sigma_x} = \sum_{b_x} \prod_x e^{x b_x} = \sum_{b_{x_1}} \sum_{b_{x_2}} \dots e^{x b_{x_1}} e^{x b_{x_2}} \dots$

$$= \prod_x \sum_{b_x} e^{x b_x} = Z^N$$

avec $Z = \sum_{b_x} e^{x b_x} = (e^x + e^{-x}) = 2 \operatorname{ch} x$

donc $P_x(b) = \prod_x \tilde{P}_x(b_x)$: produit de mesures
 identiques \tilde{P}_x

avec $\tilde{P}_x(b_x) = \frac{1}{Z} e^{x b_x}$: mesure du site x

alors

: énergie moyenne

$$\langle E \rangle_{p_x} = \left\langle \sum_{x \neq y} -V(x-y) b_x b_y + B \sum_x b_x \right\rangle_{p_x}$$

$$= \sum_{x \neq y} -V(x-y) \langle b_x b_y \rangle_{p_x} + B \sum_x \langle b_x \rangle_{p_x}$$

or

$$\langle b_x \rangle_{p_x} = \langle b_x \rangle_{p_x} = \frac{1}{Z} \left(e^{\alpha} (+1) + e^{-\alpha} (-1) \right)$$

$$= \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} = \tanh \alpha$$

Exp

$$\langle b_x \rangle_{p_x} = \sum_b b_x p_x(b) : \text{formule de la moyenne}$$

$$p_x(b) = \prod_y \tilde{p}_x(b_y) : \text{produit de mesures}$$

$$= \prod_y \sum_{b_y = \pm 1} \tilde{p}_x(b_y)$$

$$= \left(\sum_{b_x = \pm 1} b_x \tilde{p}_x(b_x) \right) \left(\prod_{y \neq x} \sum_{b_y = \pm 1} \tilde{p}_x(b_y) \right)$$

$$= \langle b_x \rangle_{\tilde{p}_x}$$