Théorème d'équipartition de l'énergie
Modèle classique.

(1) Supposons $E = \underbrace{\frac{1}{2m} p^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{1}{2} K x^2}_{E_p}$: énergie totale

D'après la loi de Boltzmann, la densité de probabilité sur l'espace des phases $(x,p) \in \mathbb{R}^2$

est $$P(x,p)\, dx\, dp = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E}{kT}} dx\, dp$$

vérifiant $$\int_{\mathbb{R}^2} P(x,p)\, dx\, dp = 1$$

On a $$\frac{E}{kT} = \frac{1}{2mkT} p^2 + \frac{1}{2}\frac{K}{kT} x^2$$
$$= X_2^2 + X_1^2$$
avec le changement de variables $(x,p) \Longleftrightarrow (X_1, X_2)$:

$$X_1 = \sqrt{\frac{K}{2kT}}\, x, \qquad X_2 = \frac{1}{\sqrt{2mkT}}\, p$$

alors $E = \underbrace{kT\, X_1^2}_{E_p} + \underbrace{kT\, X_2^2}_{E_c}$

et $P(x,p)\,dx\,dp = \frac{1}{Z} e^{-X_1^2 - X_2^2} dX_1\, dX_2$

$$= \left(\frac{1}{Z_1} e^{-X_1^2} dX_1\right)\left(\frac{1}{Z_2} e^{-X_2^2} dX_2\right)$$

avec $Z = Z_1 Z_2$ et Z_1, Z_2 choisis

tels que $\int \frac{1}{Z_j} e^{-X_j^2} dX_j = 1 \Leftrightarrow Z_j = \int e^{-X_j^2} dX_j$

pour $j = 1, 2$.

Alors

$$\langle E_c \rangle = kT \langle X_2^2 \rangle$$

$$= kT \int X_2^2 \frac{1}{Z_2} e^{-X_2^2} \frac{1}{Z_1} e^{-X_1^2} dX_1\, dX_2$$

$$= kT \left(\int X_2^2 \frac{1}{Z_2} e^{-X_2^2} dX_2\right)\left(\int \frac{1}{Z_1} e^{-X_1}\right)$$

$$= kT \frac{1}{Z_2}\left(\int X_2^2 e^{-X_2^2} dX_2\right) = kT \frac{1}{2}$$

de même $\langle E_p \rangle = kT \langle X_1^2 \rangle = \frac{1}{2} kT$