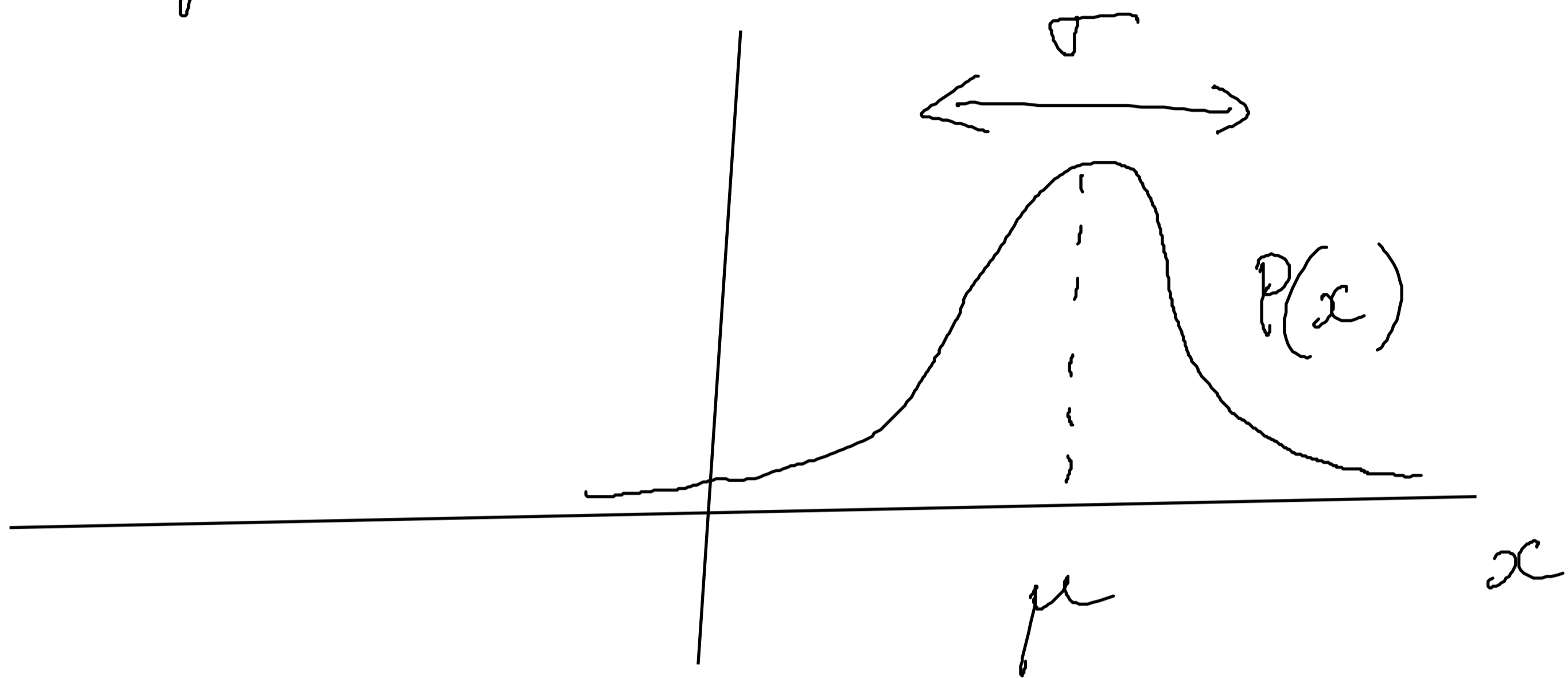


Loi Normale

2019

$$P(x) := \frac{1}{\Sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \text{ densité de Probabilité}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.



$$\textcircled{1} . 1 = \int_{\mathbb{R}} P(x) dx \iff \Sigma = \int e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

changement de variable $X := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

donc $dX = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx$

$$\Sigma = \sqrt{2}\sigma \int e^{-X^2} dX = \sqrt{2\pi} \sigma$$

• Espérance: $E(x) = \int_{\mathbb{R}} x P(x) dx = \int (x-\mu) P(x) dx + \mu \int P(x) dx$

changement $x' = x + \mu$ \uparrow $= \int \underbrace{x' P(x'+\mu)}_{\text{fonction impaire donc intégrale nulle}} dx' + \mu = \mu$

Variance $E((x-\mu)^2) = \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 P(x) dx$

$$= \frac{(\sqrt{2\sigma})^2 (\sqrt{2\sigma})}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-x^2} dx \right)$$

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

car soit $I_\alpha = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha y^2} dy$, $X = \sqrt{\alpha} y$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi}$$

$$\frac{dI_\alpha}{d\alpha} = - \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\alpha y^2} dy = - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}$$

donc $E((x-\mu)^2) = \frac{(\sqrt{2\sigma})^2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} = \sigma^2$

○ Soit x_1, x_2 variables aléatoires suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

$$\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$r = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0.$$

On utilise les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases}$$

$$P(x_1, x_2)$$