Paramagnétisme de Pauli

(1) Pour $B=0$, cf exercice (1),

$$n(\varepsilon)=n_+(\varepsilon)=n_-(\varepsilon)=\frac{\alpha}{2}\,\varepsilon^{3/2}$$

1 avec $\alpha=\dfrac{V(2m)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3}$.

2 $\rho(\varepsilon)=\dfrac{dn}{d\varepsilon}=\dfrac{3\alpha}{4}\,\varepsilon^{1/2}$

(2) $\mu_0 = 3\,\mathrm{eV}$ (cf exercice 1).

$$\mu_B=\frac{e\hbar}{2m}=9{,}065\cdot10^{-24}\ \mathrm{J/Tesla}$$
$$=5{,}6\ 10^{-5}\ \mathrm{eV/Tesla}$$

$$|\Delta E|=|\mu_B B|=5{,}6\cdot10^{-5}\ \mathrm{eV}\ll\mu_0 .$$

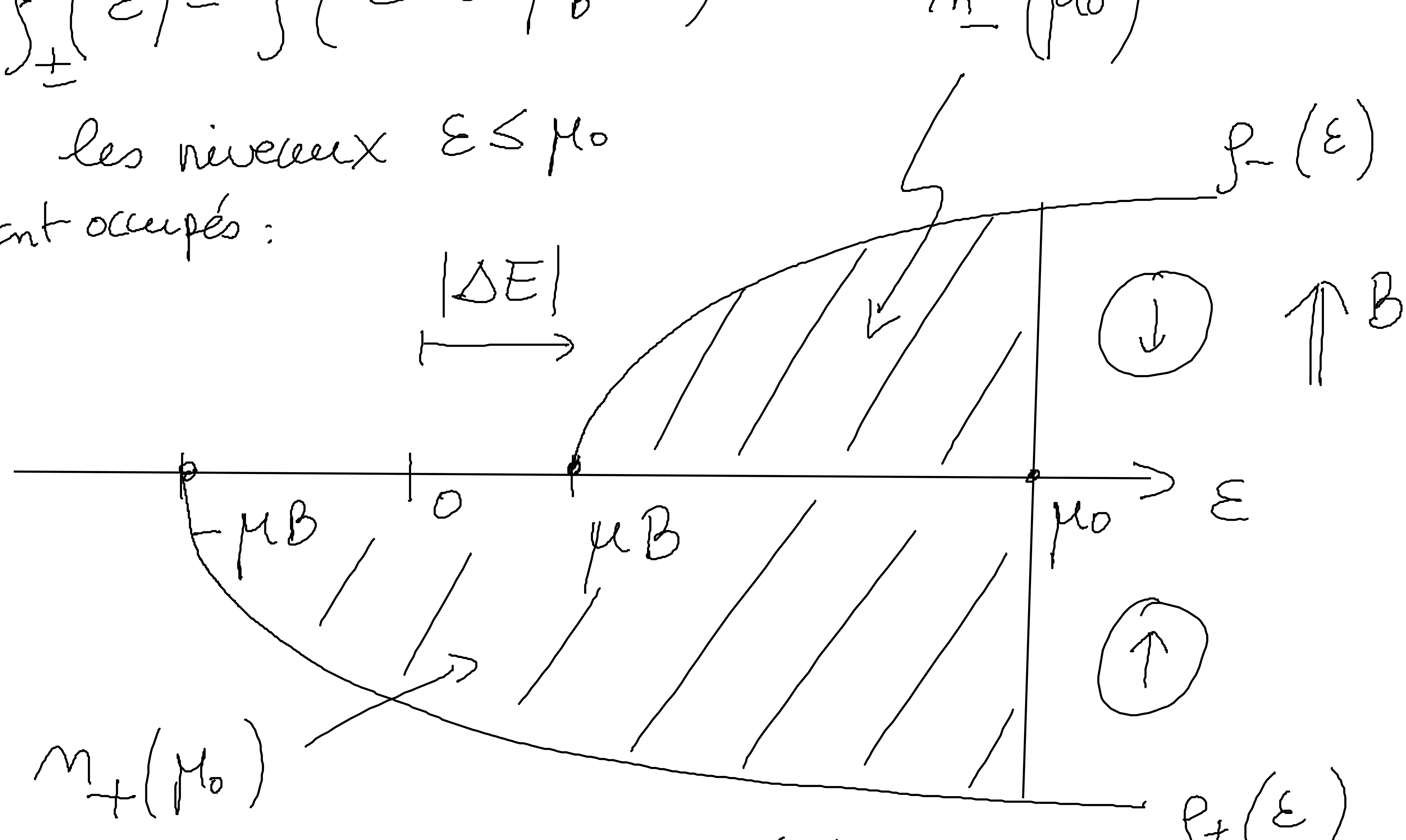
1 $n_\pm(\varepsilon) = n\left(\varepsilon - \Delta E^{(\pm)}\right) = n\left(\varepsilon \pm \mu_B B\right)$

décalage, ainsi l'état fondamental est ε_0 tq $\varepsilon_0 - \Delta E^{(\pm)} = 0$

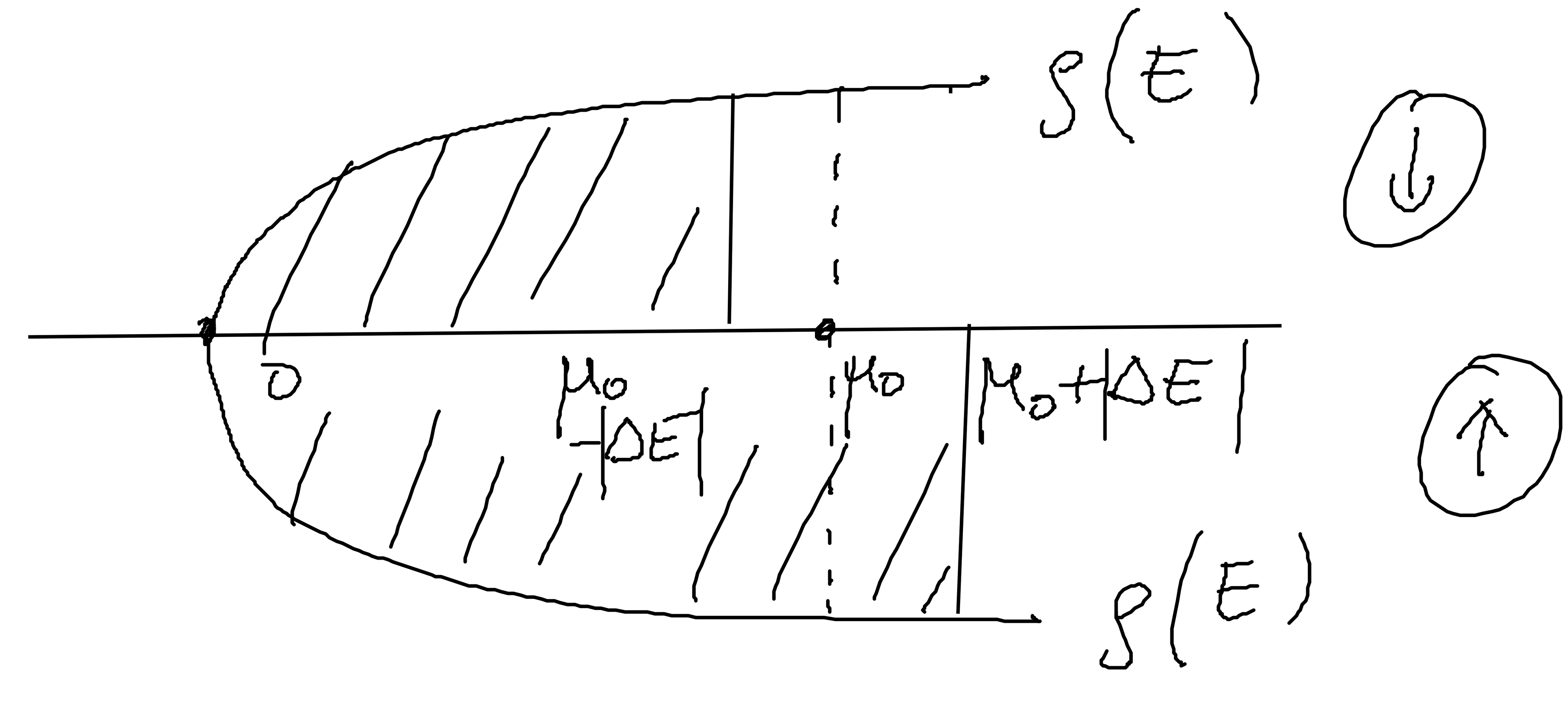
$\Longleftrightarrow \varepsilon_0 = \Delta E^{(\pm)}$ comme voulu.

3 $\rho_\pm(\varepsilon) = \rho(\varepsilon \pm \mu_B B)$

à $T=0$ les niveaux $\varepsilon \leq \mu_0$ sont occupés :



$\Longleftrightarrow$



on observe que

1 $$n_+(\mu_0) - n_-(\mu_0) \simeq 2\,|\Delta E|\,\rho(\mu_0)$$

(4) Les électrons de spin $s = \pm\frac{1}{2}$ ont un moment magnétique $2\mu_B s = \pm \mu_B$,

donc l'aimantation totale est

$$M = n_+(\mu_0)\,(+\mu_B) + n_-(\mu_0)\,(-\mu_B)$$

$$= \mu_B\,\big(n_+(\mu_0) - n_-(\mu_0)\big)$$

$$\underset{(3\text{-}1)}{\simeq} \mu_B\, 2\,|\Delta E|\,\rho(\mu_0) = \mu_B^2\, 2\, B\, \rho(\mu_0)$$

$$= \chi_0\, B$$

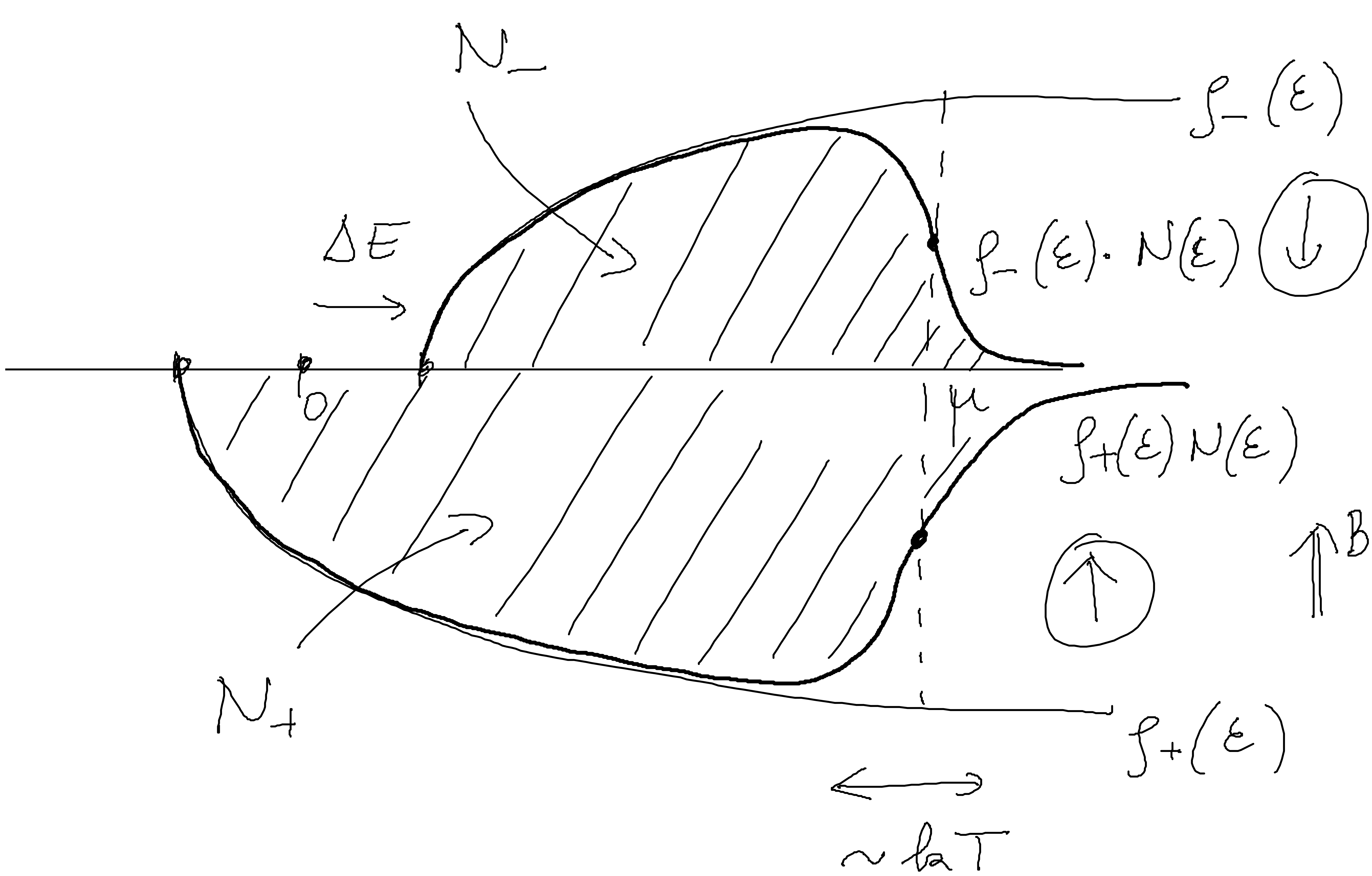
avec la susceptibilité à $T = 0$:

$$\chi_0 = 2\mu_B^2\,\rho(\mu_0) \underset{(1\text{-}2)}{=} 2\mu_B^2\,\frac{3\alpha}{4}\,\mu_0^{1/2}$$

$$\underset{\substack{(1\text{-}1)\\ \text{et } V=1}}{=} 2\,\frac{e^2\hbar^2}{4m^2}\,\frac{3\,(2m)^{3/2}}{4\cdot 3\pi^2\hbar^3}\,\mu_0^{1/2} = \frac{e^2\,\mu_0^{1/2}}{2^{3/2}\,\hbar\, m^{1/2}\,\pi^2} =$$

⑤ On suppose $T > 0$.

La distribution de Fermi $N(\varepsilon)$ donne le nombre d'électrons dans chaque état à une particule, d'énergie ε.



on souhaite calculer l'aimantation totale :

$$M = \mu_B (N_+ - N_-)$$
$$= \chi(T) \cdot B$$

Alors le nombre total d'électrons $N_\pm$ de spin $s = \pm \frac{1}{2}$ est (voir problème 1)

$$N_\pm = \int N_n \, dn_\pm = \int_{\mathbb{R}} N_n \frac{dn_\pm}{d\varepsilon} \, d\varepsilon$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\rho_\pm(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \, d\varepsilon$$

$$= n_\pm(\mu) + \frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{6} n_\pm''(\mu) + O\left(\frac{1}{\beta\mu}\right)^4$$

formule de Sommerfeld

$$= n(\mu \pm \mu_B B) + \frac{\pi^2 k^2 T^2}{6} n''(\mu \pm \mu_B B) + O(T^4)^4$$

(2-1)

on écrit $\mu(T) = \mu_0 + \mu_0' . T + \frac{1}{2}\mu_0'' T^2$

: potentiel chimique

$$n(\mu \pm \mu_B B) = n\left(\mu_0 + \mu_0' T + \frac{1}{2}\mu_0'' T^2 \pm \mu_B B\right)$$

$$= n(\mu_0) + \left(\mu_0' T + \frac{1}{2}\mu_0'' T^2 \pm \mu_B B\right) n'(\mu_0)$$

$$+ \frac{1}{2}(\mu_0' T)^2 n''(\mu_0) + O(B^2, BT)$$

$N = N_+ + N_-$: nombre total d'électrons est fixé.

$M = \mu_B (N_+ - N_-)$

on trouve

$$\chi(T) = -\frac{V m^2}{2\pi^2} \mu_0^{1/2} \left(1 + \frac{\pi^2 k_B^2 T^2}{12 \mu_0^2}\right) + O(B, T^2)$$