Université Grenoble Alpes. Master 1 Physique.
TD de physique statistique. Frédéric Faure

TD3. De l'équation des fluides de Euler à l'équation d'onde du son. Solution

Référence : Notes de cours..

On décrit l'air (fluide gazeux) par un modèle de gaz parfait à l'équilibre local décrit par avec un champ de pression $\boldsymbol{p}(x,t) \in \mathbb{R}$, un champ de densité (masse volumique) $\boldsymbol{\rho}(x,t) \in \mathbb{R}$ et d'un champ de vitesse $v(x,t) \in \mathbb{R}^3$, où $x \in \mathbb{R}^3$ est la variables d'espace et $t \in \mathbb{R}$ est le temps. Le champ de vitesse détermine des trajectoires du fluide $t \to x(t)$ par l'équation $\frac{dx}{dt} = v$. On notera l'accélération du fluide par

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v(x(t), t).$$

Le fluide subit des forces de pression internes, la force résultante est opposée au gradient de pression et l'équation de la dynamique de Newton pour le fluide par unité de volume prend donc la forme

$$\boldsymbol{\rho} \frac{dv}{dt} = -\mathrm{grad}(\boldsymbol{p}) \tag{0.1}$$

appelée **équation d'Euler.**

1. Montrer que la fonction densité $\boldsymbol{\rho}(x,t)$ satisfait

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \mathrm{div}(\boldsymbol{\rho} v) = 0 \tag{0.2}$$

appelée l'équation de conservation de la masse ou équation de continuité.

Solution 0.1. Notons le flot $\phi^t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, c'est à dire $\phi^t(x) = x(t)$, $\frac{d\phi^t}{dt} = v$. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine initial quelconque et $\Omega(t) = \phi^t(\Omega)$ son évolution, alors on stipule que la masse M contenue dans $\Omega(t)$ est constante. On note χ_Ω la fonction caractéristique du domaine Ω. Donc $\chi_{\Omega(t)} = \chi_\Omega \circ \phi^{-t}$. On a

$$M = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\rho} dx = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\chi_\Omega \circ \phi^{-t}\right) \boldsymbol{\rho} dx$$

donc avec une intégration par parties

$$0 = \left(\frac{dM}{dt}\right)_{t=0} = \int \left(\sum_j \left(\partial_{x_j}\chi_\Omega\right)(-v_j)\right)\boldsymbol{\rho} + \left(\chi_\Omega \circ \phi^{-t}\right)(\partial_t \boldsymbol{\rho})\, dx$$

$$\underset{(\text{par parties})}{=} \int \chi_\Omega \left(\sum_j \left(\partial_{x_j}(v_j \boldsymbol{\rho})\right) + \partial_t \boldsymbol{\rho}\right) dx = \int \chi_\Omega \left(\mathrm{div}(v\boldsymbol{\rho}) + \partial_t \boldsymbol{\rho}\right) dx$$

Si cela est vrai pour tout domaine Ω alors nécessairement $\mathrm{div}(v\boldsymbol{\rho}) + \partial_t \boldsymbol{\rho} = 0$.

2. On suppose des petites fluctuations adiabatiques de la pression p et de la densité ρ autour de l'état d'équilibre constant et uniforme, i.e.

$$\boldsymbol{p}(x,t) = p_0 + p(x,t)$$

$$\boldsymbol{\rho}(x,t) = \rho_0 + \rho(x,t)$$

avec $|p| \ll p_0$ et $|\rho| \ll \rho_0$. Montrer que au premier ordre le champ de fluctuation de pression $p(x,t)$ satisfait

$$\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0 \tag{0.3}$$

appelée **équation des ondes** avec la **vitesse du son**

$$c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma R T_0}{M}\right)^{1/2},$$

où T_0 est la température du gaz au repos et $\gamma = \frac{7}{5}$, et que la **loi de Laplace** s'écrit

$$\frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0}. \tag{0.4}$$

Solution 0.2. Supposons maintenant des petites fluctuations

$$\boldsymbol{p}(x,t) = p_0 + p(x,t)$$

$$\boldsymbol{\rho}(x,t) = \rho_0 + \rho(x,t)$$

avec $|p| \ll p_0$ et $|\rho| \ll \rho_0$ et $\left|\left(\partial_{x_j} v\right) v_j\right| \ll |\partial_t v|$. On a

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v(x(t), t) &= \sum_{j=1}^{3} \left(\partial_{x_j} v\right) \frac{dx_j}{dt} + \partial_t v \\ &= \sum_{j=1}^{3} \left(\partial_{x_j} v\right) v_j + \partial_t v\end{aligned}$$

Donc au premier ordre $\frac{dv}{dt} = \partial_t v$ et (0.1) donne

$$\rho_0 \partial_t v = -\mathrm{grad}(p) \tag{0.5}$$

et (0.2) donne

$$\partial_t \rho + \rho_0 \mathrm{div}(v) = 0. \tag{0.6}$$

On déduit

$$\rho_0 \partial_t \mathrm{div}(v) \underset{(0.5)}{=} -\mathrm{div}(\mathrm{grad}(p)) = -\Delta p,$$

$$\partial_t^2 \rho + \rho_0 \partial_t \mathrm{div}(v) \underset{(0.6)}{=} 0,$$

et donc

$$\partial_t^2 \rho = \Delta p. \tag{0.7}$$

D'après la formule de Laplace d'un gaz parfait adiabatique :

$$\boldsymbol{p} V^{\gamma} = \mathrm{cste} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \mathrm{cste}\left(\frac{m}{V}\right)^{\gamma} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = C \boldsymbol{\rho}^{\gamma}$$

on déduit

$$\boldsymbol{p} = C\boldsymbol{\rho}^{\gamma} \Leftrightarrow \ln \boldsymbol{p} = \ln C + \gamma \ln \boldsymbol{\rho} \Leftrightarrow \frac{d\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}} = \gamma \frac{d\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{\rho}}$$

et donc au premier ordre pour les petites fluctuations p, ρ :

$$\frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0}$$

On a obtenu (0.4). Finalement, on obtient l'équation d'onde pour p :

$$\partial_t^2 p \underset{(0.7)}{=} \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right) \Delta p = c^2 \Delta p$$

avec la constante

$$c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2}$$

appelée vitesse du son. L'équation des gaz parfait est $p_0 V = nRT_0$. Avec la masse volumique $\rho_0 = \frac{m}{V}$ est la masse molaire $M = \frac{m}{n}$ on obtient

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{VnRT_0}{mV} = \frac{RT_0}{M},$$

Donc

$$c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma RT_0}{M}\right)^{1/2}.$$

3. Calculer la valeur numérique de c pour l'air à température $T_0 = 20°C$ et pression $p_0 = 1$ atm.

   Solution 0.3. Avec une température $T_0 = 293K = 20C°$, une pression $p_0 = 10^5 Pa$, alors la densité de l'air est $\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0} = 1.19 kg/m^3$. On obtient une vitesse du son

$$c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma RT_0}{M}\right)^{1/2} = 343\, m/s. \tag{0.8}$$

4. Vérifier que le mode de Fourier (ou onde plane) $p_{k,\omega}(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ est solution de l'équation d'onde sur $\mathbb{R}^3$ à une certaine condition sur $k \in \mathbb{R}^3$ et $\omega \in \mathbb{R}$.

   Solution 0.4. Si on place $p = Ae^{i(k.x+\omega t)}$ dans (0.3) on obtient

$$(i\omega)^2 - c^2 (ik) . (ik) = 0 \tag{0.9}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \pm c |k| \tag{0.10}$$