Gaz parfait diatomique
Solutions

(1) La masse molaire de N_2 et O_2 sont

$$M_{N_2} = \underset{\text{2 atomes}}{2}\ (\underset{\text{7 protons}}{7} + \underset{\text{7 neutrons}}{7})\ g = 28g$$

$$M_{O_2} = 2\ (8+8)\ g = 32\ g$$

La masse molaire <u>moyenne</u> de l'air est

$$M_{air} = 80\%\ M_{N_2} + 20\%\ M_{O_2}$$
$$= 0.8 \times 28 + 0.2 \times 32$$
$$= 28.8\ g$$

(2) On reprend le calcul o TD2,

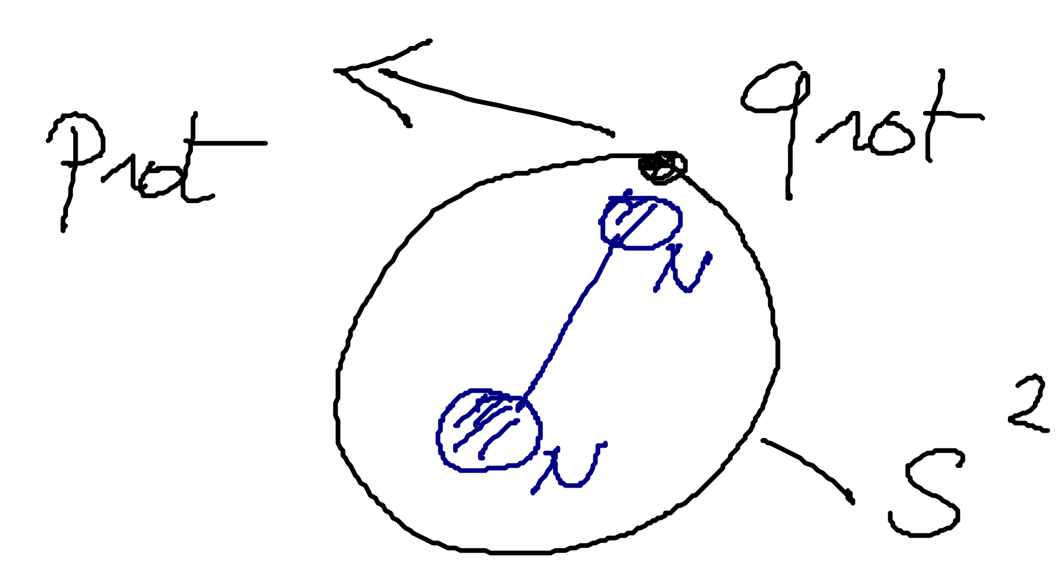
N particules dans un volume V. L'état de chaque particule $j = 1, \dots, N$ est caractérisé par

position $q^{(j)} \in V$

impulsion $p^{(j)} \in \mathbb{R}^3$ (de translation)

orientation $q_{rot}^{(j)} \in S^2$ (sphère)

impulsion de rotation $p_{rot}^{(j)} \in \mathbb{R}^2$



Pour les N particules,

$q = (q^{(1)}, \dots, q^{(N)})$: positions $\in V^N$

$p = (p^{(1)}, \dots, p^{(N)})$: impulsions $\in \mathbb{R}^{3N}$

orientations $q_{rot} = (q_{rot}^{(1)}, \dots, q_{rot}^{(N)}) \in (S^2)^N$

$p_{rot} = (p_{rot}^{(1)}, \dots, p_{rot}^{(N)}) \in \mathbb{R}^{2N}$

- Le Hamiltonien est

$$H(q,p,q_{rot},p_{rot}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m}\Big(\overbrace{p_1^{(j)^2}+p_2^{(j)^2}+p_3^{(j)^2}}^{3}\Big) + \frac{1}{2\mu}\Big(\underbrace{p_\theta^{(j)^2}+p_\varphi^{(j)^2}}_{2}\Big)$$

Alors $\quad H(p, p_{rot}) \leq E$

$\iff \quad \sum_{k=1}^{5N} X_k^2 \leq E$: équation d'une boule de rayon $\sqrt{E}$ dans $\mathbb{R}^{(3+2)N}$

avec $X_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} p_1^{(1)}$, etc, $X_4 = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} p_\theta^{(1)}$, $X_5 = \frac{1}{\sqrt{2\mu}} p_\varphi$ ...

- D'après la formule de Weyl, le nombre d'états $n(E)$ d'énergie $\leq E$ est

$$n(E) \simeq \frac{1}{(2\pi\hbar)^{(3+2)N}} V^N C_N E^{\frac{(3+2)N}{2}} = C_N' V^N E^{\frac{(3+2)N}{2}}$$

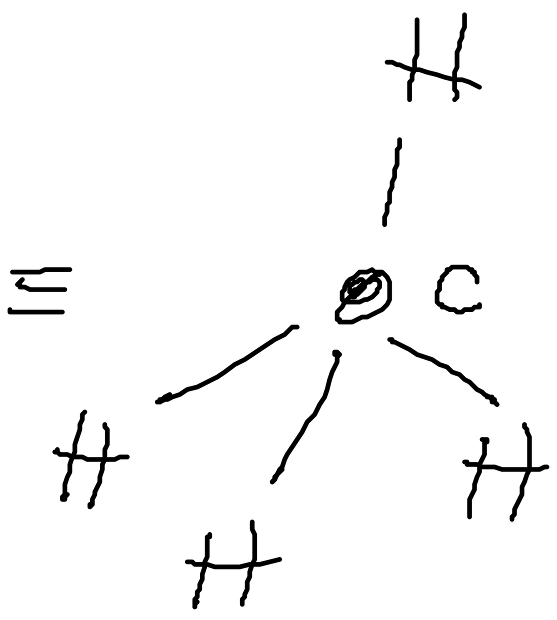
C_N' : constante indép^t de E, V

Densité d'états $\rho(E) = \frac{dn}{dE}$

L'entropie est $S(E,V) := k \ln(\rho(E)) \simeq k \ln(n(E))$

$$= k \ln\left(C_N' V^N E^{\frac{(3+2)N}{2}}\right)$$

- Pour un gaz polyatomique, de sorte que l'état de rotation d'une molécule est décrit par son orientation : $q_{rot} \in SO(\mathbb{R}^3)$

ex : $CH_4 \equiv$ 

$\dim SO(\mathbb{R}^3) = 3$

Cela donnerait donc que l'entropie est

$$S(E,V) := k \ln n(E) = k \ln\left(C'_N V^N E^{\frac{(3+3)}{2}N}\right)$$

3

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{(3+2)}{2} \frac{k N}{E} \iff \frac{E}{N} = \frac{(3+2)}{2} k T$$

$$\frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = k \frac{N}{V} \iff PV = N k T$$

donc $E = \frac{(3+2)}{2} PV$

On a vu que $S(E,V) = k \ln\left(C_N \left(V E^{\frac{3+2}{2}} \right)^N \right)$

donc $S(E,V) = \text{cte}$

$$\iff V E^{\frac{3+2}{2}} = \text{cte}$$

$$\iff V (PV)^{\frac{3+2}{2}} = \text{cte}$$

$$\iff P^{\frac{3+2}{2}} V^{1+\frac{3+2}{2}} = \text{cte}$$

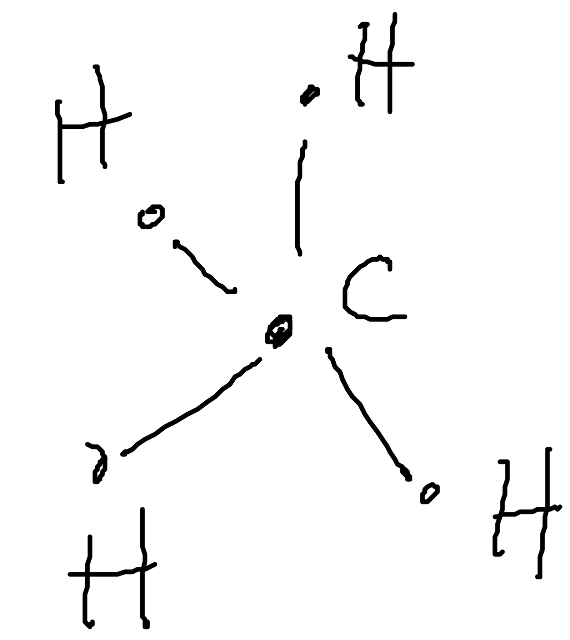
$$\iff P V^{\frac{2}{3+2}+1} = \text{cte}$$

$$\iff P V^{\gamma} = \text{cte} \quad \text{avec } \gamma = 1 + \frac{2}{3+2} = \frac{7}{5}$$

__Rem__ : • avec un gaz __polyatomique__, on aurait

$$\gamma = 1 + \frac{2}{3+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

__ex__ :



CH_4

• avec un gaz parfait __monoatomique__

on aurait $\gamma = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

__ex__ : He