Cycle de Carnot

Solutions.

① On a vu (TD 2) que l'entropie du gaz parfait est $S(E,V) = k \ln\left(C_N V^N E^{3N/2}\right)$,

Or $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$, $\frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V}$

$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{T} = k \frac{3N}{2} \frac{1}{E}, \quad \frac{P}{T} = k N \frac{1}{V}$

$\Longleftrightarrow \quad \frac{E}{N} = \frac{3}{2} kT, \quad PV = NkT$

② $\delta Q = T dS = T\left(\frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV\right) = dE + PdV$

$\delta Q + \delta W = dE + PdV - PdV = dE$

$d(\delta Q) = \left(\frac{\partial P}{\partial E}\right)_V dE \wedge dV$, or $P(E,V) = \frac{NkT}{V} = \frac{N 2E}{V\, 3N}$

$= \frac{2E}{3V}$

$d(\delta Q) = \frac{2}{3V} dE \wedge dV \neq 0$ donc δQ n'est pas fermée.

$d(\delta W) = d(dE - \delta Q) = -d\delta Q \neq 0$

donc δW n'est <u>pas fermée</u>.

③ On a $E = \frac{3}{2} N k T$

donc $S(T,V) = k \ln\left(C_N V^N E^{3N/2}\right)$

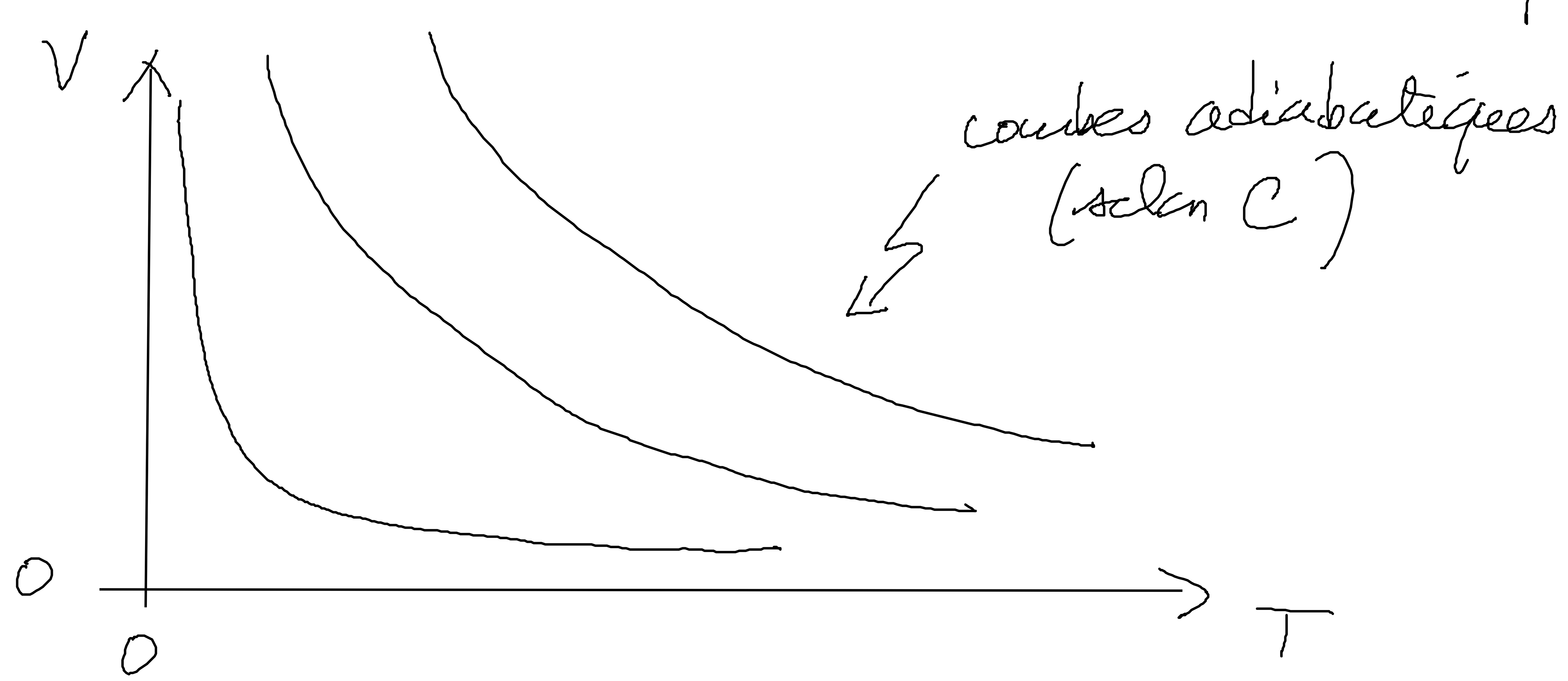
$$= k \ln\left(C_N V^N \left(\frac{3}{2} N k\right)^{3N/2} T^{3N/2}\right)$$

$$= k \ln\left(C'_N \left(V T^{3/2}\right)^N\right)$$

avec C'_N indépendant de V, E.

. Une transformation est <u>adiabatique</u> si S est conservée $\Longleftrightarrow$ $V T^{3/2} = \text{cste}$

$\Longleftrightarrow$ $V = C\, T^{-3/2}$: "courbe adiabatiques"



4) Sur la courbe de détente adiabatique $B \to C$

on a $V_B T_B^{3/2} = V_C T_C^{3/2}$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{V_B}{V_C} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2}$$

De même $V_D T_D^{3/2} = V_A T_A^{3/2}$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{V_A}{V_D} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2} = \frac{V_B}{V_C}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Comme le cycle γ est fermé et que dE, dS sont des formes exactes,

$$\Delta E = \int_\gamma dE = 0, \qquad \Delta S = \int_\gamma dS = 0 \,.$$

⑤ On a $\delta Q = T dS = dE + P dV$

$$= \frac{3}{2} k N \, dT + k N \frac{T}{V} dV$$

$$\cdot \Delta Q_{A \to B} = \int_{A \to B} \delta Q = k N T_2 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = k N T_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$$

$$\cdot \Delta Q_{C \to D} = \int_{C \to D} \delta Q = k N T_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = k N T_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) < 0$$

- Par les transformations adiabatiques, $dS = 0$ donc $\delta Q = 0$.

- Sur le cycle total :

$$\Delta Q = \Delta Q_{A \to B} + \Delta Q_{C \to D} = k N (T_2 - T_1) \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$$

or $\Delta E = \Delta Q + \Delta W = 0$ donc

$$-\Delta W = \Delta Q > 0.$$

(6) On a vu que $\Delta Q_{A\to B} = k N T_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$
le système reçoit de la chaleur depuis le thermostat chaud.

Le <u>rendement</u> est

$$\eta = \frac{(-\Delta W)}{\Delta Q_{A\to B}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Application numérique :

$$\eta = 1 - \frac{273+20}{273+100} = 0.21$$

(7) Si le cycle est parcouru dans l'autre sens, les signes sont changés :

- sur D → C, le gaz reçoit de la chaleur de près le thermostat froid (T_1)
- sur B → A, le gaz fournit de la chaleur au thermostat chaud (T_2)
- Sur le cycle, le gaz reçoit du travail : $\Delta W > 0$.

C'est donc une <u>pompe à chaleur</u>, à qui il faut fournir l'énergie $\Delta W > 0$.