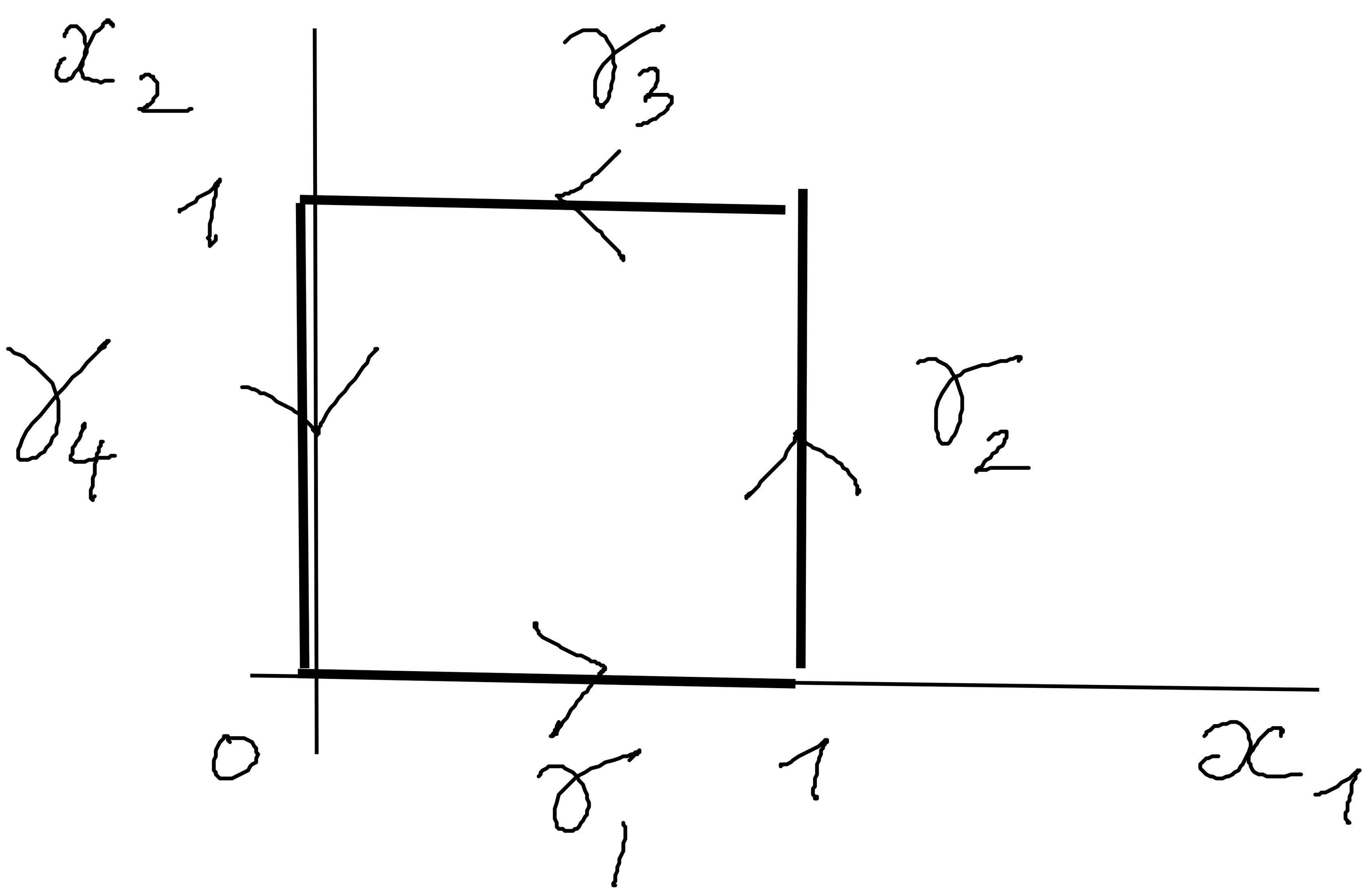
Exercices sur les 1-formes

Sur le plan $\mathbb{R}^2$, avec les coordonnées (x_1, x_2), on considère le chemin fermé :



① $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$,

alors $df = 2x_1\,dx_1 + 2x_2\,dx_2$

$$\int_{\gamma_1} df = \int_0 \left(2x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2x_2 \frac{dx_2}{dt}\right) dt$$

avec $x_1(t) = t$, $x_2(t) = 0$, $\frac{dx_1}{dt} = 1$

donc $\displaystyle\int_{\gamma_1} df = \int_0^1 2t\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2\,\frac{1}{2} = 1$

de même, $\displaystyle\int_{\gamma_2} df = \int_0^1 2x_2 \frac{dx_2}{dt}\, dt = \int_0^1 2t\, dt = 1$

$$\int_{\gamma_3} df = \int_0^1 2x_1 \frac{dx_1}{dt}\, dt = \int_0^1 2(1-t)(-1)\, dt = -2\int_0^1 dt + \int_0^1 2t\, dt$$

$$= -2+1 = -1$$

$$\int_{\gamma_4} df = \int_0^1 2x_2 \frac{dx_2}{dt}\, dt = 2\int_0^1 (1-t)(-1)\, dt = -1$$

On vérifie que $\displaystyle\int_\gamma df = \int_{\gamma_1} df + \int_{\gamma_2} df + \int_{\gamma_3} df + \int_{\gamma_4} df = 0$

que l'on obtient directement par $\displaystyle\int_\gamma df = f(\gamma_{fin}) - f(\gamma_{init})$

$= 0$ car $\gamma_{fin} = \gamma_{init}$

2) Soit $\alpha = x_2\, dx_1$: 1 forme de composantes $\alpha_1 = x_2$, $\alpha_2 = 0$

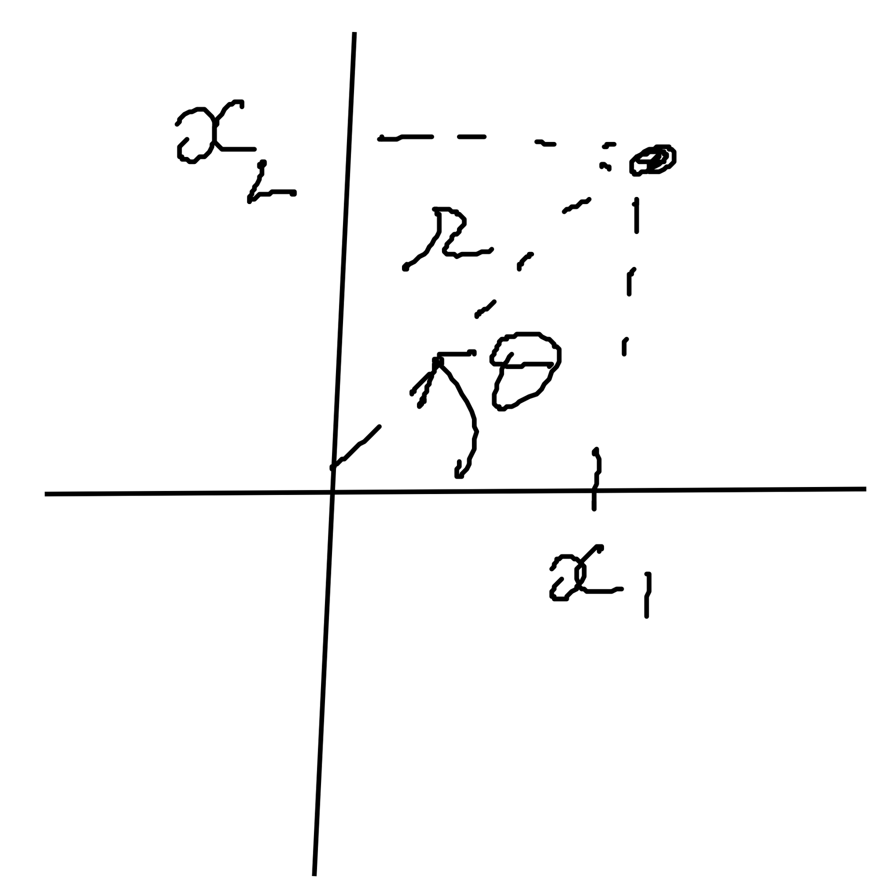
donc $d\alpha = -dx_1 \wedge dx_2 \neq 0$ donc α n'est <u>pas fermée</u>

$\displaystyle\int_{\gamma_1} \alpha = 0$, $\displaystyle\int_{\gamma_2} \alpha = 0$, $\displaystyle\int_{\gamma_3} \alpha = \int_0^1 \frac{d(1-t)}{dt}\, dt = -1$, $\displaystyle\int_{\gamma_4} \alpha = 0$

donc $\int_\gamma \alpha = -1$,

On vérifie que $\int_\gamma \alpha = \iint_C d\alpha = -\iint_C dx_1\, dx_2 = -1$.

(3) $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$,



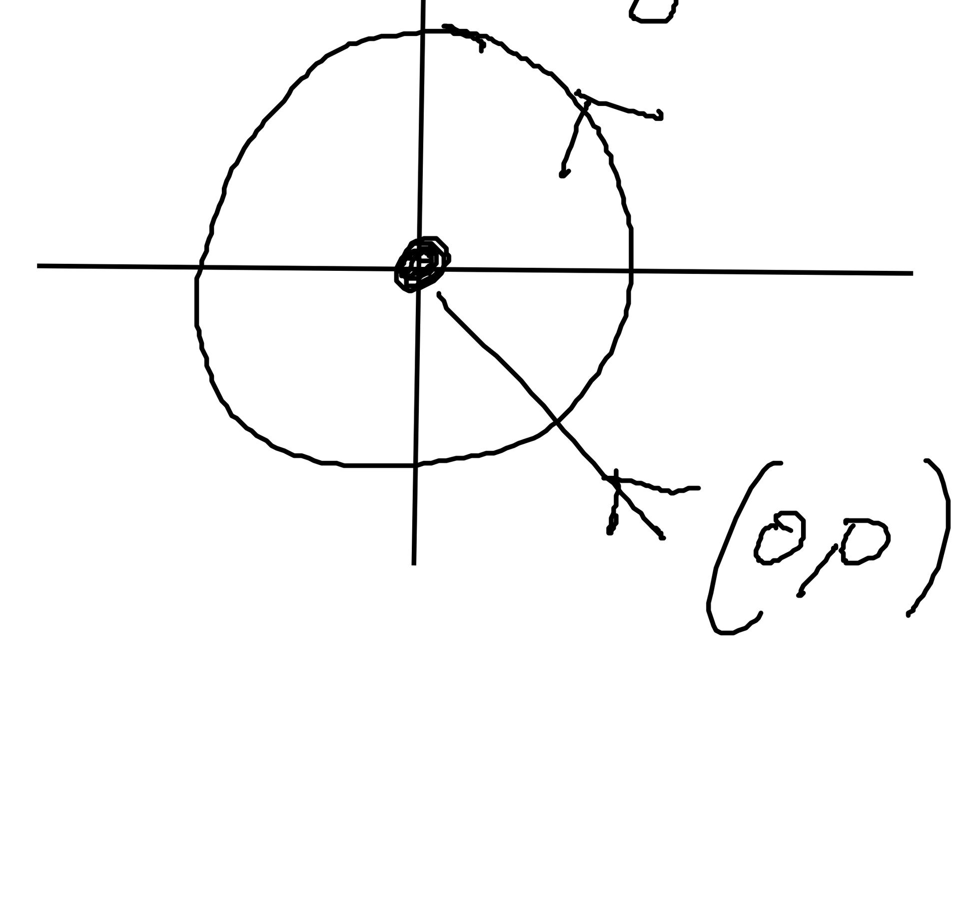
donc $dx_1 = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta$

$dx_2 = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$

$$x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1 = r\cos\theta\sin\theta\, dr + r^2\cos^2\theta\, d\theta$$
$$- r\cos\theta\sin\theta\, dr + r^2\sin^2\theta\, d\theta$$
$$= r^2\, d\theta$$

donc $\alpha = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}\left(x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1\right) = \frac{1}{r^2} r^2\, d\theta = d\theta$

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$



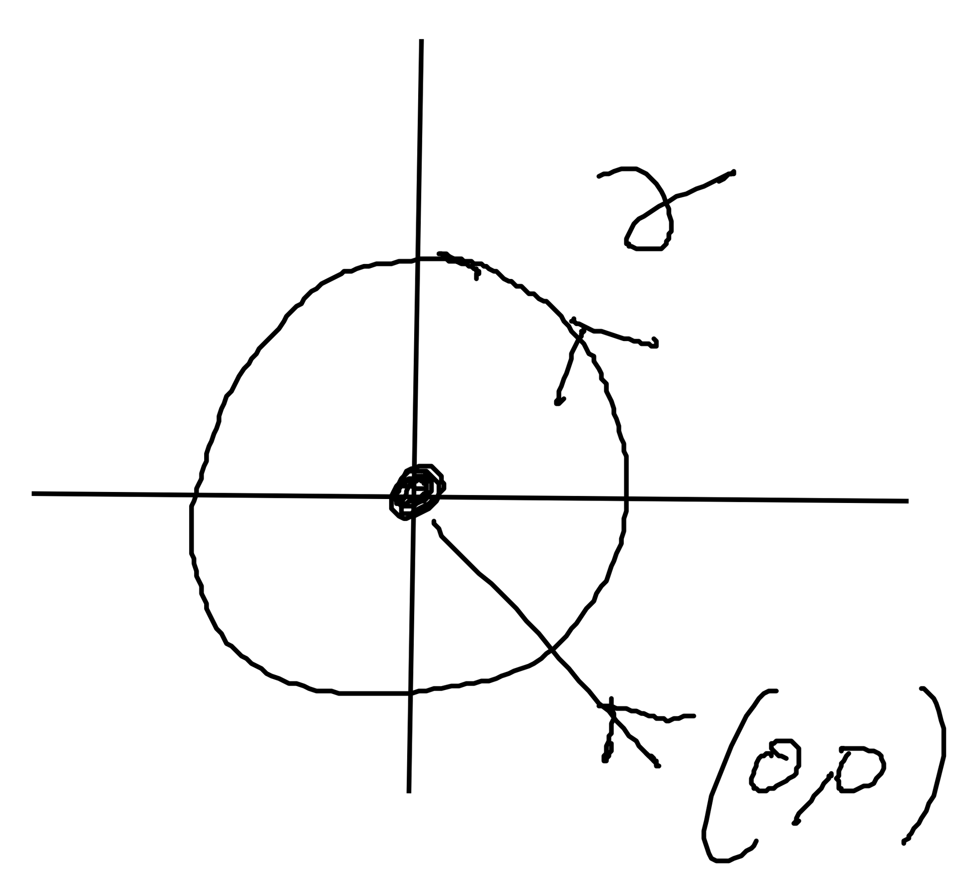
Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $d\alpha = \left(\partial_{x_1}\left(\dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right) + \partial_{x_2}\left(\dfrac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)\right) dx_1 \wedge dx_2$

$$= \left(\frac{1\cdot(x_1^2+x_2^2) - x_1(2x_1)}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \right) dx_1 \wedge dx_2$$

$= 0$, donc α est <u>fermée</u>,

ou plus simplement $d\alpha = dd\theta = 0$

Mais le cercle γ n'est pas le bord d'un domaine contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, à cause du point manquant $(0,0)$. On ne peut donc pas appliquer la formule de Stokes.



(4) Fonction $S(E,V) = \ln(VE)$ "entropie"

$$dS = \frac{\partial S}{\partial E}\, dE + \frac{\partial S}{\partial V}\, dV,$$
$$= \frac{1}{T}\, dE + \frac{P}{T}\, dV$$

donc $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$, $\frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V}$

$\Longleftrightarrow$ $\frac{1}{T} = \frac{1}{E}$, $\frac{P}{T} = \frac{1}{V}$

$\Longleftrightarrow$ $T(E,V) = E$, $P(E,V) = \frac{T}{V} = \frac{E}{V}$

1 formes: $\delta Q := T dS$, $\delta W := -P dV$,

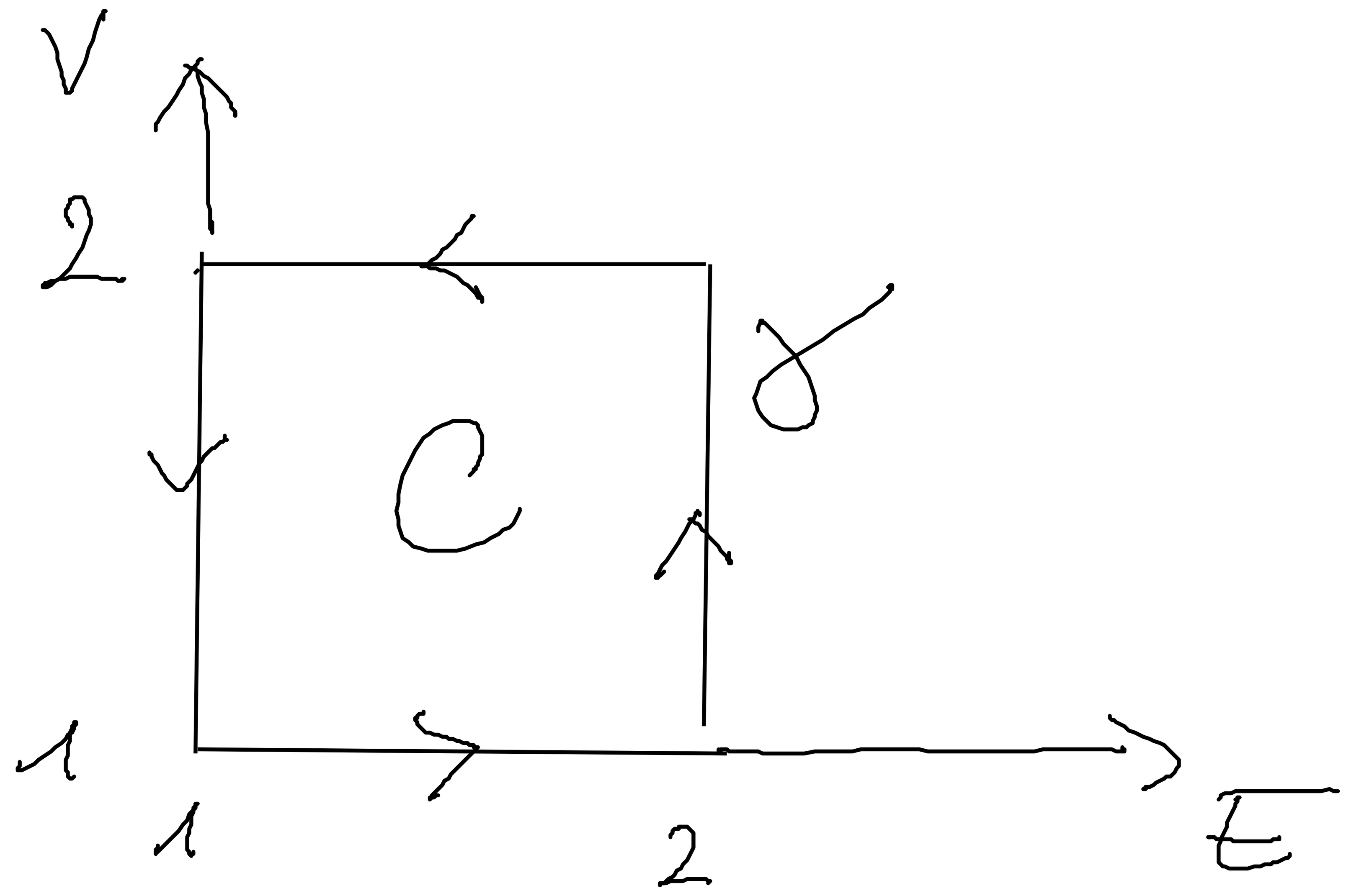
$$\delta Q + \delta W = T dS - P dV = T\left(\frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV\right) - P dV$$
$$= dE$$

$$\delta Q = T dS = dE + P dV = dE + \frac{E}{V} dV$$

donc $d(\delta Q) = \frac{1}{V}(dE \wedge dV) \neq 0$ donc δQ non fermée

de même $d(\delta W) = d(dE - \delta Q) = -d\delta Q \neq 0$,

ou directement $d(\delta W) = d\left(-\frac{E}{V} dV\right) = -\frac{1}{V} dE \wedge dV \neq 0$



$$\int_\gamma \delta Q \underset{\text{Stokes}}{=} \int_{=\partial C} \delta Q = \iint_C d\delta Q = \iint_C \frac{1}{V}\, dE \wedge dV$$

$$= \int_{E=1}^{2} dE \int_{V=1}^{2} \frac{1}{V}\, dV = \Big[\ln V\Big]_1^2 = \ln 2$$

On pourrait aussi calculer directement $\int_\gamma \delta Q$

avec $\delta Q = T\,dS = dE + \frac{E}{V}\, dV$

exacte donc donnera $\int_\gamma dE = 0$.

$$\int_\gamma \delta Q = \int_{\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4} \frac{E}{V}\, dV = 0 + 2\Big[\ln V\Big]_1^2 + 0 - 1\Big[\ln V\Big]_1^2$$

$$= \ln 2.$$