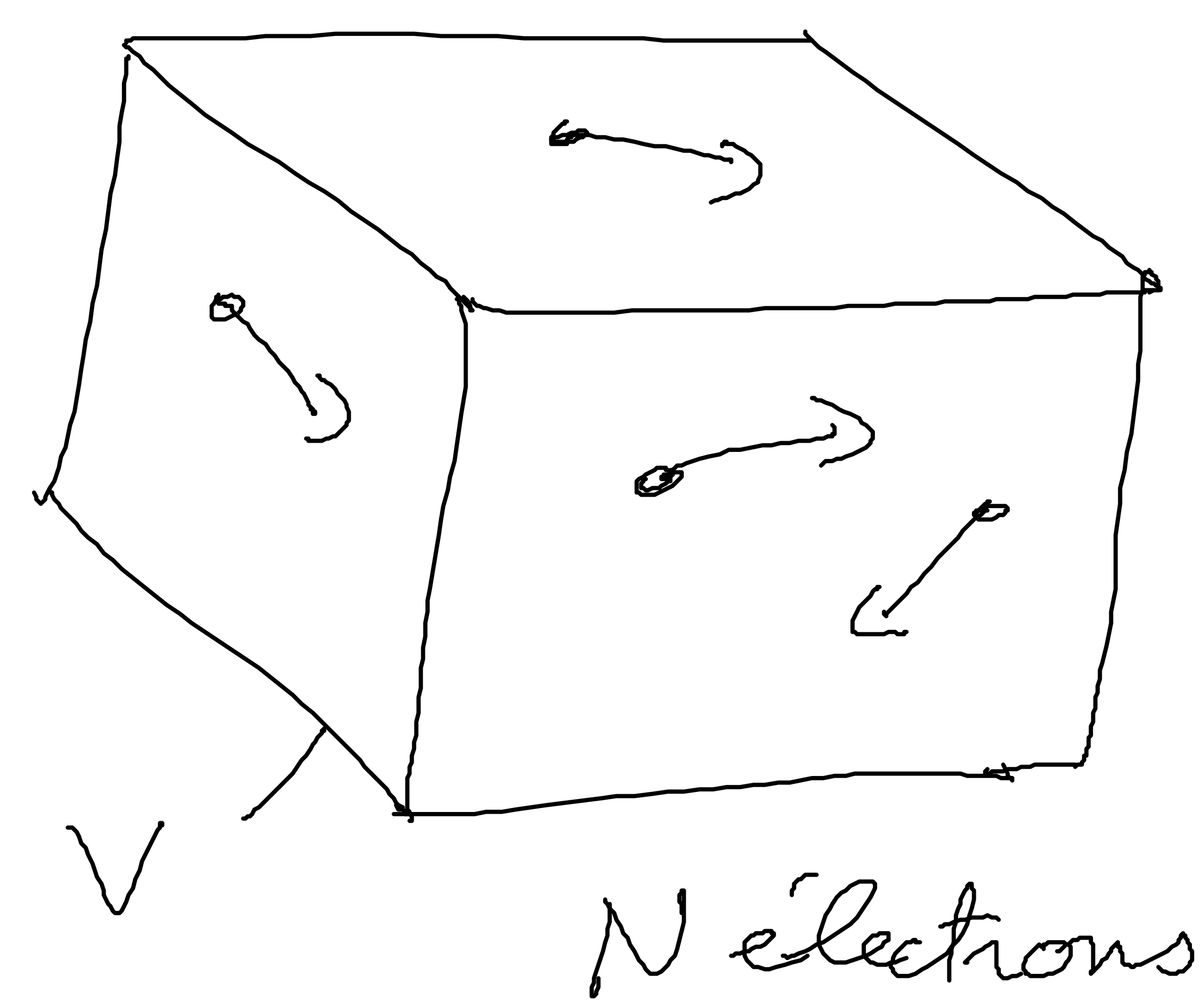
Transitions de phase en supraconductivité
Modèle BCS

2 Gaz d'électrons libres



Pour un électron de spin $\frac{1}{2}$

position $x \in$ volume V

impulsion $p = \hbar k \in \mathbb{R}^3$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \uparrow$ vecteur d'onde

l'énergie est

$$H(x,k) = \frac{|p|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 |k|^2}{2m}$$

D'après la loi de Weyl, le nombre N d'états d'énergie inférieure à μ est le volume correspondant dans l'espace des phases (x,k), renormalisé par $(2\pi)^d$ ← $d=3$: nombre de degrés de liberté.

On remarque que la condition $H(x,k) \leq \mu$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \text{domaine de volume } V \\ |k| \leq R = \frac{1}{\hbar}(2m\mu)^{1/2} \end{cases} : \quad k \in \text{Boule de rayon } R$$

Cela donne (car 2 états de spin)

$$N = \frac{2}{(2\pi)^3} \mathrm{Vol}\{(x,k) \text{ t.q } H(x,k) \leq \mu\}$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^3} V \times \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

volume du domaine permis en position x

volume de la sphère de rayon R dans l'espace des vecteurs d'ondes $k \in \mathbb{R}^3$

$$= \frac{2}{8\pi^3\hbar^3} V \frac{4}{3}\pi (2m\mu)^{3/2}$$

$$N = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m\mu}{\hbar^2}\right)^{3/2}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\mu = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{2/3}}$$

3 Base de l'espace de Fock Fermionique

①

Champ quantique $\|N(\cdot)\rangle$	$a_1^+\|N(\cdot)\rangle$	$a_1\|N(\cdot)\rangle$	$a_2 a_1^+\|N(\cdot)\rangle$	$a_1^+a_1 + a_2^+a_2\|N(\cdot)\rangle$
$\|0,1\rangle$	$\|1,1\rangle$	0	$\|1,0\rangle$	$1 \times \|0,1\rangle$
$\|1,0\rangle$	0	$\|0,0\rangle$	0	$1 \times \|1,0\rangle$
$\|0,0\rangle$	$\|1,0\rangle$	0	0	0
$\|1,1\rangle$	0	$\|0,1\rangle$	0	$2 \times \|1,1\rangle$

rem : pour expliquer la dernière colonne, par exemple

$a_1^+ a_1 |0,1\rangle = 0, \quad a_2^+ a_2 |0,1\rangle = a_2^+ |0,0\rangle = |0,1\rangle$

donc $(a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2)|0,1\rangle = 0 + |0,1\rangle = |0,1\rangle$

On observe que $a_p^+ a_p |N(\cdot)\rangle = N(p) |N(\cdot)\rangle$

avec $N(p) \in \{0,1\}$: nombre de particule dans l'état p.

Ainsi l'opérateur $a_p^+ a_p$ "compte le nombre de particules dans l'état p".

② Il suffit de le montrer sur un seul état à une particule, de base $|0\rangle, |1\rangle$.

On considère toutes les possibilités :

$$\langle 0 | a^+ 1 \rangle = 0 \ , \quad \langle 0 | a^+ 0 \rangle = \langle 0 | 1 \rangle = 0$$

$$\langle 1 | a^+ 0 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle = 1, \quad \langle 1 | a^+ 1 \rangle = 0$$

et $\langle a 0 | 1 \rangle = 0, \quad \langle a 0 | 0 \rangle = 0$

$$\langle a 1 | 0 \rangle = \langle 0 | 0 \rangle = 1, \quad \langle a 1 | 1 \rangle = \langle 0 | 1 \rangle = 0$$

donc dans les listes ci-dessus on observe que

$$\langle N | a^+ N' \rangle = \langle a N | N' \rangle, \quad \forall N, N' \in \{0, 1\}$$

cela est équivalent (car $|0\rangle, |1\rangle$ est une base)

à $\forall u, v \in F \quad \langle u | a^+ v \rangle = \langle a u | v \rangle$,

donc a^+ est l'opérateur adjoint de a

et réciproquement $\left((a^+)^+ = a \right)$

③ Posons $\hat{A} := \int_{\mathbb{R}^3} E_{cin}(p)\, a_p^+ a_p\, d^3p$

On veut montrer que $\hat{H}_{cin} = \hat{A}$: égalité d'opérateurs

Pour cela, il suffit de vérifier qu'ils ont la même action sur les vecteurs de bases $|N(\cdot)\rangle$.

D'une part $\hat{H}_{cin} |N(\cdot)\rangle = E_{N(\cdot)} |N(\cdot)\rangle$

c'est à dire que $|N(\cdot)\rangle$ est vecteur propre, avec la valeur propre $E_{N(\cdot)} = \int_{\mathbb{R}^3} N(p) E_{cin}(p)\, d^3p$

D'autre part $a_p^+ a_p |N(\cdot)\rangle = N(p) |N(\cdot)\rangle$

d'après la question 1.

Donc $\hat{A} |N(\cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} E_{cin}(p)\, N(p)\, |N(\cdot)\rangle\, d^3p$

$= E_{N(\cdot)} |N(\cdot)\rangle$

donc $\hat{A} = \hat{H}_{cin}$

De même on montre que

$$\hat{N} = \int_{\mathbb{R}^3} a_p^+ a_p \, d^3p$$

$$\hat{H}_{GC} = \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon'(p) \, a_p^+ a_p \, d^3p$$

(4) L'<u>état fondamental</u> de $\hat{H}_{GC}$ est un état de base de la forme $|N(\cdot)\rangle$ (champs quantique) avec le champs classique $N(\cdot) : p \longmapsto N(p)$ qui minimise la valeur propre $\varepsilon'_{N(\cdot)}$:

de $\hat{H}_{GC} |N(\cdot)\rangle = \varepsilon'_{N(\cdot)} |N(\cdot)\rangle$

avec $\varepsilon'_{N(\cdot)} = \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon'(p) \, N(p) \, d^3p$.

Posons $|\Psi_{fond}\rangle = |N(\cdot)\rangle$ état fondamental qui minimise $\varepsilon'_{N(\cdot)}$.

Pour cela il faut :

- si $\varepsilon'(p) \leqslant 0 \Leftrightarrow E_{cin}(p) \leqslant \mu \Leftrightarrow p \in$ sphère de Fermi

  il faut $N(p) = 1$: état occupé

- si $\varepsilon'(p) > 0 \Leftrightarrow E_{cin}(p) > \mu \Leftrightarrow p \notin$ sphère de Fermi

  il faut $N(p) = 0$: état inoccupé

  Rem : comme déjà vu en $\boxed{1}$, l'état fondamental correspond à un champs où seuls les états dans la sphère de Fermi sont occupés.

- Comme pour un $p \in \mathbb{R}^3$ fixé, $|1\rangle = a_p^+ |0\rangle$,

  On peut écrire :

$$|\Psi_{fond}\rangle = |N(\cdot) = (\underbrace{1, 1, 1 \cdots, 1}_{\substack{\text{pour tous les} \\ p \text{ t.q } E_{cin}(p) \leqslant \mu}}, \underbrace{0, \ldots 0}_{\text{si } E_{cin}(p) > \mu})\rangle$$

$$= \Big(\prod_{\substack{p \text{ tq} \\ E_{cin}(p) \leqslant \mu}} a_p^+\Big) \underbrace{|0, 0, \ldots 0\rangle}_{\text{état du vide}}$$

(5) • Pour des fermions, $N(p) = 0$ ou 1.

$$a_p |0\rangle = 0, \quad a_p |1\rangle = |0\rangle$$

$$a_p^+ |0\rangle = |1\rangle, \quad a_p^+ |1\rangle = 0$$

donc $\quad a_p a_p^+ + a_p^+ a_p |0\rangle = a_p |1\rangle + 0$

$$= |0\rangle = \mathrm{Id}\, |0\rangle$$

$$a_p a_p^+ + a_p^+ a_p |1\rangle = 0 + a_p^+ |0\rangle$$

$$= |1\rangle = \mathrm{Id}\, |1\rangle$$

donc $\quad a_p a_p^+ + a_p^+ a_p = \mathrm{Id}$

car ces opérateurs ont la même action

sur les vecteurs de base.

• Pour les bosons, $\quad N(p) = 0$ ou $1, 2, 3 \dots$

pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_p |N\rangle = \sqrt{N}\, |N-1\rangle$

$$a_p^+ |N\rangle = \sqrt{N+1}\, |N+1\rangle$$

donc $\quad a_p a_p^+ - a_p^+ a_p |N\rangle = a_p \sqrt{N+1}\, |N+1\rangle$

$$- a_p^+ \sqrt{N}\, |N-1\rangle = \left(\sqrt{N+1}\right)^2 |N\rangle - \left(\sqrt{N}\right)^2 |N\rangle$$

$$= \left((N+1) - N\right) |N\rangle = |N\rangle = \mathrm{Id}\, |N\rangle .$$

$\boxed{4}$ Interactions entre les électrons et Hamiltonien B.C.S.

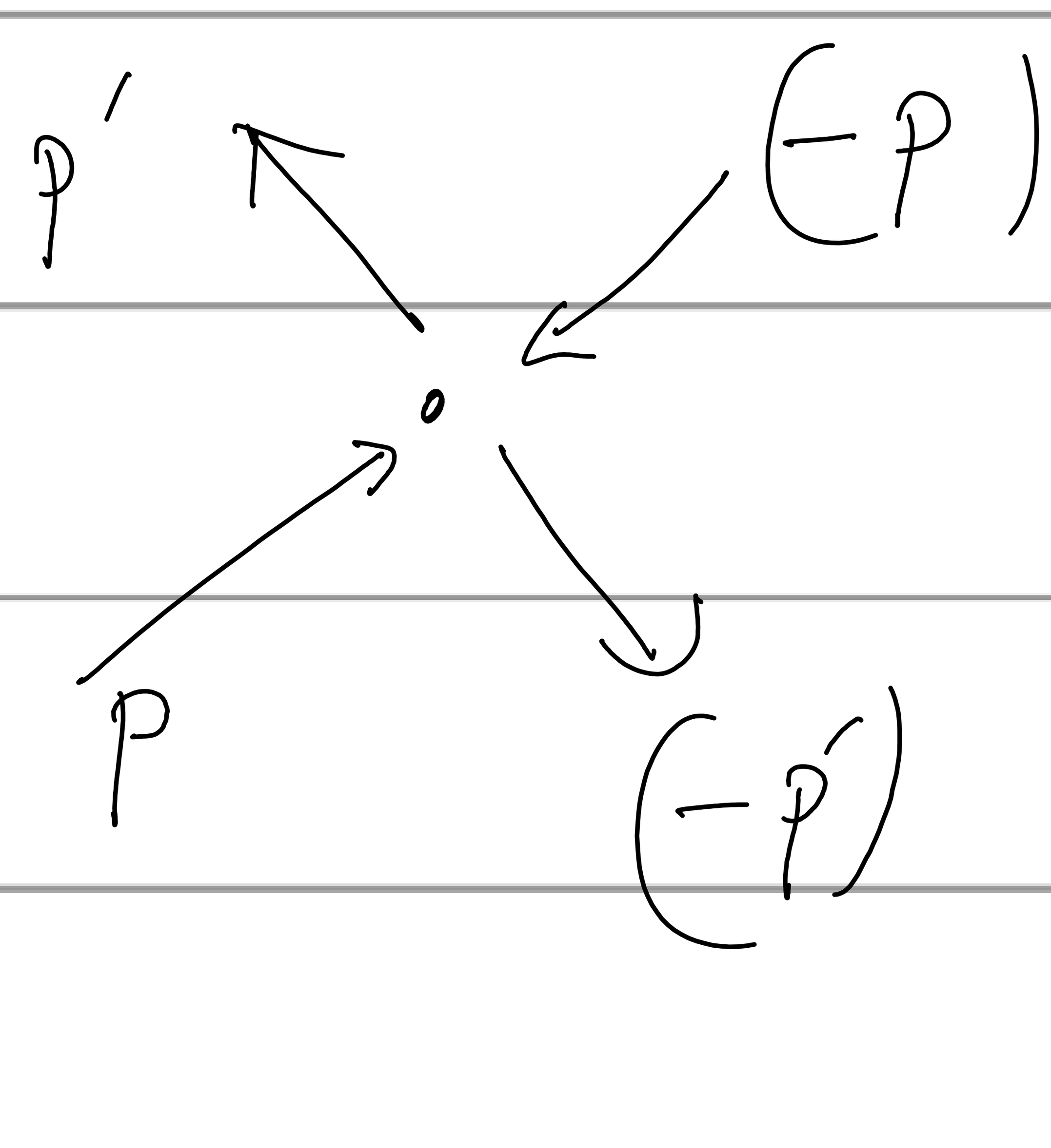
(1)

$$0 = \overbrace{p_1 + p_2}^{\text{avant}} = \overbrace{p_1' + p_2'}^{\text{après collision}}$$

impulsion totale nulle

conservation de l'impulsion totale

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} p_2 = -p_1 & : \underline{\text{paire}}\ (p, -p) \text{ avec } p = p_1 \\ p_2' = -p_1' & : \underline{\text{paire}}\ (p', -p') \text{ avec } p' = p_1' \end{cases}$$



: collision

⑤ Approximation du champs moyen méthode variationnelle

① $$\hat{H}^{approx}_{BCS} = \hat{H}_{cin} - \mu \hat{N} + \hat{H}^{approx}_{inter}.$$

or $$\hat{H}^{approx}_{inter} = - V_0 \iint_{p,p' \in D} b^+_{p'} \langle b_p \rangle + \underbrace{\langle b^+_{p'} \rangle}_{\overline{\langle b_{p'} \rangle}} b_p - \langle b^+_{p'} \rangle \langle b_p \rangle \, dp \, dp'$$

$$= \int_{p \in D} \left[- V_0 \int_{p'} \langle b_{p'} \rangle dp' \right] b^+_p \, dp$$ (: on a échangé les notations $p \leftrightarrow p'$)

$$+ \int_{p \in D} \left[- V_0 \int_{p'} \overline{\langle b_{p'} \rangle} dp' \right] b_p \, dp$$

$$- V_0 \left(\int \overline{\langle b_{p'} \rangle} \, dp' \right) \left(\int \langle b_p \rangle \, dp \right) \mathrm{Id}$$

donc
$$\hat{H}^{approx}_{inter} = \int_{p \in D} \left(\Delta b^+_p + \bar{\Delta} b_p \right) dp - \frac{1}{V_0} |\Delta|^2 \, \mathrm{Id}$$

avec $\Delta := -V_0 \int_{p \in D} \langle b_p \rangle \, dp$

et $\hat{H}_{cin} - \mu \hat{N}$ (on ignore les e^- hors de la couche S)

$$= \int_{p \in S} \varepsilon'_p a_p^+ a_p + \varepsilon'_{-p} a_{-p}^+ a_{-p} \, dp$$

$$= \int_{p \in D} \varepsilon'_p \left(a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p} \right) dp$$

donc

$$H^{\text{approx}}_{BCS} = \int_{p \in S} \varepsilon'_p \left(a^+_p a_p + a^+_{-p} a_{-p}\right) + \Delta\, b^+_p + \bar{\Delta}\, b_p \, dp$$

$$+ C \, \mathrm{Id}$$

avec $C = -\dfrac{1}{V_0} |\Delta|^2$

Pour $p \in S$ fixé, on pose

$$H^{\text{approx}}_{BCS}(p) := \varepsilon'_p \left(a^+_p a_p + a^+_{-p} a_{-p}\right)$$

$$+ \Delta\, b^+_p + \bar{\Delta}\, b_p$$

Ces opérateur $\hat{H}^{approx}_{BCS}(p)$ agit dans l'espace de Fock $\mathcal{F}_{(-p,p)}$ d'une paire de Cooper $(p,-p)$, de base $|N_p, N_{-p}\rangle$ avec $N_p, N_{-p} \in \{0,1\}$.

On calcule

$$H^{approx}_{BCS}(p)\,|1,0\rangle = \varepsilon'_p\,|1,0\rangle$$

$$\hat{H}^{approx}_{BCS}(p)\,|0,1\rangle = \varepsilon'_p\,|0,1\rangle$$

$$\hat{H}^{approx}_{BCS}(p)\,|0,0\rangle = \Delta\, b^+_p\,|0,0\rangle = \Delta\,|1,1\rangle$$

$$\hat{H}^{approx}_{BCS}(p)\,|1,1\rangle = 2\varepsilon'_p\,|1,1\rangle + \bar{\Delta}\,|0,0\rangle$$

Donc dans la base $|1,0\rangle, |0,1\rangle, |0,0\rangle, |1,1\rangle$

$$H^{approx}_{BCS}(p) = \left(\begin{array}{cc|cc} \varepsilon'_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \bar{\Delta} \\ 0 & 0 & \Delta & 2\varepsilon'_p \end{array}\right)$$

(2) La matrice précédente est constituée d'une partie diagonale avec 2 vecteurs propres :

$$H^{approx}_{BCS}(p)\,|1,0\rangle = \varepsilon'_p\,|1,0\rangle$$

$$\hat{H}^{approx}_{BCS}(p)\,|0,1\rangle = \varepsilon'_p\,|0,1\rangle$$

et d'une matrice 2×2 : $M=\begin{pmatrix} 0 & \bar{\Delta} \\ \Delta & 2\varepsilon'_p \end{pmatrix}$
dans la base $|0,0\rangle, |1,1\rangle$,
dont on cherche maintenant les valeurs propres $E_\pm(p)$

Polynome caractéristique : $z\in\mathbb{C} \longrightarrow P(z)=\det(z-M)$

$$P(z)=\det\begin{pmatrix} z & -\bar{\Delta} \\ -\Delta & z-2\varepsilon'_p \end{pmatrix} = z^2 - z\,2\varepsilon'_p - |\Delta|^2$$

• les valeurs propres $E_\pm(p)$ sont les zéros de $P(z)$:

$$E_\pm(p) = \frac{2\,\varepsilon'_p \pm \sqrt{D}}{2} \quad , \quad D = 4\,\varepsilon_p'^2 + 4\,|\Delta|^2$$

$$\boxed{E_\pm(p) = \varepsilon'_p \pm \underbrace{\left(\varepsilon_p'^2 + |\Delta|^2\right)^{1/2}}_{\mathcal{E}_p}}$$

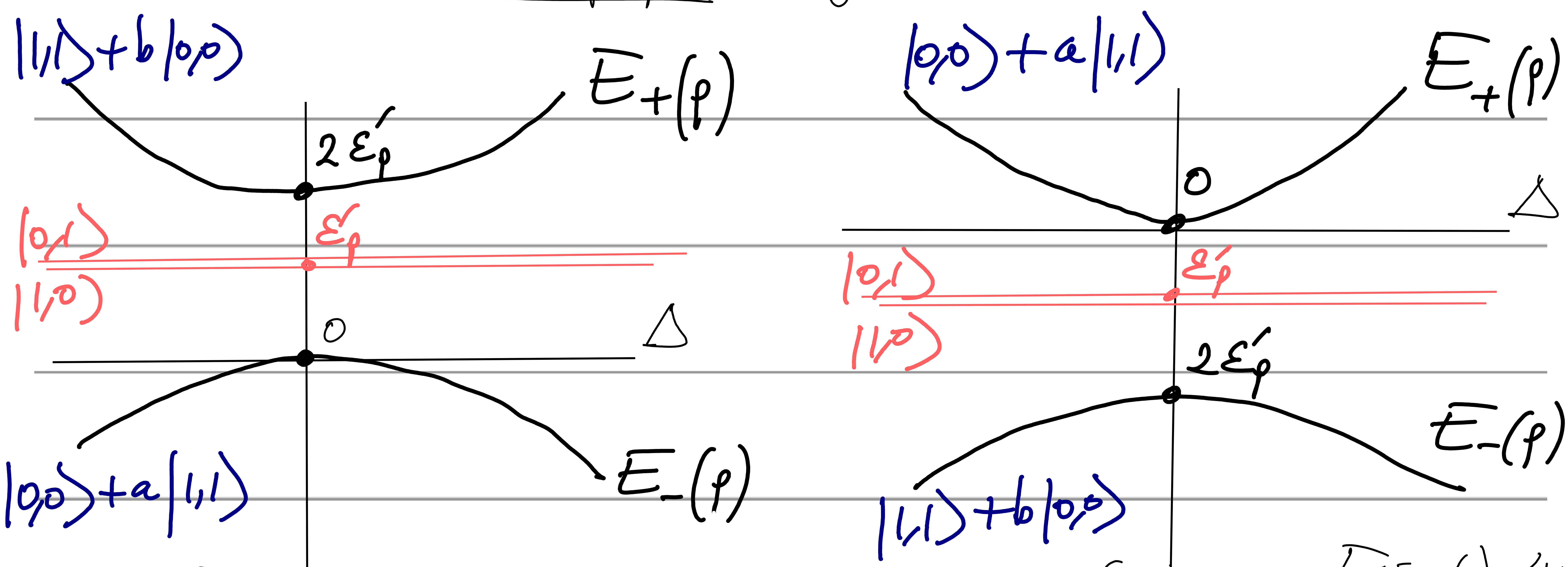
• rem : pour $\Delta = 0$,

on a si $\varepsilon'_p > 0$, $\begin{cases} E_+(p) = 2\,\varepsilon'_p \\ E_-(p) = 0 \end{cases}$

si $\varepsilon'_p < 0$, $\begin{cases} E_+(p) = 0 \\ E_-(p) = 2\,\varepsilon'_p \end{cases}$

comme attendu par l'expression de $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\,\varepsilon'_p \end{pmatrix}$

• Schéma des valeurs propres en fonction de Δ :



si $\varepsilon'_p > 0 \iff E_{cin}(p) > \mu$ si $\varepsilon'_p < 0 \iff E_{cin}(p) < \mu$

• L'état fondamental a l'énergie $E_-(p)$, $p \in S$.

Par définition, le gap spectral est l'énergie qu'il faut pour passer au premier état excité supérieur. D'après la figure, ce serait ε'_p, mais en fait, il n'y a pas de transition possible entre $E_-(p)$ qui possède un nombre pair de particules $(|0,0\rangle$ ou $|1,1\rangle)$ vers ces états intermédiaires $|0,1\rangle, |1,0\rangle$ à nombre impair de particules, d'après la règle de conservation du nombre de particules. Donc seule la transition $E_-(p) \rightarrow E_+(p)$ est possible, donnant un gap spectral :

$$E_+(p) - E_-(p) = 2\,\delta_p = 2\left(|\Delta|^2 + \varepsilon_p'^2\right)^{1/2}$$

$\varepsilon_p'^2 \geq 0$

$$\boxed{E_+(p) - E_-(p) \geq \underbrace{2|\Delta|}_{\text{gap spectral global}}}$$

cad indépendant de p

3 Supposons que $\hat{A}$ est une observable,

$$\hat{A}\,\psi_j = a_j\,\psi_j, \qquad j = 1, 2, \dots$$

val. propres

vecteurs propres

Si $\varphi \in \mathcal{H}$ est un état quantique quelconque

espace de Hilbert,

alors d'après le principe de la mesure, la probabilité d'observer a_j après une mesure de $\hat{A}$ sur φ est :

$$P_\varphi(j) = \frac{1}{\|\psi_j\|^2 \, \|\varphi\|^2} \left| \langle \psi_j | \varphi \rangle \right|^2$$

Donc la "valeur moyenne quantique" est

$$\langle A \rangle_\varphi := \sum_{j \geq 1} \underbrace{P_\varphi(j)}_{\text{probabilité}} \; \underbrace{a_j}_{\text{résultat possible}}$$

- rem : utilisant la relation de fermeture

$$\mathrm{Id} = \sum_j \frac{|\psi_j\rangle \langle \psi_j | \cdot \rangle}{\|\psi_j\|^2}$$, on vérifie que

$$\sum_j P_\varphi(j) = \frac{1}{\|\varphi\|^2} \sum_j \frac{\langle \varphi | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \varphi \rangle}{\|\psi_j\|^2} = 1$$

- Montrons que $\boxed{\langle A \rangle_\varphi = \frac{1}{\|\varphi\|^2} \langle \varphi | \hat{A} \varphi \rangle}$

(formule très utilisée en mécanique quantique).

- en effet $\hat{A} = \sum_j a_j \dfrac{|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\cdot\rangle}{\|\psi_j\|^2}$

: décomposition spectrale de $\hat{A}$

donc

$$\langle A\rangle_\varphi = \sum_j P_\varphi(j)\, a_j = \frac{1}{\|\varphi\|^2}\sum_j a_j \frac{\langle\varphi|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\varphi\rangle}{\|\psi_j\|^2}$$

$$\underset{(20\text{-}1)}{=} \frac{1}{\|\varphi\|^2}\langle\varphi|\hat{A}\varphi\rangle .$$

- Ensuite, on suppose que le système est couplé à un thermostat à la température T, $\beta = \frac{1}{kT}$

On note

$$\hat{H}\varphi_j = E_j\varphi_j \qquad \text{: niveau d'énergie}$$

D'après la loi de Boltzmann,

la probabilité que le système soit dans l'état φ_j d'énergie E_j est $\quad P_{BG}(j) = \frac{1}{Z}e^{-\beta E_j}$

avec la constante de normalisation

$$Z = \sum_j e^{-\beta E_j}$$

or dans l'état φ_j, on a déjà une valeur moyenne quantique pour la grandeur A qui est $\langle A \rangle_{\varphi_j}$

Donc la valeur moyenne globale (quantique et statistique) c'est à dire dû aux <u>fluctuations quantiques</u> et aux <u>fluctuations statistiques</u> est par définition

$$\boxed{\langle A \rangle_{P_{BG}} := \sum_j P_{BG}(j) \langle A \rangle_{\varphi_j}}$$

On va montrer que $\langle A \rangle_{P_{BG}} = \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left(\hat{A} e^{-\beta \hat{H}}\right)$
avec $Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta \hat{H}}\right)$.

On rappelle que si $(\varphi_j)_j$ est une <u>base orthogonale</u> de $\mathcal{H}$ et $\hat{A}$ un opérateur alors,

$$\mathrm{Tr}(\hat{A}) := \sum_j \frac{1}{\|\varphi_j\|^2} \langle \varphi_j | \hat{A} \varphi_j \rangle .$$

Pour montrer cela,

- on calcule $\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta \hat{H}}\right) = \sum_j \frac{1}{\|\varphi_j\|^2} \langle \varphi_j | e^{-\beta \hat{H}} \varphi_j \rangle$

$$= \sum_j e^{-\beta E_j} = Z$$

- on calcule

$$\frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left(\hat{A} e^{-\beta \hat{H}}\right) = \frac{1}{Z} \sum_j \frac{1}{\|\varphi_j\|^2} \langle \varphi_j | \hat{A} e^{-\beta \hat{H}} \varphi_j \rangle$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_j \frac{1}{\|\varphi_j\|^2} \langle \varphi_j | \hat{A} \varphi_j \rangle e^{-\beta E_j}$$

$$= \sum_j p_{BG}(j) \langle A \rangle_{\varphi_j} = \langle A \rangle_{\rho_{BG}}$$

④ On a les paramètres libres jusqu'à présent $\langle b_p \rangle \in \mathbb{C}$.

On impose que :

$$\langle b_p \rangle = \langle b_p \rangle_{\rho_{BG}}$$

b_p : opérateur

$\langle b_p \rangle_{\rho_{BG}}$: valeur moyenne statistique à la t° T.

. rem : $\langle b_p^+ \rangle_{\rho_{BG}} = \overline{\langle b_p \rangle_{\rho_{BG}}} = \overline{\langle b_p \rangle}$ comme déjà vu.

b_p^+ : opérateur adjoint de b_p

. On a $\langle b_p \rangle_{\rho_{BG}} = \frac{1}{Z} \mathrm{Tr}\left(b_p \, e^{-\beta \tilde{H}_{BCS}^{approx}} \right)$

avec $Z = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H_{BCS}^{app}} \right) = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\left(\int_S H_{BCS}^{app}(p)\, dp + C\, Id \right)} \right)$

$$= \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta C} Id \right) \prod_{p \in S} \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H_{BCS}^{app}(p)} \right)$$

Or $\mathrm{Tr}(\cdot)$ ne dépend pas de la base, on peut donc utiliser les valeurs propres de $H_{BCS}^{app}(p)$ pour calculer :

De même,

$$\mathrm{Tr}\left(b_p e^{-\beta \tilde{H}^{app}_{BCS}}\right) = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta C}\, Id\right) \prod_{p' \in S} \mathrm{Tr}\left(b_p\, e^{-\beta \tilde{H}^{app}_{BCS}(p')}\right)$$

où l'opérateur b_p

agit comme Id dans l'espace $\mathcal{F}_{(p',-p')}$ si $p' \neq p$.

Donc il reste seulement

$$\langle b_p \rangle_{PBG} = \frac{\mathrm{Tr}\left(b_p\, e^{-\beta \tilde{H}^{app}_{BCS}(p)}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta \tilde{H}^{app}_{BCS}(p)}\right)}$$

On va calculer chacun de ces termes.

$$\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H^{app}_{BCS}(p)}\right) = 2e^{-\beta \varepsilon'_p} + e^{-\beta E_+(p)} + e^{-\beta E_-(p)}$$
$$= 2e^{-\beta\varepsilon'_p} + e^{-\beta\varepsilon'_p}e^{-\beta\delta_p} + e^{-\beta\varepsilon'_p}e^{\beta\delta_p}$$
$$= e^{-\beta\varepsilon'_p}\left(2 + e^{-\beta\delta_p} + e^{\beta\delta_p}\right)$$
$$= e^{-\beta\varepsilon'_p}\left(e^{\frac{\beta}{2}\delta_p} + e^{-\frac{\beta}{2}\delta_p}\right)^2$$
$$= 4e^{-\beta\varepsilon'_p}\cosh^2\left(\frac{\beta}{2}\delta_p\right)$$

Pour le numérateur, on observe que
$$b_p\, e^{-\beta \hat{H}^{app}_{BCS}(p)} = \left(\frac{1}{-\beta}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{\Delta}}\left(e^{-\beta\hat{H}^{app}_{BCS}(p)}\right)$$

car $H^{app}_{BCS}(p) = \varepsilon'\left(a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p}\right) + \Delta\, b_p^+ + \bar{\Delta}\, b_p$

donc
$$\mathrm{Tr}\left(b_p\, e^{-\beta\hat{H}^{app}_{BCS}(p)}\right) = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\bar{\Delta}}\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta H^{app}_{BCS}(p)}\right)$$

$$= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\bar{\Delta}}\left(4e^{-\beta\varepsilon'_p}\cosh^2\left(\frac{\beta}{2}\delta_p\right)\right)$$

$\hookrightarrow$ δ_p dépend de $\bar{\Delta}$

$$= -\frac{1}{\beta} 4 e^{-\beta \varepsilon_p'} \frac{\partial}{\partial \delta_p} \left(\cosh^2\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right)\right) \frac{\partial}{\partial \bar{\Delta}} \left(\delta_p \right)$$

$$\delta_p = \left(\varepsilon_p'^2 + \Delta\bar{\Delta}\right)^{1/2}$$

$$= -\frac{4 e^{-\beta \varepsilon_p'}}{\beta} \left(2 \frac{\beta}{2} \cosh\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right) \sinh\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right)\right) \times \frac{\Delta}{2 \delta_p}$$

$$= -\frac{2 e^{-\beta \varepsilon_p'} \Delta}{\delta_p} \cosh\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right) \sinh\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right)$$

donc

$$\langle b_p \rangle_{\rho_{BG}} = \frac{\mathrm{Tr}\left(b_p \, e^{-\beta \tilde{H}^{app}_{BCS}(p)}\right)}{\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta \tilde{H}^{app}_{BCS}(p)}\right)}$$

$$= -\frac{2 e^{-\beta \varepsilon_p'} \Delta \cosh\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right) \sinh\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right)}{\delta_p \, 4 e^{-\beta \varepsilon_p'} \cosh^2\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right)}$$

$$= -\frac{\Delta}{2 \delta_p} \tanh\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right)$$

On déduit

1 $$(*) \quad \Delta = -V_0 \int_{p \in S} \langle b_p \rangle \, dp = \frac{V_0 \Delta}{2} \int_{\substack{p \in S \\ \text{cad } |\varepsilon'| < E_D}} \frac{1}{\delta_p} \tanh\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right) dp$$

2 avec $$\delta_p = \left(\varepsilon_p'^2 + |\Delta|^2 \right)^{1/2}$$

Dès le début dp est la mesure de Weyl qui compte le nombre d'états.

On note g la densité d'états en énergie. Ainsi

$$(*) \iff \Delta = \frac{V_0 \Delta g}{2} \int_{-E_D}^{+E_D} \frac{1}{\delta_p} \tanh\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right) d\varepsilon'$$

3 $$= V_0 \Delta g \int_0^{E_D} \frac{1}{\delta_p} \tanh\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right) d\varepsilon'$$

Soit $\Delta = 0$, soit c'est "l'équation du gap" :

4 $$\boxed{\frac{1}{V_0 g} = \int_0^{E_D} \frac{1}{\delta_p} \tanh\left(\frac{\beta}{2} \delta_p\right) d\varepsilon', \quad \delta_p = \left(\varepsilon_p'^2 + \Delta^2\right)^{1/2}}$$

(5) Dans l'équation du gap, $\beta = \frac{1}{kT}$ est connu, et on cherche Δ. On ne peut pas résoudre cette équation sans ordinateur (un petit programme

1 python par exemple) mais on peut calculer Δ dans certaines limites. Par exemple $T \to 0$.

2 Supposons $0 < T \ll 1$. $\iff \beta = \frac{1}{kT} \gg 1$

3 on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1$, donc l'équation du gap donne :

4 $$\frac{1}{V_0 g} \approx \int_0^{E_D} \frac{d\varepsilon'}{(\varepsilon'^2 + \Delta^2)^{1/2}} = \int_0^{E_D} \frac{d(\varepsilon'/\Delta)}{\left(\left(\frac{\varepsilon'}{\Delta}\right)^2 + 1\right)^{1/2}}$$

$$= \int_0^{E_D/\Delta} \frac{dx}{(x^2+1)^{1/2}} \quad \text{avec } x = \frac{\varepsilon'}{\Delta}$$

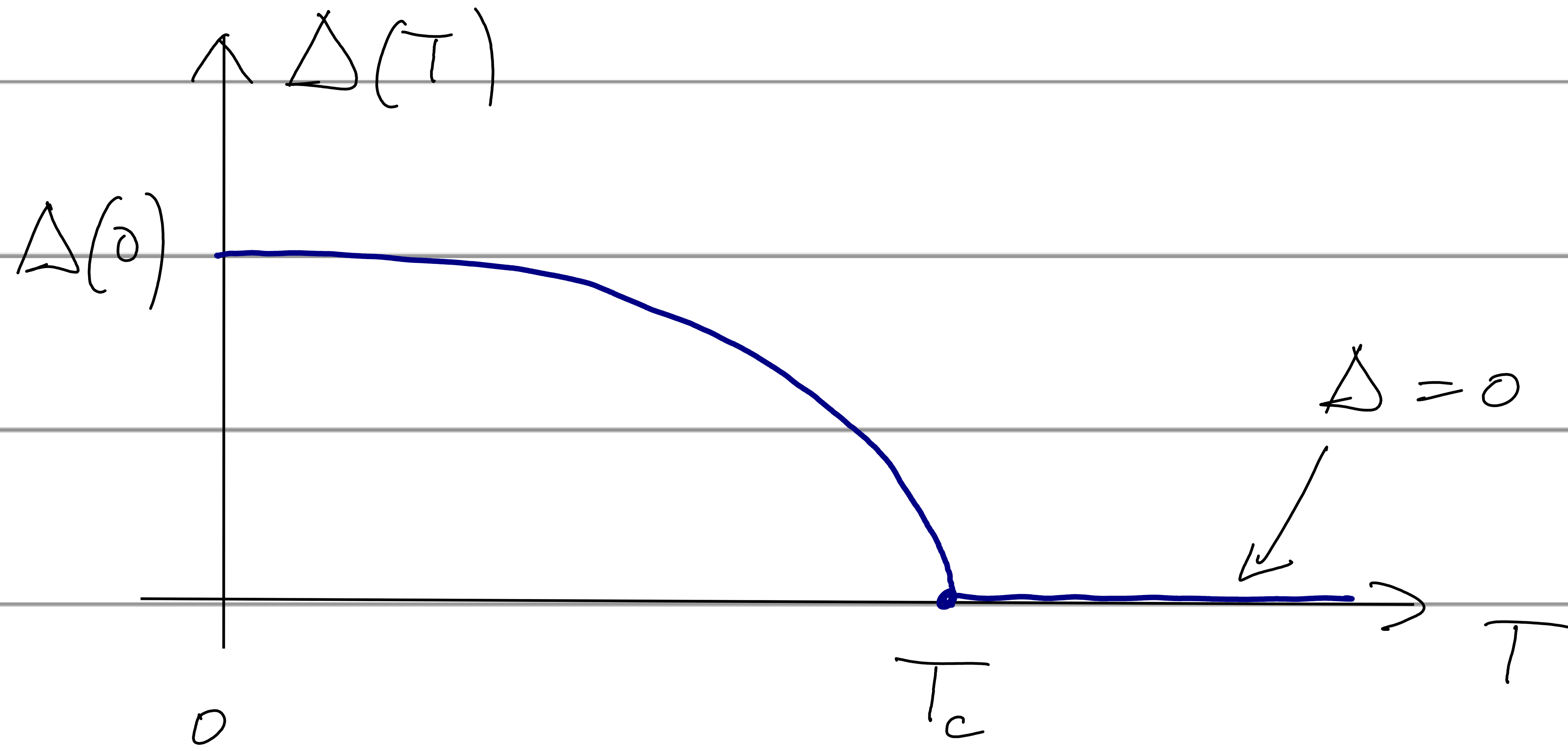
5 $$\approx \ln\left(2\frac{E_D}{\Delta}\right) \quad : \text{ en supposant } E_D/\Delta \gg 1$$

on déduit

6 $$\boxed{\Delta(0) = 2E_D\, e^{-\frac{1}{V_0 g}}}$$

$\to$ hypothèse valable si $V_0 g \gg 1$

(6) On souhaite montrer l'allure suivante de la fonction $\Delta : T \longmapsto \Delta(T)$



Rem : dans (27-3), on a la solution $\Delta = 0$.

On veut montrer que il y a une autre solution $\Delta(T) > 0$ pour $T < T_c$ et une certaine valeur $T_c > 0$, appelée température critique que l'on recherche.

On pose $\beta = \frac{1}{kT}$, $\beta_c = \frac{1}{kT_c}$.

On cherche T_c tel que $\Delta(T_c) = 0$, solution de (27-4).

. Pour $\Delta = 0$, $\beta = \beta_c$, (27-4) donne $\delta = \left(\varepsilon'^2 + \Delta^2\right)^{1/2} = |\varepsilon'|$

$$\frac{1}{V_0 g} = \int_0^{E_D} \frac{1}{\delta_p} \tanh\left(\frac{\beta}{2}\delta_p\right) d\varepsilon'$$

$$= \int_0^{E_D} \frac{1}{\varepsilon'} \tanh\left(\frac{\beta_c}{2}\varepsilon'\right) d\varepsilon'$$

on pose $x = \frac{\beta_c}{2}\varepsilon'$

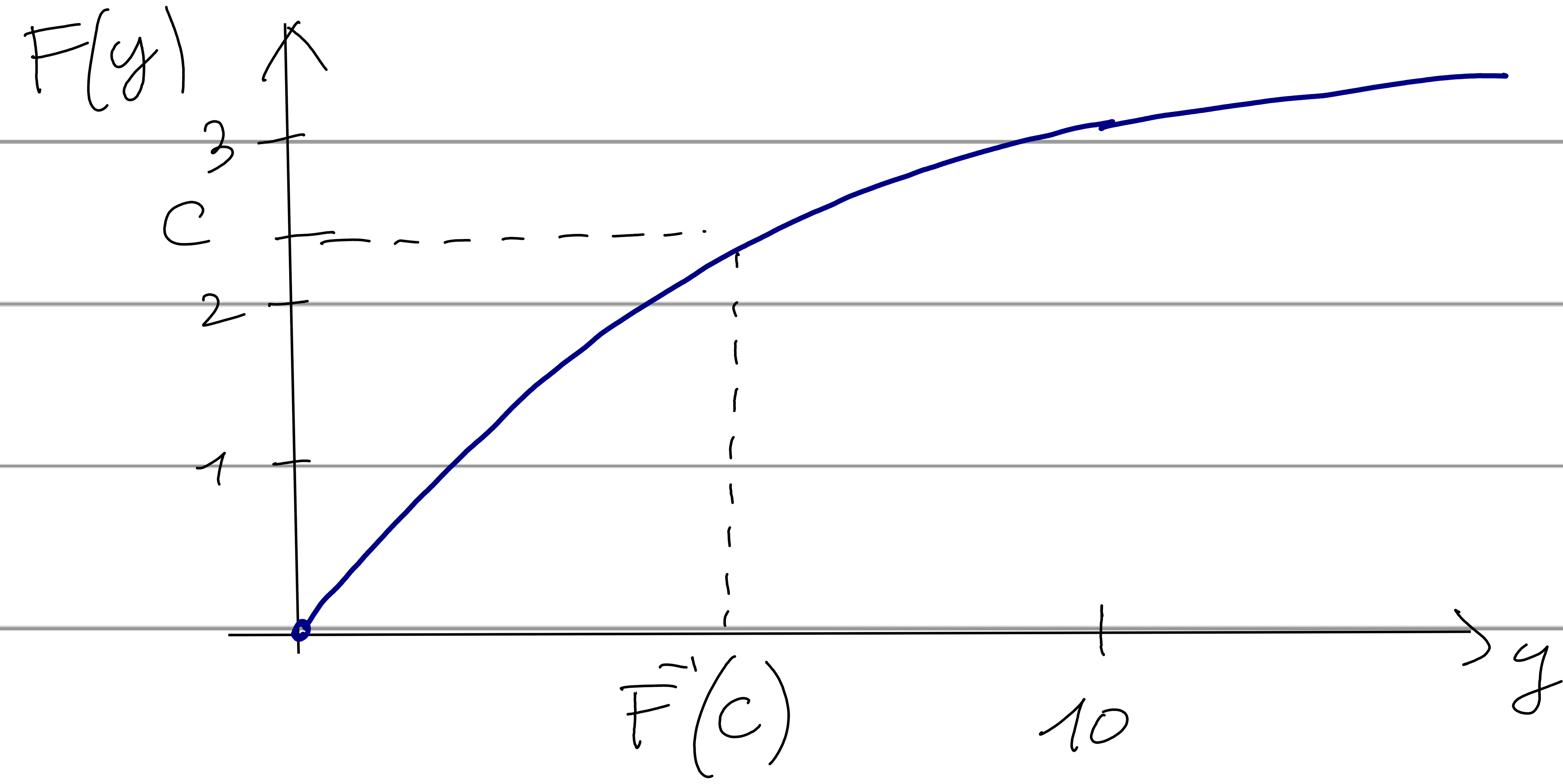
$$1 \qquad = \int_0^{\frac{\beta_c E_D}{2}} \frac{1}{x} \tanh(x)\, dx$$

Voici l'allure de la fonction $F : y \mapsto \int_0^y \frac{1}{x} \tanh(x)\, dx$ obtenue avec le logiciel gratuit en ligne

<u>xcasfr.html</u> et les commandes

F := int(tanh(x)/x , x=0..y)

plot(F, y=0..10)

1 

2 On admet que pour $C \gg 1$, $\quad F^{-1}(C) \simeq \frac{\pi}{4e^{\gamma}} e^{C}$

3 Donc (30-1) $\iff \quad \frac{1}{V_0 g} = F\left(\frac{\beta_c E_D}{2}\right)$

4 et si $\frac{1}{V_0 g} \gg 1$ $\quad$ ($\iff$ si $\Delta \ll E_D$ d'après (28-6))
alors

5 $$\frac{\beta_c E_D}{2} = F^{-1}\left(\frac{1}{V_0 g}\right) \underset{(31-2)}{\simeq} \frac{\pi}{4e^{\gamma}} e^{\frac{1}{V_0 g}}$$

6 $$\iff \boxed{k T_c \simeq \frac{2e^{\gamma}}{\pi} E_D \, e^{-\frac{1}{V_0 g}}}$$

⑦ Dans ces derniers résultats, on ne connaît pas les paramètres E_D, V_0, g du modèle, mais il est remarquable que l'on déduit le rapport universel :

gap spectral

$$\frac{2\,\Delta(0)}{k\,T_c} \underset{\substack{(31\text{-}6)\\(28\text{-}6)}}{=} \frac{4\,E_D\, e^{-\frac{1}{V_0 g}}}{E_D\,\frac{2e^{\gamma}}{\pi}\,e^{-\frac{1}{V_0 g}}} = \frac{2\pi}{e^{\gamma}} \simeq 3.53$$

t° critique

conforme aux expériences.