Nombre de photons par mètre cubes et "photons fossiles"

① <u>Rappels</u>: pour établir la <u>loi de Planck</u>,

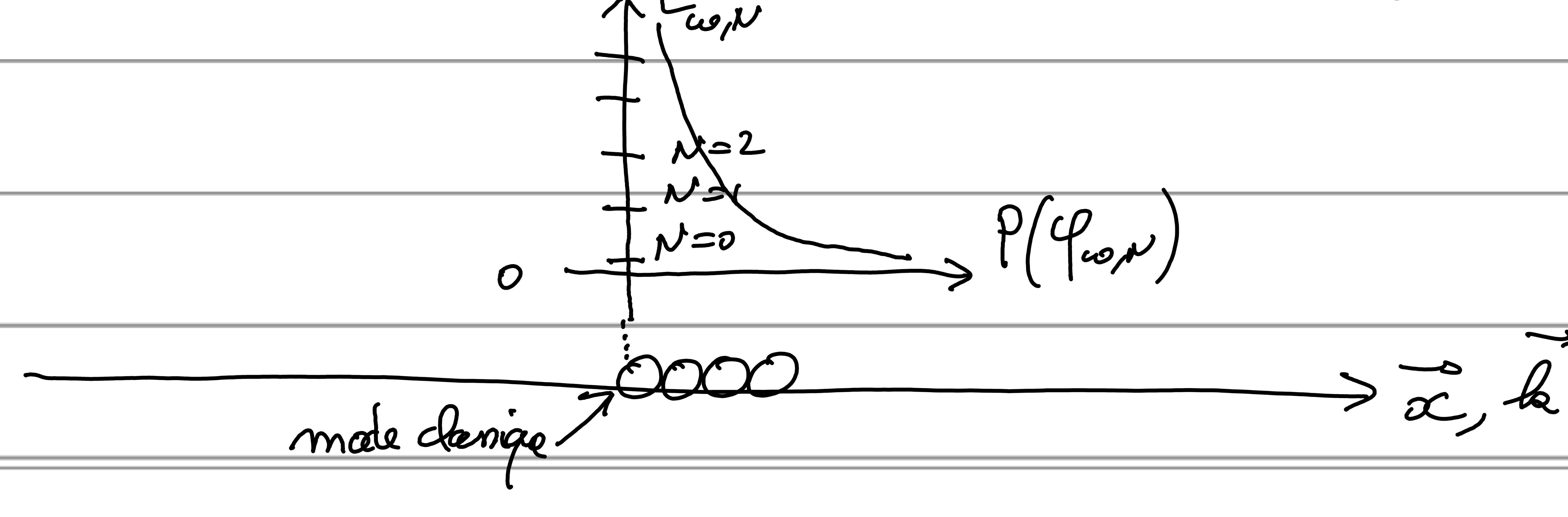
1) on considère les <u>modes classiques</u> du champs électromagnétique : $\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$
avec $\omega = c\|\vec{k}\| \in \mathbb{R}$, $\vec{k} \in \mathbb{R}^3$

2) Dans l'espace des phase $(\vec{x}, \vec{k})$
chaque élément de volume $\frac{1}{(2\pi)^3} d^3\vec{x}\, d^3\vec{k}$
correspond à <u>un mode</u>, d'après la loi de Weyl,

3) Pour chaque classique est associé une base o.n. d'<u>états quantiques</u> $\varphi_{\omega,N}$ avec $N \in \mathbb{N}$ "nombre de photons",
d'énergie $E_{\omega,N} = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$

4) D'après la loi de Boltzmann, à l'équilibre thermique avec température T, l'état $\varphi_{\omega,N}$ apparait avec la probabilité $P(\varphi_{\omega,N}) = \frac{1}{Z_\omega} e^{-\frac{E_{\omega,N}}{kT}}$

<u>schéma</u>:



Pendant l'expansion de l'univers, cette distribution a été préservée. Le seul changement est l'étirement de l'espace par un facteur $f > 0$,
qui a changé la longueur d'onde de chaque mode :

$$\lambda \longmapsto \lambda f = \lambda' \qquad \text{or } \|\vec{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}, \ \omega = c\|\vec{k}\|$$

donc $\|\vec{k}\| \longmapsto \frac{1}{f}\|\vec{k}\|$

$$\omega \longrightarrow \omega' = \frac{1}{f}\omega$$

D'après la formule de Planck,
le changement $\omega = f\omega'$ donne

$$v_T(\omega)\,d\omega = \frac{\hbar\omega^3\,d\omega}{\pi^2 c^3\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1\right)} = f^4\,\frac{\hbar\omega'^3\,d\omega'}{\pi^2 c^3\left(e^{\frac{\hbar f\omega'}{kT}}-1\right)}$$

$$e^{-\frac{\hbar\omega'}{kT'}}, \ T' = \frac{T}{f}$$

$$= f^4\, v_{T'}(\omega')\,d\omega'$$

même formule de Planck

avec $T' = \frac{T}{f} \iff \boxed{f = \frac{T}{T'} = \frac{3000}{2,7} = 1111}$

(2) On rappelle que pour un mode donné, l'énergie de N photons est

$$E_N - E_0 = N \hbar\omega$$

$$\Longleftrightarrow \quad N = \frac{1}{\hbar\omega}\left(E_N - E_0\right)$$

On déduit donc la densité de photons par unité de volume à partir de la densité d'énergie de Planck :

$$n(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\hbar\omega}\, u_T(\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{\omega^2\, d\omega}{\pi^2 c^3\left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right)}$$

Le nombre de photons par mètre cube est donc :

$$n = \int_0^\infty n(\omega)\,d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^2\, d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad \text{posons } x = \frac{\hbar\omega}{kT}$$

$$= \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \frac{1}{\pi^2 c^3}\left(\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{e^x - 1}\right) \to I = 2{,}40$$

$$= \frac{I k^3}{\hbar^3 \pi^2 c^3}\, T^3 = \frac{2{,}40 \cdot \left(1{,}38 \cdot 10^{-23}\right)^3}{\left(6{,}62 \cdot 10^{-34}\right)^3 \pi^2 \left(3 \cdot 10^8\right)^3}\, T^3 \quad K^{-3} m^{-3}$$

$$= 8 \cdot 10^4\, T^3 \; K^{-3} m^{-3}.$$

Si $T = 2,7$ K , cela donne

$$n = 8 \cdot 10^4 \, (2,7)^3 \, m^{-3} = 1,6 \cdot 10^6 \, m^{-3}$$

$= 1,6$ photons/cm^3