Loi de Planck

(1) L'*équation d'onde* du champ électromagnétique (onde classique)

est $\partial_t^2 \vec{E} - c^2 \Delta \vec{E} = 0$,

$$\Delta \vec{E} = \partial_{x_1}^2 \vec{E} + \partial_{x_2}^2 \vec{E} + \partial_{x_3}^2 \vec{E}$$

Si *onde plane* $\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 \, e^{i(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{x})}$

cela donne $-\omega^2 + c^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = 0$

$\iff |\omega| = c\,|\vec{k}|$: "relation de dispersion"

Cela donne en fait la fonction *Hamiltonien* ou *énergie* : $\boxed{\omega(\vec{x}, \vec{k}) = c\,|\vec{k}|}$

sur l'*espace des phase* $(\vec{x}, \vec{k}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

(2) D'après la quantification du champ électromagnétique, un mode précédent de fréquence ω (ex : une onde plane polarisée)

est en fait décrit par des états quantiques $\varphi_{\omega,N}$, où $N \in \mathbb{N}$ est le nombre de photons.

L'énergie de l'état $\varphi_{\omega,N}$ est $E_{\omega,N} = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$

ainsi ajouter un photon, augmente l'énergie de $\hbar\omega = h\nu$

- Le nombre $N \geqslant 0$ est arbitraire et caractérise l'état.

C'est la définition même des Bosons.

(3) D'après la loi de Boltzmann,

l'état $\varphi_{\omega,N}$ apparaît avec la probabilité

$$P(\varphi_{\omega,N}) = \frac{1}{Z_\omega} e^{-\frac{E_{\omega,N}}{kT}},$$ pour un mode ω fixé.

L'énergie totale moyenne du gaz de photons est

car 2 états de polarisation — somme sur les modes — somme sur les niveaux (photons) — énergie — probabilité

$$\boxed{\langle E \rangle = 2 \times \int \frac{d\vec{x}\, d\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{N \geq 0} E_{\omega,N}\, P(\varphi_{\omega,N})}$$

avec $\omega = c k$ avec $k = \|\vec{k}\|$,

$$= 2 \int \frac{d\vec{x}\, d\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{N \geq 0} \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{e^{-\frac{\hbar\omega(N+\frac{1}{2})}{kT}}}{Z_\omega}$$

or $\int d^3\vec{x} = V$, $\quad d\vec{k} = k^2\, dk\, (d\Omega)$: coord. sphériques

↑ angle solide

$$= \frac{\omega^2\, d\omega\, d\Omega}{c^3}$$

et $\int d\Omega = 4\pi$

$$d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

donc

$$\langle E \rangle = \frac{2V(4\pi)\hbar}{(2\pi)^3 c^3} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^3}{Z_\omega} \sum_{N\geq 0} \left(N+\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}\left(N+\frac{1}{2}\right)}$$

<u>Calcul de Z_ω :</u>

$$\sum_{N\geq 0} P(\varphi_{\omega,N}) = 1$$

$$\Longleftrightarrow Z_\omega = \sum_{N\geq 0} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}\left(N+\frac{1}{2}\right)}$$

On a besoin de calculer des <u>séries géométriques :</u>

Soit $S(\alpha) := \sum_{N\geq 0} e^{-\alpha\left(N+\frac{1}{2}\right)}$, $\alpha > 0$

$$= e^{-\frac{\alpha}{2}} \sum_{N\geq 0} e^{-\alpha N}$$: série géométrique

$$= \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}}}{1-e^{-\alpha}} = \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{2}}-e^{-\alpha/2}} = \frac{1}{2\sinh\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} = -\sum_{N\geq 0}\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{-\alpha\left(N+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{-\sinh'\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cdot 2\sinh^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{-\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Ainsi avec $\alpha = \frac{\hbar\omega}{k T}$, $\iff \omega = \frac{k T \alpha}{\hbar}$

$$Z_\omega = S(\alpha) = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\langle E \rangle = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\omega^3}{Z_\omega}\sum_{N\geq 0}\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}\left(N+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty d\omega\,\omega^3\,\frac{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4\,\mathrm{sh}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= V\int_0^\infty u_T(\omega)\,d\omega$$

avec la densité d'énergie par unité de volume à t° T :

$$u_T(\omega)\,d\omega = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3}\,\omega^3 \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) d\omega$$

Pour $\coth(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$,

donc $u_0(\omega)\,d\omega = \dfrac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3}\,d\omega$: densité d'énergie du "vide"

or $\coth(x) - 1 = \dfrac{\cancel{e^{x}} + e^{-x} - \cancel{e^{x}} + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$= \frac{2}{e^{2x}-1}$$

donc

$$\boxed{\begin{aligned} v_T(\omega)\,d\omega &= \left(u_T(\omega) - u_0(\omega)\right) d\omega \\ &= \frac{\hbar\omega^3\,d\omega}{\pi^2c^3\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}-1\right)} \quad \text{: Loi de Planck} \end{aligned}}$$

④ Dans le visible, $\omega \in [\omega_{Red}, \omega_{Blue}]$,

$$\omega_R = \frac{c\,2\pi}{\lambda_R} = 2{,}3 \cdot 10^{15}\,Hz$$

$$\omega_B = \frac{c\,2\pi}{\lambda_B} = 4{,}7 \cdot 10^{15}\,Hz$$

l'énergie volumique du vide est

$$\langle E_{T=0} \rangle = \int_{\omega_{Red}}^{\omega_{Blue}} u_0(\omega)\,d\omega = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3}\left[\boxed{\frac{\omega^4}{4}}\right]_{\omega_R}^{\omega_B}$$

$$= \frac{\hbar}{8\pi^2 c^3}\left(\omega_B^4 - \omega_R^4\right), \quad \text{avec } \omega = \frac{c\,2\pi}{\lambda}$$

$$= \frac{6.62 \cdot 10^{-34}\,(3 \cdot 10^8)\,(2\pi)^4}{2\pi \cdot 8\pi^2}\left(\left(0.4 \cdot 10^{-6}\right)^{-4} - \left(0.8 \cdot 10^{-6}\right)^{-4}\right)$$

$$= 22 \quad J/m^3$$