Etude des naines blanches

(1) $$M \approx \frac{N}{2} \cdot m_{He}$$

nombre de noyaux d'hélium

$$\Longleftrightarrow \quad N = \frac{2 M_S}{m_{He}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{6{,}64 \cdot 10^{-27}} = 6{,}02 \cdot 10^{56}$$

$$m_{He} = \frac{4\ g}{N_A} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{6.02 \cdot 10^{23}}\ kg = 6{,}64 \cdot 10^{-27}\ kg$$

(2) D'après le problème 1, on a obtenu

$$N = \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3 = \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} \left(m_e c\, \alpha_F\right)^3$$

or $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, avec R : rayon de l'étoile.

donc $$N = \frac{4 \pi R^3 m_e^3 c^3 \alpha_F^3}{3 \cdot 3\pi^2 \hbar^3}$$

$$\Longleftrightarrow \quad R = \left(\frac{9 \pi \hbar^3 N}{4 m_e^3 c^3 \alpha_F^3}\right)^{1/3}$$

or $N = \dfrac{2M}{m_{He}}$

donc

1 $$R = \left(\frac{9\pi\hbar^3 \quad M}{m_{He} 2 \, m_e^3 c^3 \alpha_F^3}\right)^{1/3} = \left(\frac{9\pi M}{m_{He} 2}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{m_e c \alpha_F}$$

3 $$E_g = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}$$

$$= -\frac{3}{5} G M^2 \left(\frac{m_{He} 2}{9\pi M}\right)^{1/3} \frac{m_e c \alpha_F}{\hbar}$$

$$= -C_1 \quad \alpha_F$$

4,05 $\quad 10^{42}$?

avec $$\boxed{C_1 = \frac{3 \, 2^{1/3} G M^2 \, m_{He}^{1/3} m_e c^2}{5 \, 9^{1/3} \pi^{1/3} M^{1/3} \, \hbar c} = \cancel{2,54} \cdot 10^{43} \; J}$$

$$U = m_e c^2 \, 3 \, N \quad H(\alpha_F)$$

$$= \frac{m_e c^2 3 . 2M}{m_{He}} \; H(\alpha_F) = C_2 \; H(\alpha_F)$$

avec $$\boxed{C_2 = \frac{m_e 6 c^2 M}{m_{He}} = 1,48 . 10^{44} \; J}$$

(4) $E(\alpha_F) = -C_1 \alpha_F + C_2 H(\alpha_F)$ minimum

$$\Longleftrightarrow \frac{dE}{d\alpha_F} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -C_1 + C_2 H'(\alpha_F) = 0$$

$$\Longleftrightarrow H'(\alpha_F) = \frac{C_1}{C_2} = 0{,}17$$

(5) Le graphe de $H'(\alpha_F) = 0,17$

donne $\alpha_F \simeq 1.3$

donc $R \underset{(2\text{-}1)}{=} \left(\dfrac{9\pi M}{m_{He}\, 2}\right)^{1/3} \dfrac{\hbar}{m_e\, c\, \alpha_F} = 4840 \text{ km}$

(6) $\alpha_F \simeq 1.3 \neq 0$ donc l'approximation non relativiste n'aurait pas été valable.

On a l'énergie de Fermi d'après (1-3)

$$\mu_0 = mc^2 \left(1 + \alpha_F^2\right)^{1/2} - \underbrace{mc^2}_{\text{énergie au repos}} = mc^2 \left[\left(1+\alpha_F^2\right)^{1/2} - 1\right]$$

énergie au repos que l'on soustrait car ensuite on va comparer μ_0 à $k_B T$.

$$= 5 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

donc $\dfrac{k_B T}{\mu_0} = 2 \cdot 10^{-3} \ll 1$: l'hypothèse $T \simeq 0$ K est valable

7 On a $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{2^{1/3}\cdot 3\, G M^2 m_{He}^{1/3} m_e C\, m_{He}}{5\cdot 9^{1/3} \pi M^{1/3} \hbar\, m_e 6 c^2 M}$

$$= \left(\frac{G\, m_{He}^{4/3} \cdot 2^{1/3}}{2\cdot 5\, 9^{1/3} \pi c \hbar}\right) \cdot M^{2/3}$$

Pour trouver un équilibre, il faut résoudre :

$$H'(\alpha_F) = \frac{C_1}{C_2} < \frac{1}{4}$$: valeur maximale de $H'(x)$

$$\iff M < \left(\frac{2\cdot 5\, 9^{1/3} \pi c \hbar}{4\, G\, m_{He}^{4/3} \cdot 2^{1/3}}\right)^{3/2} = \underbrace{\left(\frac{5\, 9^{1/3}\, 2\pi \hbar c}{4\, G\, m_{He}^{4/3}\, 2^{1/3}\, \pi^{2/3}}\right)^{3/2}}_{M_c}$$

$$\begin{cases} 2\pi\hbar c = 2\cdot 10^{-25}\ \mathrm{J.m} \\ G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}} \\ m_{He} = \dfrac{4\ \mathrm{kg}}{N_A}, \quad N_A = 6{,}02\cdot 10^{23} \end{cases}$$

donne $\boxed{M_c = 3{,}5\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg} \approx 1{,}8 \cdot M_{soleil}}$

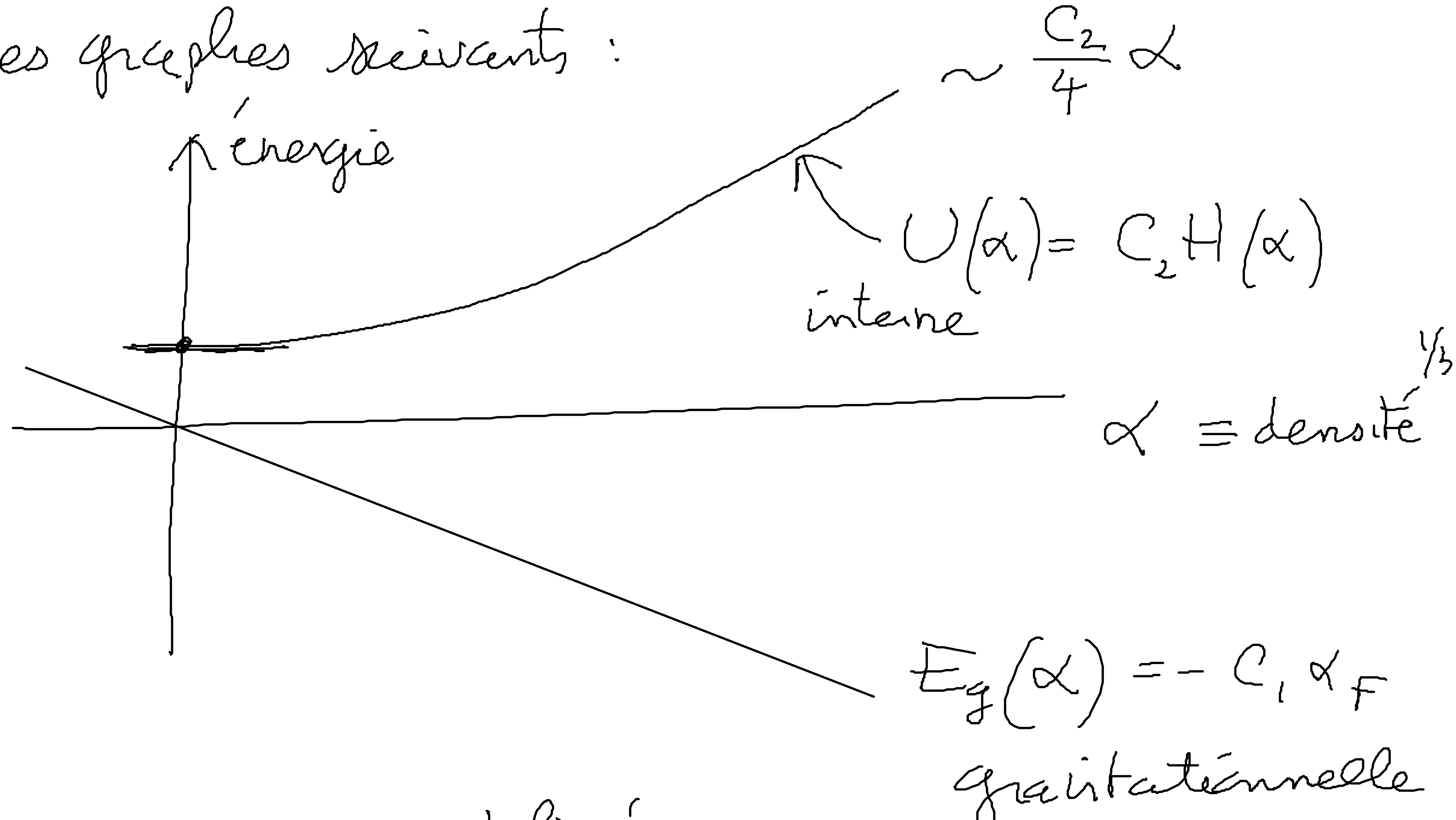
Discussion :

Ainsi l'énergie totale de l'étoile est

$$E(\alpha_F) = E_g + U$$
$$= -C_1 \alpha_F + C_2 H(\alpha_F)$$

$E(\alpha_F)$ dépend de α_F qui est proportionnel à $(\text{densité})^{1/3}$ d'après le problème (1).

. On a les graphes suivants :



Il apparaît que à N fixé,

- l'énergie gravitationnelle E_g décroît si la densité augmente
  on dit que "la force gravitationnelle favorise l'effondrement de l'étoile sur elle même".
- l'énergie cinétique totale U des électrons, augmente avec la densité. C'est parce que les e^- sont des Fermions.

- Si $C_1 < \frac{C_2}{4} \Leftrightarrow M < M_c$, alors l'énergie totale est minimale sera pour une certaine valeur de $\alpha > 0$, donnant le rayon R de stabilité.

- Si $C_1 > \frac{C_2}{4} \Leftrightarrow M > M_c$, $E(\alpha)$ décroît avec α, dont <u>l'étoile va s'effondrer</u> pour minimiser son énergie. L'étoile "naine blanche" n'est pas un modèle stable. Un <u>autre modèle</u> montre qu'il se forme une <u>étoile à neutrons</u> :

via la réaction : $e^- + p^+ \longrightarrow n + \nu_e$
endothermique

$m_p = 938{,}3\ \mathrm{MeV}/c^2$ $\quad m_n = 939{,}5\ \mathrm{MeV}/c^2$

<u>processus élémentaire</u> :

neutrino : ν_e