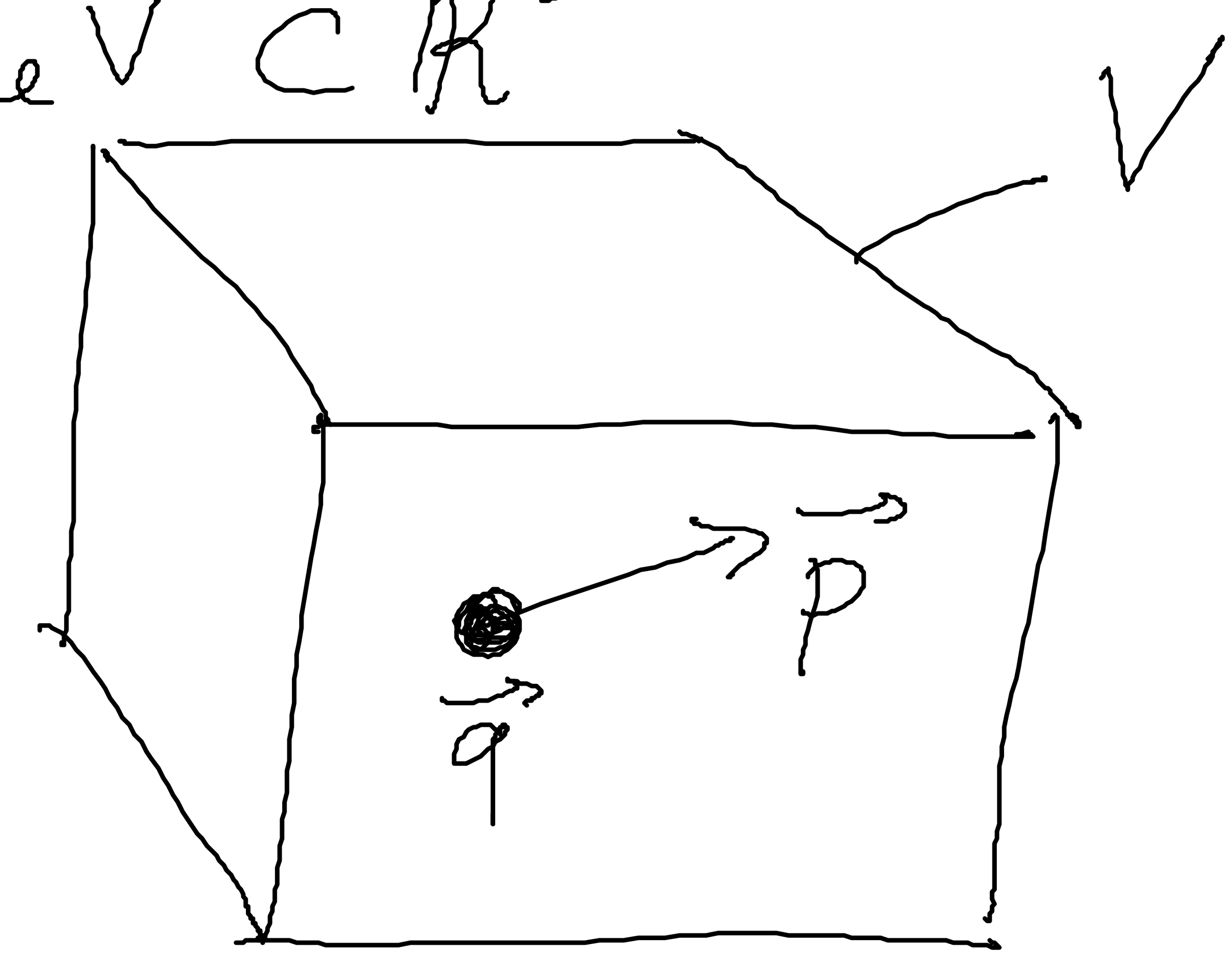
Etude d'un gaz d'électrons relativistes

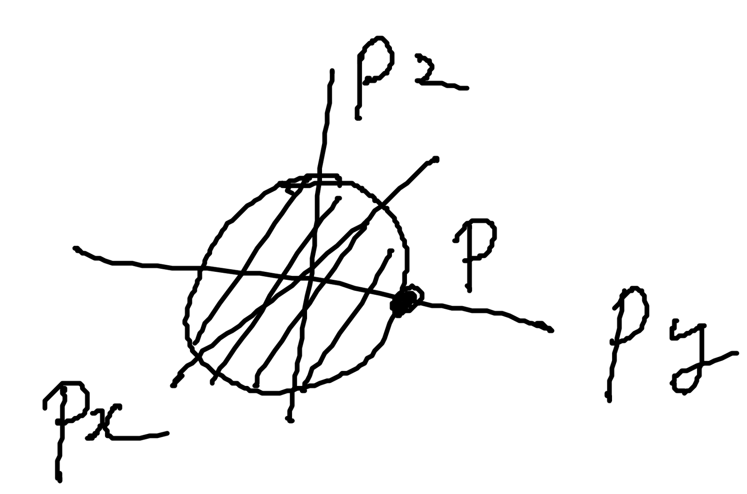
(1) On considère <u>un électron</u> dans un volume V.

En mécanique classique, son <u>état</u> est caractérisé par sa <u>position</u> $\vec{q} \in$ Volume $V \subset \mathbb{R}^3$ et son impulsion $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$



c'est à dire un point $(\vec{q}, \vec{p})$ de l'<u>espace des phases</u>.

Soit $p \geq 0$ donné.



D'après la <u>formule de Weyl</u> (voir TD n°2), le nombre d'<u>états quantiques</u> dans la zone $|\vec{p}| \leq p$ est:

car 2 états de spin

1 $$n(p) = \frac{2 \times \mathrm{Vol}\left((\vec{q}, \vec{p}) \text{ tq } |\vec{p}| \leq p \right)}{(2\pi\hbar)^3}$$

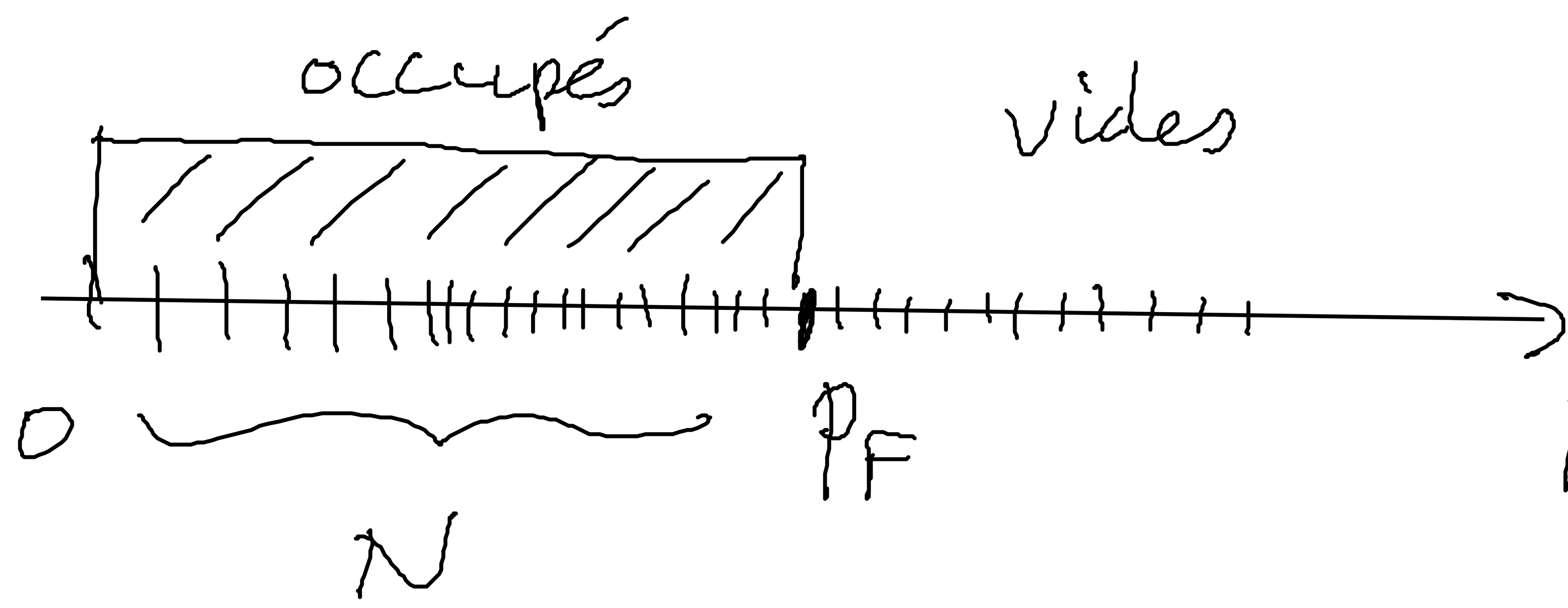
volume sphère

$$n(p) = 2\frac{V.\left(\frac{4}{3}\pi p^3\right)}{(2\pi\hbar)^3} = a p^3 \quad \text{avec } a = \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3}$$

2

(2) D'après la distribution de Fermi-Dirac, (TD8

À $T = 0K$, les N électrons occupent les N états à 1 particules d'énergie les plus basses.



),

donc on a $N = n(p_F)$: nombre d'électrons

$\uparrow$ fonction de la question (1)

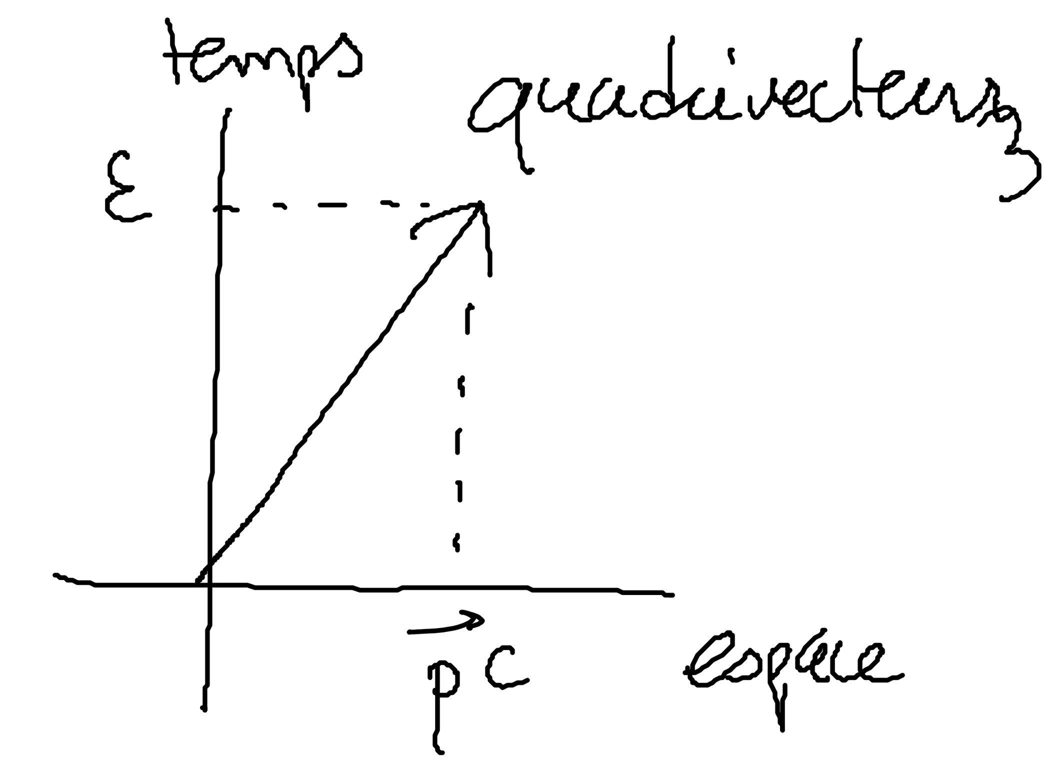
$$\underset{(1\text{-}2)}{=} \frac{V}{3\pi^2 \hbar^3} p_F^3$$

$$\Longleftrightarrow \quad V = \frac{3\pi^2 N \hbar^3}{p_F^3} = \frac{3\pi^2 N \hbar^3}{m_e^3 c^3 \alpha_F^3}$$

1

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_F^3 = \left(\frac{3\pi^2 \hbar^3}{m_e^3 c^3}\right)\left(\frac{N}{V}\right)$$

$\uparrow$ densité



énergie — norme de l'impulsion $p = \|\vec{p}\|$

③ $$\mathcal{E}^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{E} = \left((mc^2)^2 + (pc)^2\right)^{1/2}$$

1 $$= mc^2\left(1 + \frac{(pc)^2}{(mc^2)^2}\right)^{1/2} = mc^2\left(1+\alpha^2\right)^{1/2}$$

avec $\alpha = \frac{pc}{mc^2} \Longleftrightarrow p = mc\,\alpha$

- Rappel : si $\alpha \ll 1$ $p \ll mc$,

alors d'après le développement limité

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

si $x \ll 1$,

on a

$$\mathcal{E} \simeq mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 + \cdots\right)$$

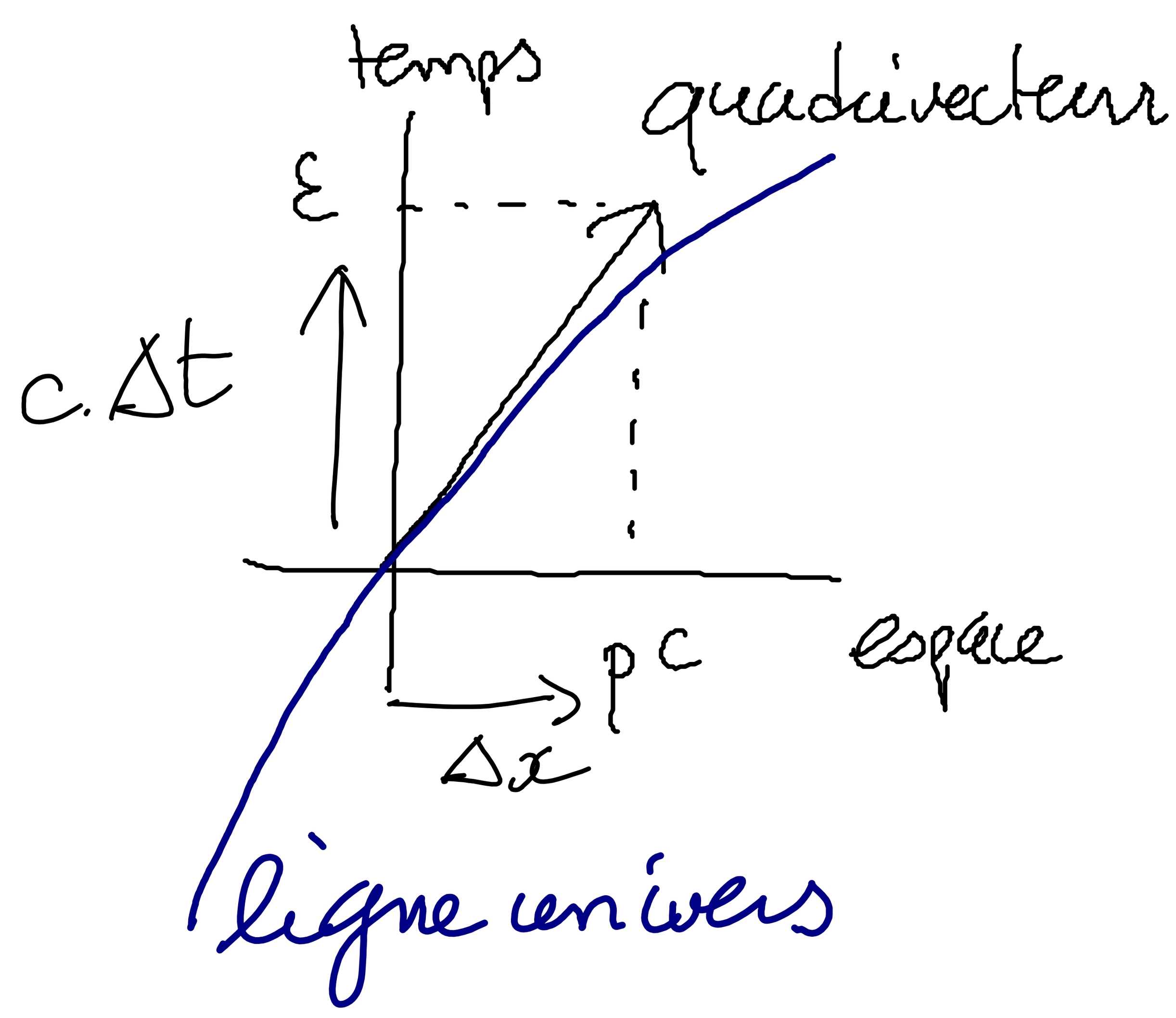
$$= mc^2 + \frac{1}{2}mc^2\frac{p^2}{m^2c^2} + \cdots = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \cdots$$

énergie relativiste

énergie relativiste au repos

énergie cinétique de Newton

Propriété ⊠ : le "quadrivecteur impulsion" est tangent à la ligne d'univers de la particule, (démontré ci dessous).



vitesse ≡ pente du quadrivecteur

on a $\dfrac{v}{c} = \dfrac{\Delta x}{c\Delta t} = \dfrac{pc}{\mathcal{E}} = \dfrac{mc^2\alpha}{mc^2(1+\alpha^2)^{1/2}} = \dfrac{\alpha}{(1+\alpha^2)^{1/2}}$

- Le facteur de Lorentz est

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \geqslant 1$$

donc $\gamma = \left(1 - \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^{-1/2} = (1+\alpha^2)^{1/2}$

l'approximation non relativiste est valable si $\gamma \simeq 1$,

$\iff \quad \alpha \ll 1$.

- preuve de la propriété ~~⊠~~ ci-dessus : $\boxed{\vec{v} = \frac{c^2}{\mathcal{E}}\vec{p}}$

rappelons que la "relation de dispersion" ci-dessus :

$$\mathcal{E}^2 - (p\,c)^2 = (m\,c^2)^2$$

s'obtient comme conséquence de l'équation ondulatoire de Klein-Gordon :

$$(KG) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{c^2 \partial t^2} - \sum_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\psi$$

(qui est une version relativiste de l'équation de Schrödinger)

et en remplaçant $\psi(\vec{x},t) = e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$ dans (KG)

on obtient la relation de dispersion :

$$(RD) \qquad -\frac{\omega^2}{c^2} + \|\vec{k}\|^2 = -m^2 c^2$$

et en posant : $\mathcal{E} := \hbar\omega$, $\vec{p} := \hbar\vec{k}$ (changement d'échelle)

on obtient l'équation $\mathcal{E}^2 - (\|p\|c)^2 = (mc^2)^2$ ci-dessus.

- La relation de dispersion permet d'obtenir la trajectoire des paquets d'ondes (ou particules) d'après les équ. de Hamilton :

$$\left.\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k_j} \\ \frac{d\vec{k}}{dt} &= -\frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned}\right\}$$

où on considère la fonction $\omega(\vec{x},\vec{k})$ donnée par (RD), ici indépendante de $\vec{x}$.

• Dans ce cas présent (RD) donne (en différensiant) :

$$-\frac{\omega\, d\omega}{c^2} + \sum_j k_j\, dk_j = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad d\omega = \sum_j \frac{c^2 k_j}{\omega}\, dk_j$$

donc

$$(\vec{v})_j = \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)_j = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_j}\right)_j = \frac{c^2 k_j}{\omega}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{v} = \frac{c^2}{\omega}\vec{k} = \frac{c^2}{\mathcal{E}}\vec{p} \qquad \blacksquare$$

Rem : en mécanique <u>non relativiste</u>, à la place de l'équ. (KG) on a l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2 \Delta}{2m}\psi$$

qui donne la (RD) : $H = E = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m}$

et les équ. de Hamilton donnent :

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)_j = \frac{\vec{p}}{m}$$

c'est bien identique à la formule cidessus, avec l'approx : $\mathcal{E} \simeq mc^2 \Rightarrow \vec{v} = \frac{c^2}{\mathcal{E}}\vec{p} \simeq \frac{\vec{p}}{m}$

(4) $$U = \int_0^N \varepsilon \, dn = \int_0^{\alpha_F} \varepsilon \left(\frac{dn}{dp}\right)\left(\frac{dp}{d\alpha}\right) d\alpha$$

$$\underset{(1-2)}{\overset{}{\underset{(3-1)}{=}}} \int_0^{\alpha_F} mc^2 (1+\alpha^2)^{1/2} (3ap^2)(mc)\, d\alpha$$

$$= mc^2 \left(\frac{3V}{3\pi^2 \hbar^3}\right)(mc)^3 \int_0^{\alpha_F} (1+\alpha^2)^{1/2} \alpha^2 \, d\alpha$$

$$U = \frac{m^4 c^5 V}{\pi^2 \hbar^3} \left(\int_0^{\alpha_F} \text{''}\right)$$

$$\underset{(2-1)}{=} \frac{m^4 c^5 \, 3\pi^2 N \hbar^3}{\pi^2 \hbar^3 \quad m^3 c^3 \quad \alpha_F^3} \left(\int_0^{\alpha_F} \text{''}\right)$$

$$= mc^2 \, 3N \quad H(\alpha_F)$$