Definition des Fermions et Bosons

Ensemble Canonique

Etat : $m = (N_0, N_1, N_2, \dots)$

avec N_n : nombre de particules dans l'état φ_n

$$N = \sum_{n \geq 0} N_n \quad \text{fixé}$$

- Si Fermions, alors $0 \leq N_n \leq 1$.
- Si Bosons alors $N_n \geq 0$ est quelconque.

① **Loi de Boltzmann** $P(m) = \frac{1}{Z_N} e^{-\beta E(m)}$

on a $1 = \sum_m P(m)$

$$\Longleftrightarrow Z_N = \sum_m e^{-\beta E(m)}$$

donc $\partial_\beta Z_N = \sum_m -E(m)\, e^{-\beta E(m)}$

Energie moyenne :

$$\langle E \rangle = \sum_n P(n) E(n)$$

$$= \frac{1}{Z_N} \sum_n E(n) e^{-\beta E(n)}$$

$$= -\frac{1}{Z_N} \partial_\beta Z_N = -\partial_\beta \ln Z_N$$

(2) Entropie

$$S = -k \sum_n P(n) \ln P(n)$$

$$= -k \sum_n P(n) \ln\left(\frac{1}{Z_N} e^{-\beta E(n)}\right)$$

$$= -k \sum_n P(n) \left(-\beta E(n) - \ln Z_N\right)$$

$$= \beta k \underbrace{\left(\sum_n P(n) E(n)\right)}_{\langle E \rangle} + k \ln Z_N \underbrace{\left(\sum_n P(n)\right)}_{1}$$

$$= \frac{1}{T} \langle E \rangle + k \ln Z_N$$

Ensemble grand canonique

① $$P(m) = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta(E(m) - \mu N(m))}$$

$$1 = \sum_m P(m)$$

$$\Leftrightarrow \quad \Xi = \sum_m e^{-\beta(E(m) - \mu N(m))}$$

$$= \sum_N \sum_{\substack{m \text{ tq} \\ N(m)=N}} e^{-\beta E(m)} e^{\beta \mu N}$$

$$= \sum_N e^{N\beta\mu} Z_N$$

②

$$\partial_\beta \Xi = \sum_m -(E(m) - \mu N(m)) e^{-\beta(E(m) - \mu N(m))}$$

$$\frac{\partial_\beta \Xi}{\Xi} = - \sum_m E(m) \Big(\underbrace{\frac{1}{\Xi} e^{-\beta(E(m) - \mu N(m))}}_{P(m)} \Big)$$

$$+ \mu \sum_m N(m) P(m) = - \langle E \rangle + \mu \langle N \rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle E \rangle = - \partial_\beta \ln \Xi + \mu \langle N \rangle$$

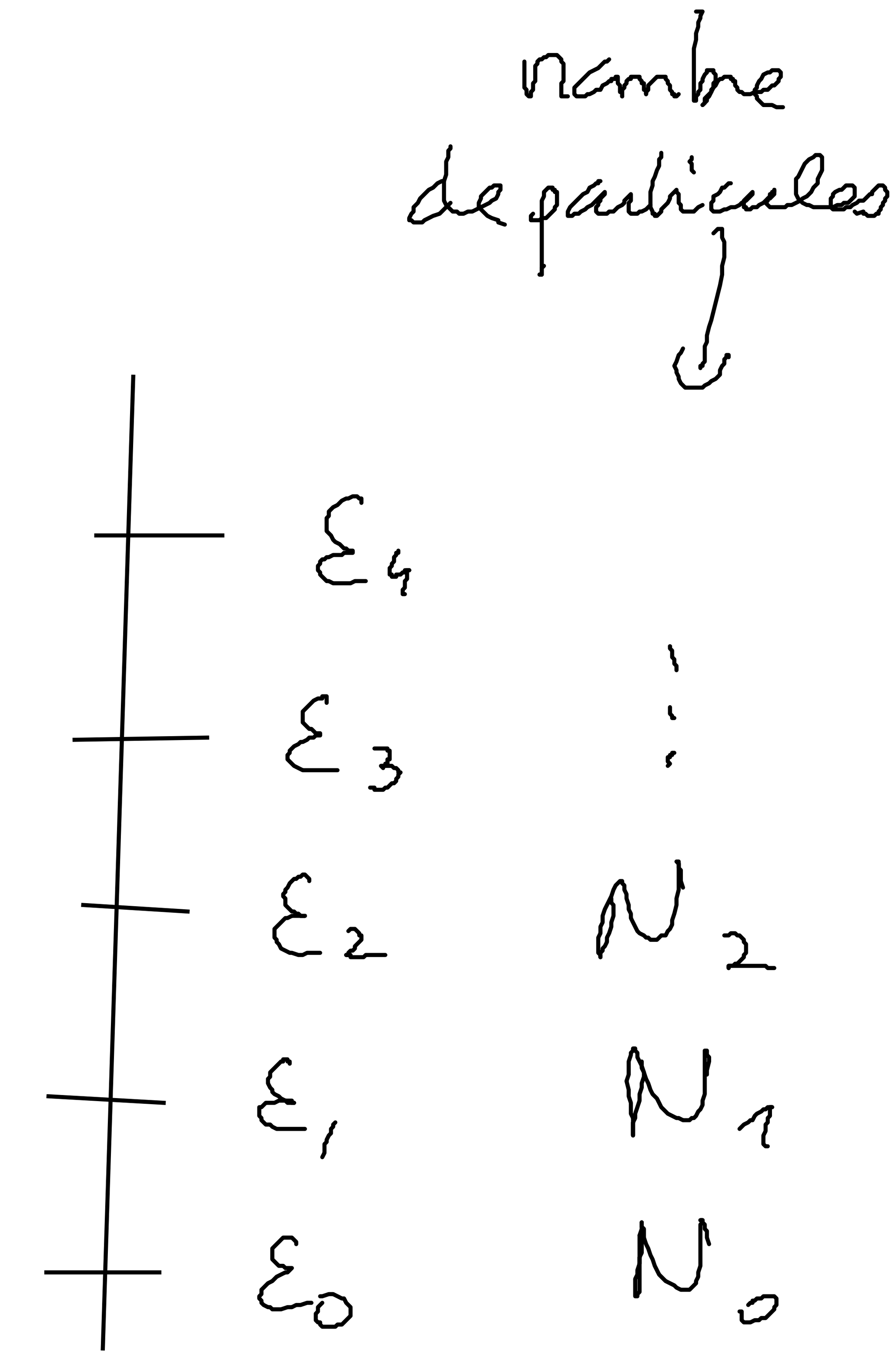
Distribution de Fermi Dirac et Bose Einstein

On suppose les particules indépendantes,

et pour une particule,

$$\hat{H}\varphi_n = \varepsilon_n \varphi_n$$

cad spectre d'énergie :



① Pour un état $m = (N_0, N_1, N_2, \dots)$

on a $E(m) = \sum_{n \geq 0} N_n \varepsilon_n$: énergie totale

nombre total de particules :

$$N = \sum_{n \geq 0} N_n$$

② Mesure de Boltzmann grand canonique

$$P(m) = \frac{1}{\Xi} \exp\left(-\beta\left(E(m) - \mu N(m)\right)\right)$$

$$1 = \sum_m P(m)$$

$$\Leftrightarrow \quad \Xi = \sum_m e^{-\beta(E(m) - \mu N(m))}$$

$$= \sum_{m=(N_0, N_1, \ldots)} e^{-\beta \sum_{n \geq 0} N_n (\varepsilon_n - \mu)}$$

$$= \sum_{N_0} \sum_{N_1} \cdots \sum_{N_n} \cdots \prod_{n \geq 0} e^{-\beta N_n (\varepsilon_n - \mu)}$$

$$= \left(\sum_{N_0} e^{-\beta N_0 (\varepsilon_0 - \mu)}\right) \left(\sum_{N_1} e^{-\beta N_1 (\varepsilon_1 - \mu)}\right) \cdots$$

$$= \prod_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq N_n \, (\leq 1)} e^{-\beta N_n (\varepsilon_n - \mu)} \right)$$ ← si Fermions

$$= \prod_{n \geq 0} \xi_n$$

avec $\xi_n = \sum_{0 \leq N_n (\leq 1)} e^{-\beta N_n (\varepsilon_n - \mu)}$

alors

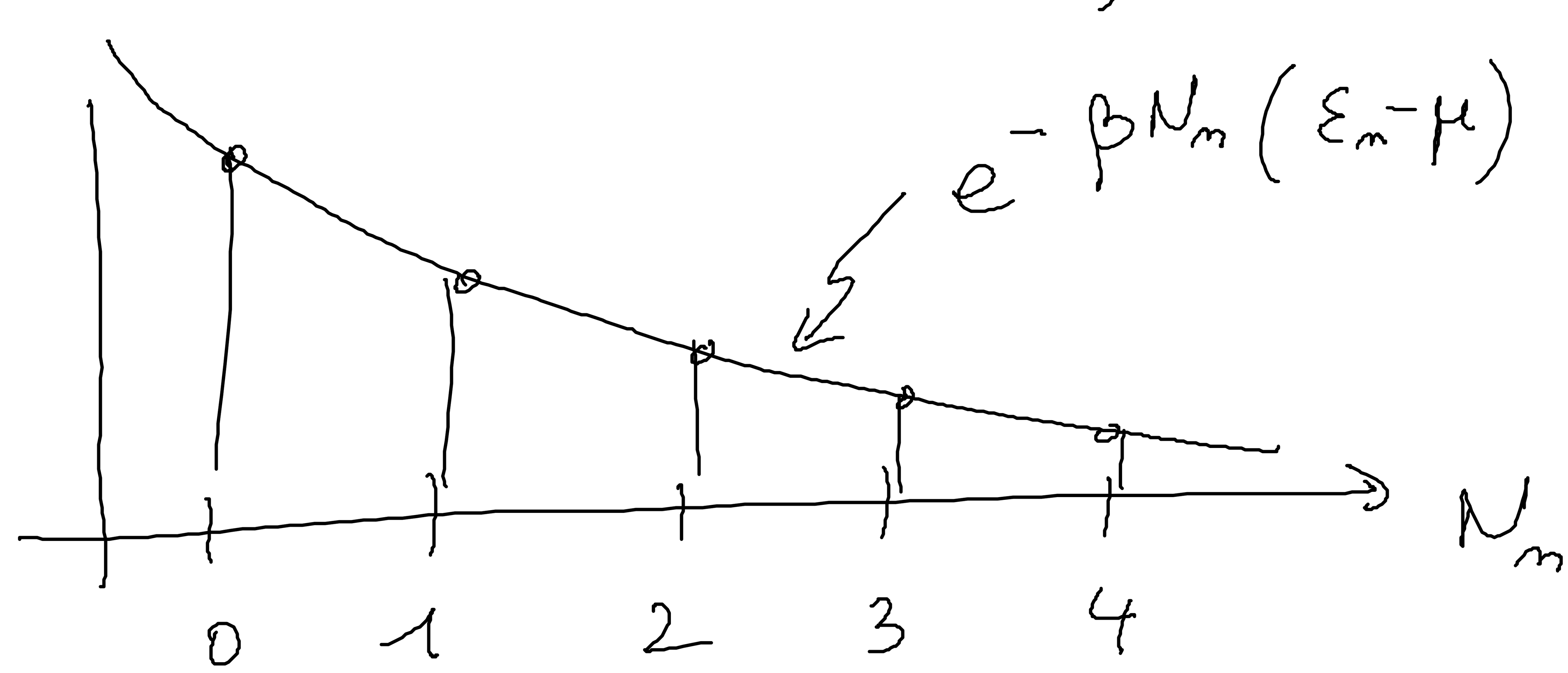
$$P(m) = \prod_{n \geq 0} \frac{1}{\xi_n} e^{-\beta N_n (\varepsilon_n - \mu)}$$

$$= \prod_{n \geq 0} P_n(N_n)$$

③ On a $\beta > 0$.

Dans le cas des bosons, N_n n'est pas borné, et donc il faut que $\varepsilon_n - \mu > 0$, $\forall n$, pour que la distribution $P_n(N_n)$ ait un sens :

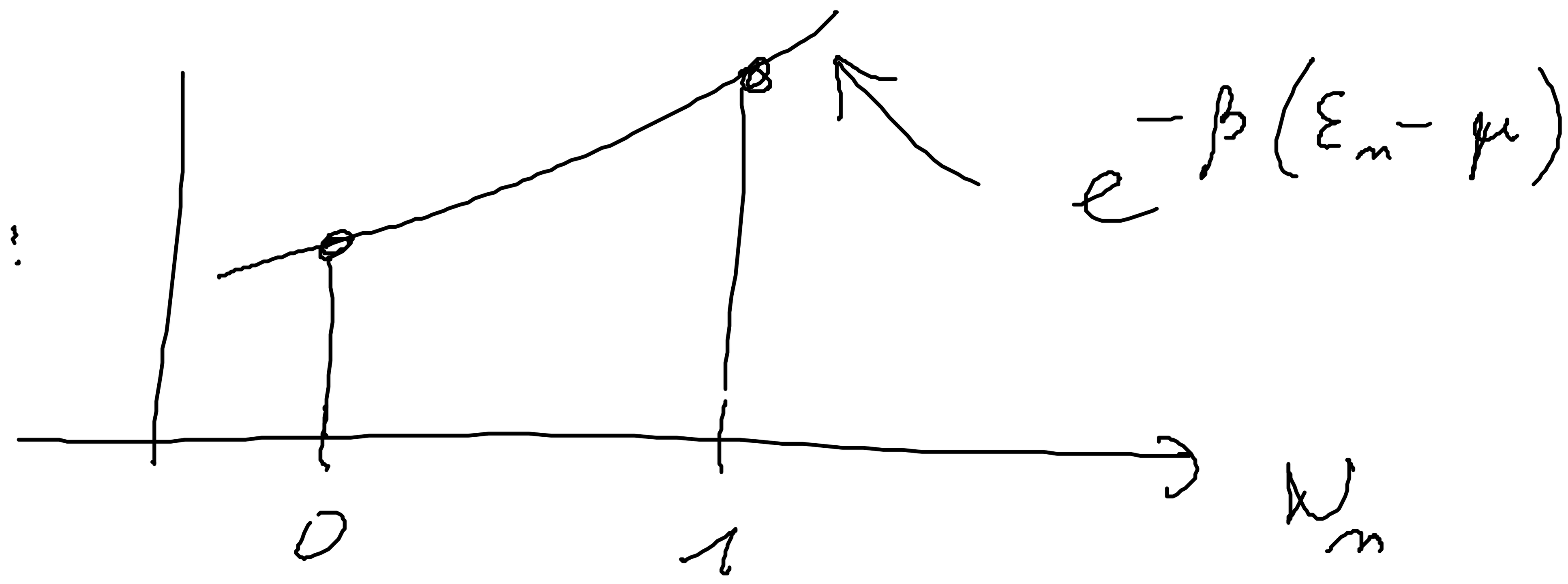
si $\mu < \varepsilon_n$:



Autrement dit si $\varepsilon_0 < \mu$ par exemple, alors le niveau φ_0 attirerait toutes les particules de l'environnement, et cela divergerait. Il n'y a pas d'équilibre possible.

Pour les Fermions, il n'y a pas ce problème, car seulement 2 valeurs possibles $N_n = 0, 1$

si $\mu > \varepsilon_n$:



④ Pour le niveau φ_n fixé,

$$\xi_n = \sum_{N_n} e^{-\beta N_n(\varepsilon_n - \mu)}$$

on a $\partial_\mu \xi_n = \sum_{N_n} \beta N_n e^{-\beta N_n(\varepsilon_n - \mu)}$

donc $\frac{\partial_\mu \xi_n}{\xi_n} = \partial_\mu \ln \xi_n = \beta \sum_{N_n} N_n P(N_n) = \beta \langle N_n \rangle$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle N_n \rangle = \frac{1}{\beta} \partial_\mu \ln \xi_n$$

⑤ Pour des <u>bosons</u>,

$$\xi_n = \sum_{N_n \geq 0} e^{-\beta N_n(\varepsilon_n - \mu)} \quad \text{: série géométrique}$$

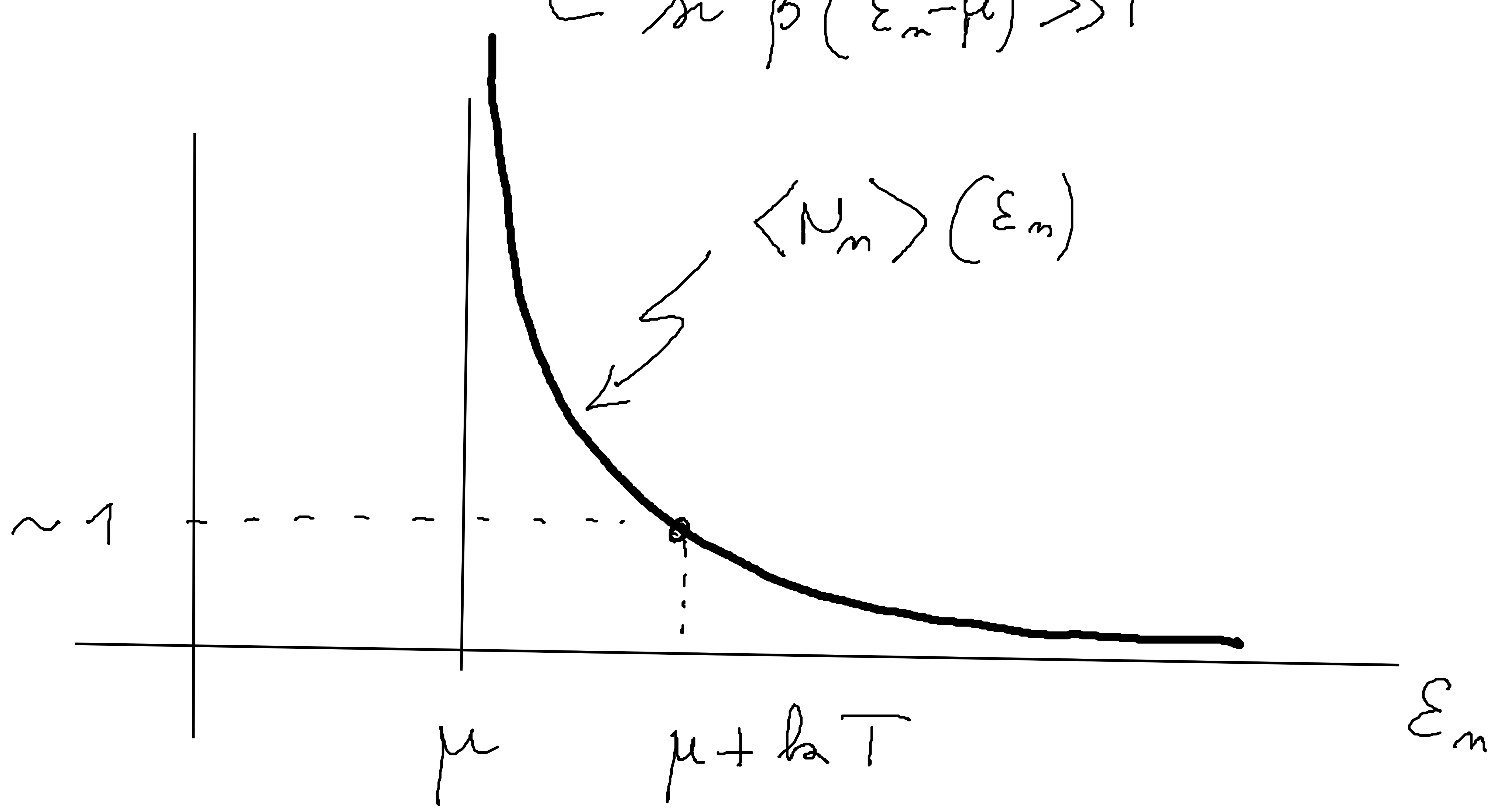
$$= \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu)}}$$

donc $$\partial_\mu \xi_n = \frac{\beta\, e^{-\beta(\varepsilon_n-\mu)}}{\left(1 - e^{-\beta(\varepsilon_n-\mu)}\right)^2}$$

$$\langle N_n \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial_\mu \xi_n}{\xi_n} = \frac{e^{-\beta(\varepsilon_n-\mu)}}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_n-\mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_n-\mu)} - 1}$$

$$\sim e^{-\beta(\varepsilon_n-\mu)}$$

si $\beta(\varepsilon_n - \mu) \gg 1$



⑥ Pour les Fermions, $0 \leq N_n \leq 1$

donc $$\xi_n = \sum_{0 \leq N_n \leq 1} e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu) N_n}$$

$$= 1 + e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu)}$$

$$\partial_\mu \xi_n = \beta e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu)}$$

$$\langle N_n \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial_\mu \xi_n}{\xi_n} = \frac{e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu)}}{1 + e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_n - \mu)} + 1}$$

$$\sim e^{-\beta(\varepsilon_n - \mu)} \quad \text{si} \quad \beta(\varepsilon_n - \mu) \gg 1$$