Statistiques Fermion - Boson pour particules dans puits harmonique

$$\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \geqslant 0.$$

(1) On avait $m = (N_0, N_1, N_2, \dots)$: <u>état</u>

$$E(m) = \sum_n N_n \, \varepsilon_n$$

avec N : nombre fixé de particules,

$$Z_N = \sum_{\text{état } m,\, N \text{ fixé}} e^{-\beta E(m)}$$

$$Z_{N=0} = 1$$

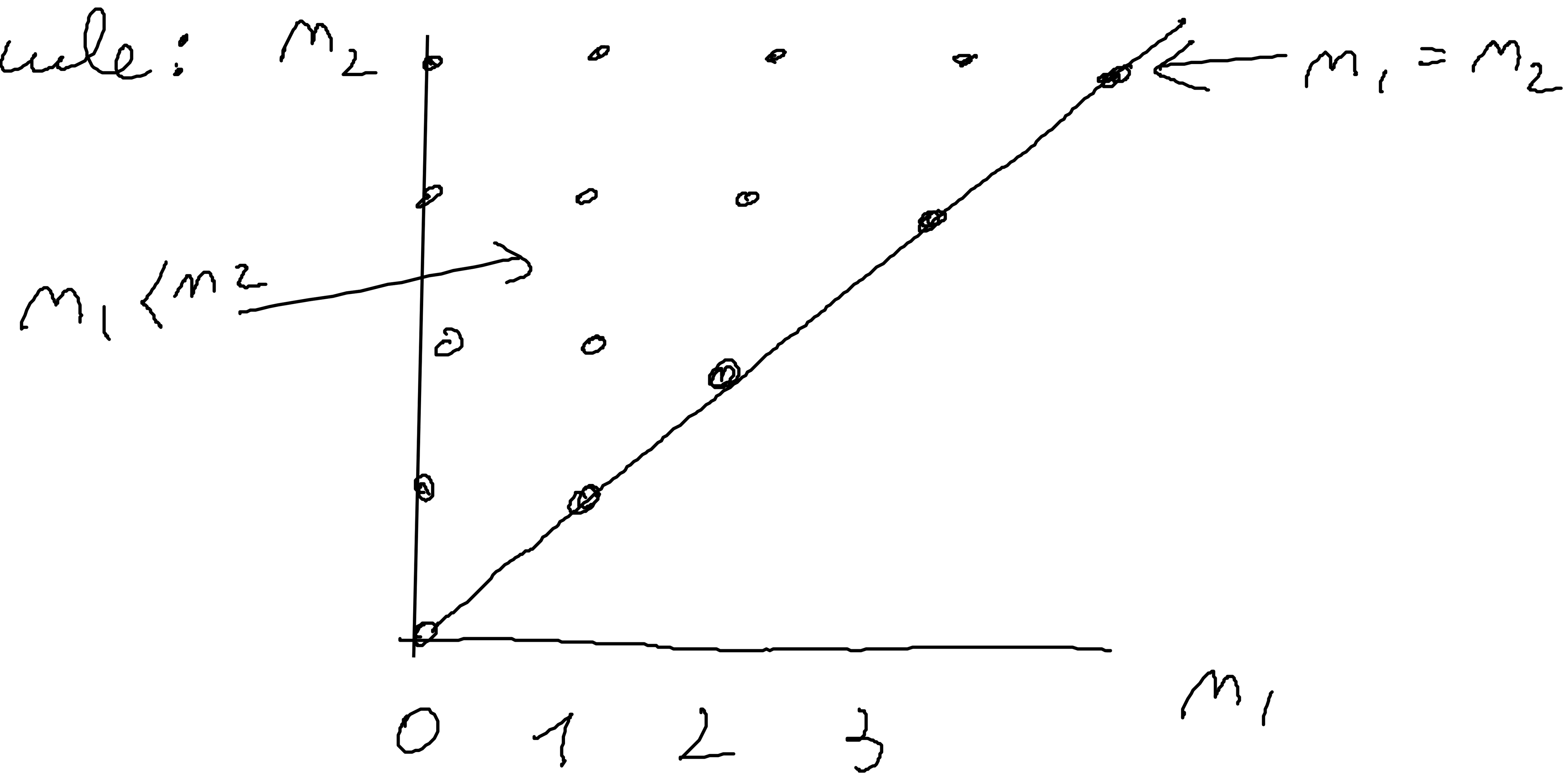
$$Z_{N=1} = \sum_{m=(0,\dots,0,\overset{n}{1}\,0\dots)} e^{-\beta\varepsilon_n} = \sum_{n\geqslant 0} e^{-\beta\varepsilon_n}$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})} = e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \sum_{n\geqslant 0}\left(e^{-\beta\hbar\omega}\right)^n$$

$$= y^{1/2}\left(\sum_{n\geqslant 0} y^n\right) = \frac{\sqrt{y}}{1-y}$$: série géométrique

(2)

Si $\underline{N=2}$, pour déterminer m, il suffit d'indiquer les niveaux n_1, n_2 où il y a une particule:



- Pour les bosons, $n_1 \leq n_2$
- Pour les fermions $n_1 < n_2$

(a) alors pour les <u>Bosons</u>,

$$Z_2 = \sum_{n_1 \leq n_2} \exp\left(-\beta\left(\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2 \geq 0} e^{-\beta(\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2})}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} e^{-\beta 2 \varepsilon_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n \geq 0} e^{-\beta \varepsilon_n}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} e^{-2\beta\varepsilon_n}$$

or $$\sum_{n \geq 0} e^{-\beta \varepsilon_n} = Z_1 = \frac{\sqrt{y}}{1-y}$$

$$\sum_{n \geq 0} e^{-2\beta\varepsilon_n} = \sum_{n \geq 0} e^{-2\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}$$

$$= e^{-\beta\hbar\omega} \sum_{n \geq 0} e^{-2\beta\hbar\omega n}$$

$$= y \sum_{n \geq 0} y^{2n} = \frac{y}{1-y^2} = \frac{y}{(1-y)(1+y)}$$

donc

$$Z_2^{\text{Bosons}} = \frac{1}{2} \frac{y}{(1-y)^2} + \frac{y}{2(1-y)(1+y)} = \frac{y(1+y) + y(1-y)}{2(1-y)^2(1+y)}$$

$$= \frac{y}{(1-y)^2(1+y)}$$

Pour les <u>Fermions</u>,

$$Z_2^{\text{Fermions}} = \sum_{0 \leq n_1 < n_2} e^{-\beta(\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2})}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2} e^{-\beta(\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2})} - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} e^{-\beta 2 \varepsilon_n}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n \geq 0} e^{-\beta \varepsilon_n} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} e^{-2\beta \varepsilon_n}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{n \geq 0} e^{-\beta \varepsilon_n} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} e^{-2\beta \varepsilon_n}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{y}}{1-y} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{y}{(1-y)(1+y)} = \frac{y(1+y) - y(1-y)}{2(1-y)^2(1+y)}$$

$$Z_2^{\text{Fermion}} = \frac{y^2}{(1-y)^2(1+y)} = y \cdot Z_2^{\text{Boson}}$$

(b) $\langle E \rangle = -\partial_\beta \ln Z_2 = -\left(\partial_y \ln Z_2\right)\left(\frac{dy}{d\beta}\right)$

et $\frac{dy}{d\beta} = -(\hbar\omega) y$

donc

$$u = \frac{1}{\hbar\omega}\langle E \rangle = \frac{1}{\hbar\omega}\left(-\partial_y \ln Z_2\right)\left(-\hbar\omega\right) y$$

$$= y\left(\partial_y \ln Z_2\right)$$

- Pour les bosons,

$$Z_2^B = \frac{y}{(1-y)^2(1+y)}$$

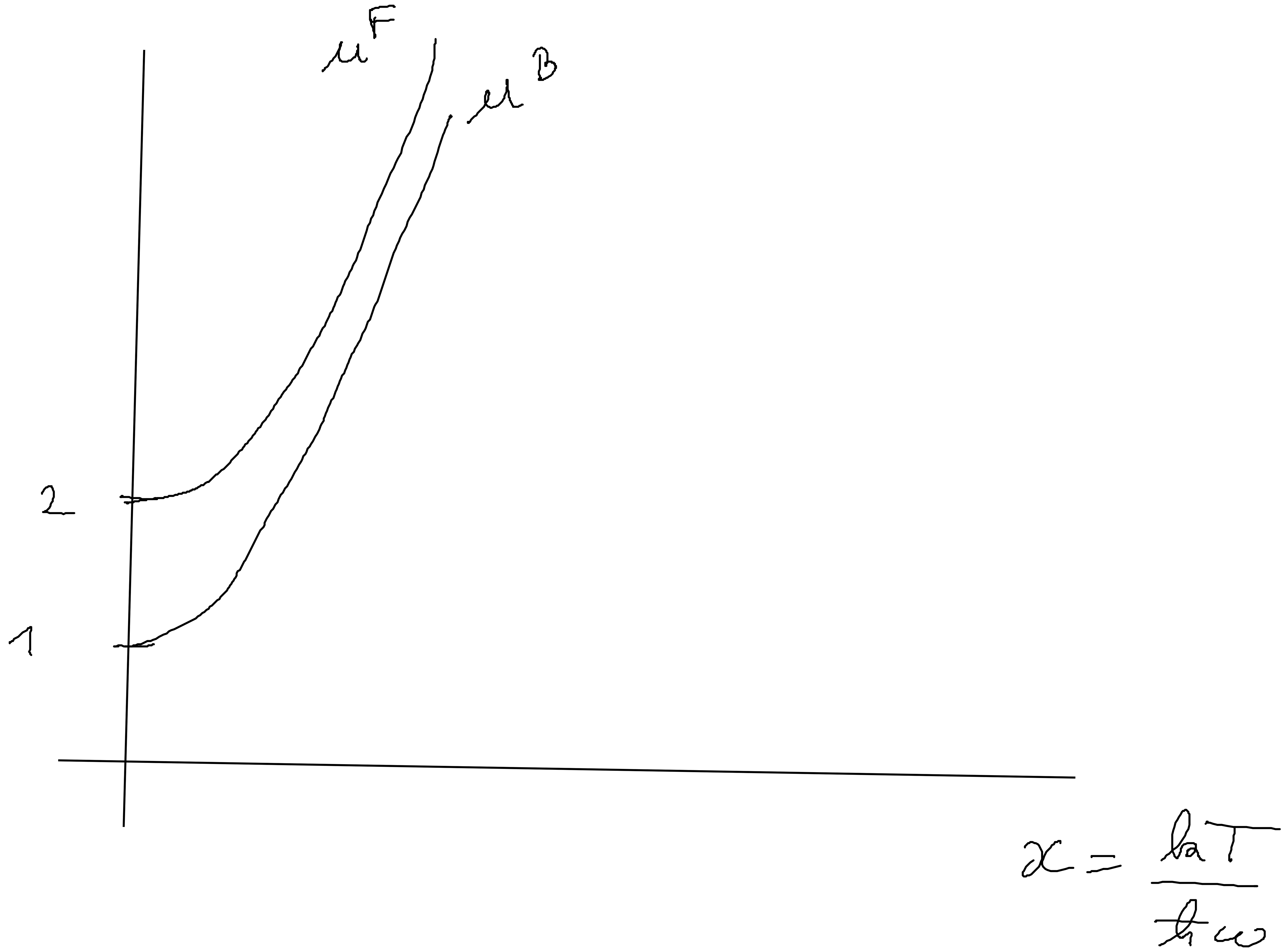
$$u^B = y\,\partial_y\left(\ln y - 2\ln(1-y) - \ln(1+y)\right)$$

$$= y\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{1-y} - \frac{1}{1+y}\right) = 1 + \frac{2y}{1-y} - \frac{y}{1+y}$$

- Pour les Fermions, $Z_2^F = y \cdot Z_2^B$,

$$u^F = y\left(\partial_y \ln Z_2^F\right) = y\,\partial_y\left(\ln y + \ln Z_2^B\right)$$

$$= 1 + u^B$$



μ^F
μ^B
2
1
$x = \frac{k_B T}{\hbar\omega}$

(c) $$S = \frac{1}{kT}\langle E\rangle + \ln Z$$

$$= \frac{\hbar\omega}{kT}\,\frac{\langle E\rangle}{\hbar\omega} + \ln Z = \frac{1}{x}\,u + \ln Z$$

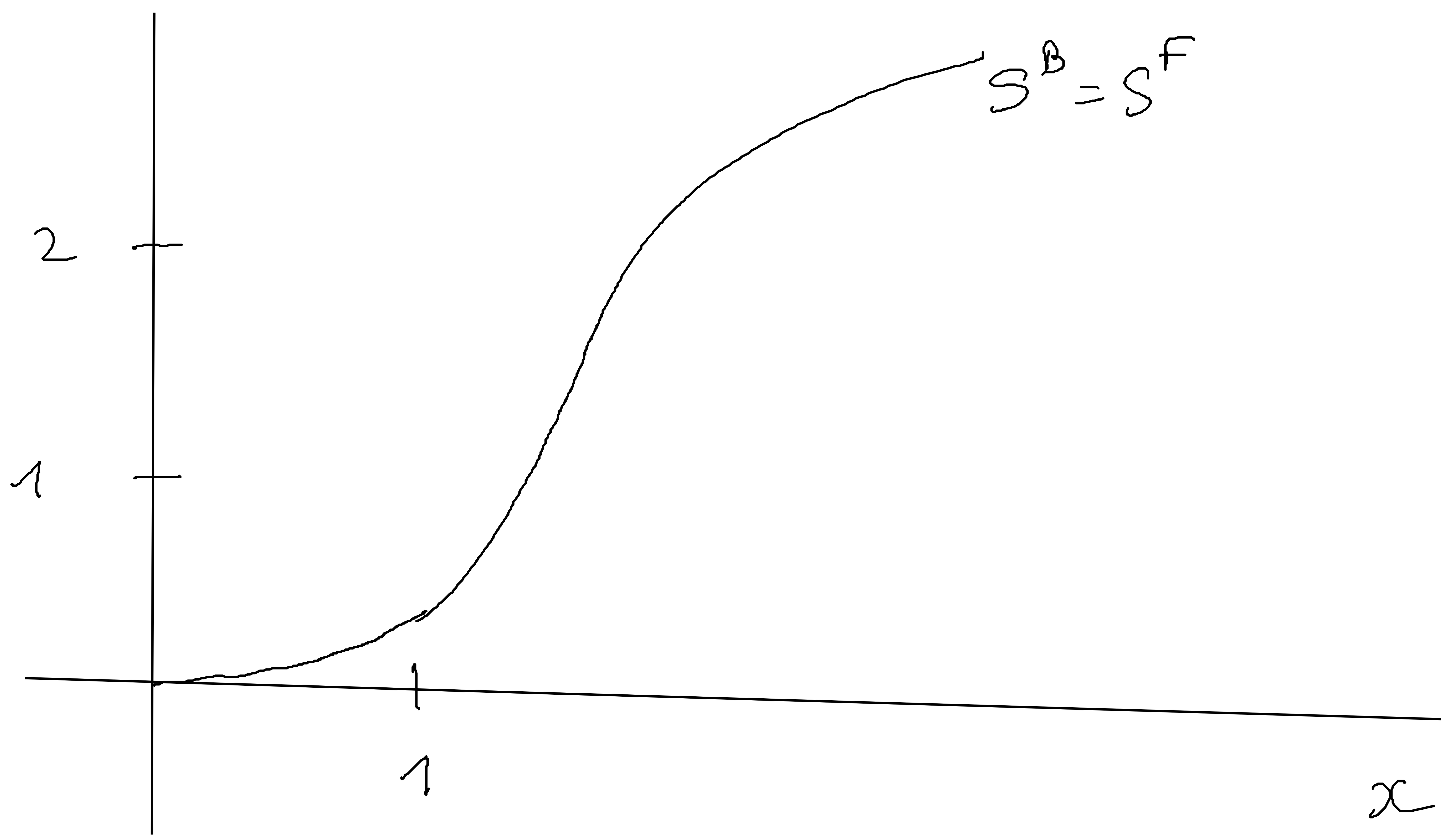
. pour les Bosons, et $N=2$ particules,

$$S^B = \frac{1}{x}\,u^B + \ln Z_2^B = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{2y}{1-y} - \frac{y}{1+y}\right) + \ln\left(\frac{y}{(1-y)^2(1+y)}\right)$$

. pour les Fermions

$$S^F = \frac{1}{x}\,u^F + \ln Z_2^F = \frac{1}{x}\left(1+u^B\right) + \ln\left(y\, Z_2^B\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{x}} + \underset{\cancel{-\frac{1}{x}}}{\underset{\shortparallel}{\ln y}} + S^B = S^B$$: même entropie



$S^B = S^F$
2
1
1
x