Dualité de Kramers-Wannier pour le modèle d'Ising 2D, réseau carré

(1) • si $\sigma_x \sigma_y = +1$ alors pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&(\cosh \beta)(1+ \sigma_x \sigma_y \tanh \beta) \\
&= \frac{1}{2}(e^\beta + e^{-\beta})\left(1 + \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{e^\beta + e^{-\beta}}\right) \\
&= \frac{1}{2}(e^\beta + e^{-\beta} + e^\beta - e^{-\beta}) = e^\beta = e^{\beta \sigma_x \sigma_y}
\end{aligned}$$

• si $\sigma_x \sigma_y = -1$ alors

$$(\cosh \beta)(1+ \sigma_x \sigma_y \tanh \beta) = \frac{1}{2}(e^\beta + e^{-\beta})\left(1 - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{e^\beta + e^{-\beta}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(e^\beta + e^{-\beta} - e^\beta + e^{-\beta}) = e^{-\beta} = e^{\beta \sigma_x \sigma_y}$$

donc en général pour tout $\sigma_x, \sigma_y \in \{-1,1\}$, $\beta \in \mathbb{R}$,

$$(\cosh \beta)(1+ \sigma_x \sigma_y \tanh \beta) = e^{\beta \sigma_x \sigma_y}$$

2 $$1=\sum_{\sigma} p(\sigma) = \frac{1}{Z}\sum_{\sigma} e^{-\beta E(\sigma)}$$

1 donc $$Z(\beta) = \sum_{\sigma\in\{-1,1\}^{\Lambda}} e^{-\beta E(\sigma)} = \sum_{\sigma} e^{-\beta \sum_{e\in E(\Lambda)} -\sigma_{e_1}\sigma_{e_2}}$$

$$= \sum_{\sigma}\prod_{e\in E(\Lambda)} e^{\beta\sigma_{e_1}\sigma_{e_2}} = \sum_{\sigma}\prod_{e\in E(\Lambda)} (\cosh\beta)\left(1+\sigma_{e_1}\sigma_{e_2}\tanh\beta\right)$$

$$= (\cosh\beta)^{|E(\Lambda)|}\sum_{\sigma}\prod_{e\in E(\Lambda)}\left(1+\sigma_{e_1}\sigma_{e_2}\tanh\beta\right)$$

or en général pour un ensemble $E(\Lambda)=\{e_1, e_2, e_3 \cdots e_n\}$, une fonction $X : e\in E(\Lambda) \longmapsto X_e \in \mathbb{R}$, on a

$$\prod_{e\in E(\Lambda)}(1+X_e) = (1+X_{e_1})(1+X_{e_2})\cdots(1+X_{e_n})$$

$$= 1 + X_{e_1} + X_{e_2} + \cdots + X_{e_1}X_{e_2} + \cdots + X_{e_1}X_{e_2}\cdots X_{e_n}$$

$$= \sum_{E\subset E(\Lambda)}\prod_{e\in E} X_e .$$

Ici cela donne

$$Z(\beta) = (\cosh\beta)^{|\mathbb{E}(\Lambda)|} \sum_{\sigma} \sum_{E \subset \mathbb{E}(\Lambda)} \prod_{e \in E} \left(\sigma_{e_1} \sigma_{e_2} \tanh\beta \right)$$

$$= (\cosh\beta)^{|\mathbb{E}(\Lambda)|} \sum_{E \subset \mathbb{E}(\Lambda)} \sum_{\sigma} \prod_{e \in E} \left(\sigma_{e_1} \sigma_{e_2} \tanh\beta \right)$$

1 $$= (\cosh\beta)^{|\mathbb{E}(\Lambda)|} \sum_{E \subset \mathbb{E}(\Lambda)} (\tanh\beta)^{|E|} \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^{\Lambda}} \prod_{e \in E} \sigma_{e_1} \sigma_{e_2}$$

3

Si $E \subset \mathbb{E}(\Lambda)$ est un ensemble d'arêtes fixé,

et si un sommet $a \in \Lambda$ apparaît un nombre impair de fois dans E, noté $(2k+1)$, alors $\sigma_a^{2k} = 1$

donc $$\sum_{\sigma_a \in \{-1,1\}} \sigma_a^{2k+1} = \sum_{\sigma_a \in \{-1,1\}} \sigma_a = +1 - 1 = 0$$

par conséquent $$\sum_{\sigma} \prod_{e \in E} \sigma_{e_1} \sigma_{e_2} = 0$$

car ...

Car

$$\sum_{f\in\{-1,1\}^\Lambda} \prod_{e\in E} f_{e_1} f_{e_2} = \prod_{x\in\Lambda} \sum_{f_x\in\{-1,1\}} \prod_{e\in E} f_{e_1} f_{e_2}$$

$$= \prod_{x\in\Lambda\setminus\{a\}} \sum_{f_x\in\{-1,1\}} \sum_{f_a\in\{-1,1\}} \prod_{e\in E} f_{e_1} f_{e_2}$$

on isole le sommet a du reste

par hypothèse

$$= \prod_{x\in\Lambda\setminus\{a\}} \sum_{f_x\in\{-1,1\}} \prod_{\substack{e\in E \\ a\notin e}} f_{e_1} f_{e_2} \prod_{\substack{e\in E \\ e=(e_1,a)}} f_{e_1} \underbrace{\left(\sum_{f_a\in\{-1,1\}} f_a^{2k+1}\right)}_{\substack{=0 \\ \text{d'après} \\ \text{ci-dessus}}}$$

$$= 0$$

Conséquence : on ne garde que les ensemble d'arêtes $E \in \mathcal{E}(\Lambda)$ où chaque sommet apparaît un nombre pair de fois, et cela donnera $\sum_{f_a\in\{-1,1\}} f_a^{2k} = 1+1 = 2$ pour chaque sommet $a \in \Lambda$

donc $|2|^{|\Lambda|}$, donc

$$Z_\Lambda(\beta) \underset{(3\text{-}1)}{=} (\cosh\beta)^{|E(\Lambda)|}\, 2^{|\Lambda|} \sum_{E\in\mathcal{E}(\Lambda)} (\tanh\beta)^{|E|}$$

(4) Pour une configuration $\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda$ donnée,

$$\sum_{x\sim y} \sigma_x \sigma_y = \sum_{x\sim y} 1 - 2\,\mathbb{1}_{\sigma_x \neq \sigma_y}$$

somme sur les arêtes

sélectionne arêtes avec valeurs ± 1 aux sommets

$$= |\mathbb{E}(\Lambda)| - 2\,|\Phi(\sigma)|$$

nombre d'arêtes

donc

$$Z_\Lambda(\beta) \underset{(2\text{-}1)}{=} \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} e^{\beta \sum_{x\sim y} \sigma_x \sigma_y}$$

$$= \sum_{\sigma \in \{-1,1\}^\Lambda} e^{\beta |\mathbb{E}(\Lambda)| - 2\beta |\Phi(\sigma)|}$$

on pose $E = \Phi(\sigma) \in \mathcal{E}(\Lambda^*)$

$$= e^{\beta |\mathbb{E}(\Lambda)|} \sum_{E \in \mathcal{E}(\Lambda^*)} \left(e^{-2\beta}\right)^{|E|}$$

5

On a $\tanh \beta_c = e^{-2\beta_c}$ $(*)$

Posons $u = e^{-\beta_c} > 0$

$$(*) \iff \frac{u^{-1} - u}{u^{-1} + u} = u^2$$

$$\iff u^{-1} - u = u + u^3$$

$$\iff u^4 + 2u^2 - 1 = 0$$

solutions $\Delta = 4 + 4 = 8$

$$u^2 = \frac{-2 + \sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2} > 0,$$

$$e^{-2\beta_c} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\iff \beta_c = -\frac{1}{2} \ln\left(-1 + \sqrt{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$