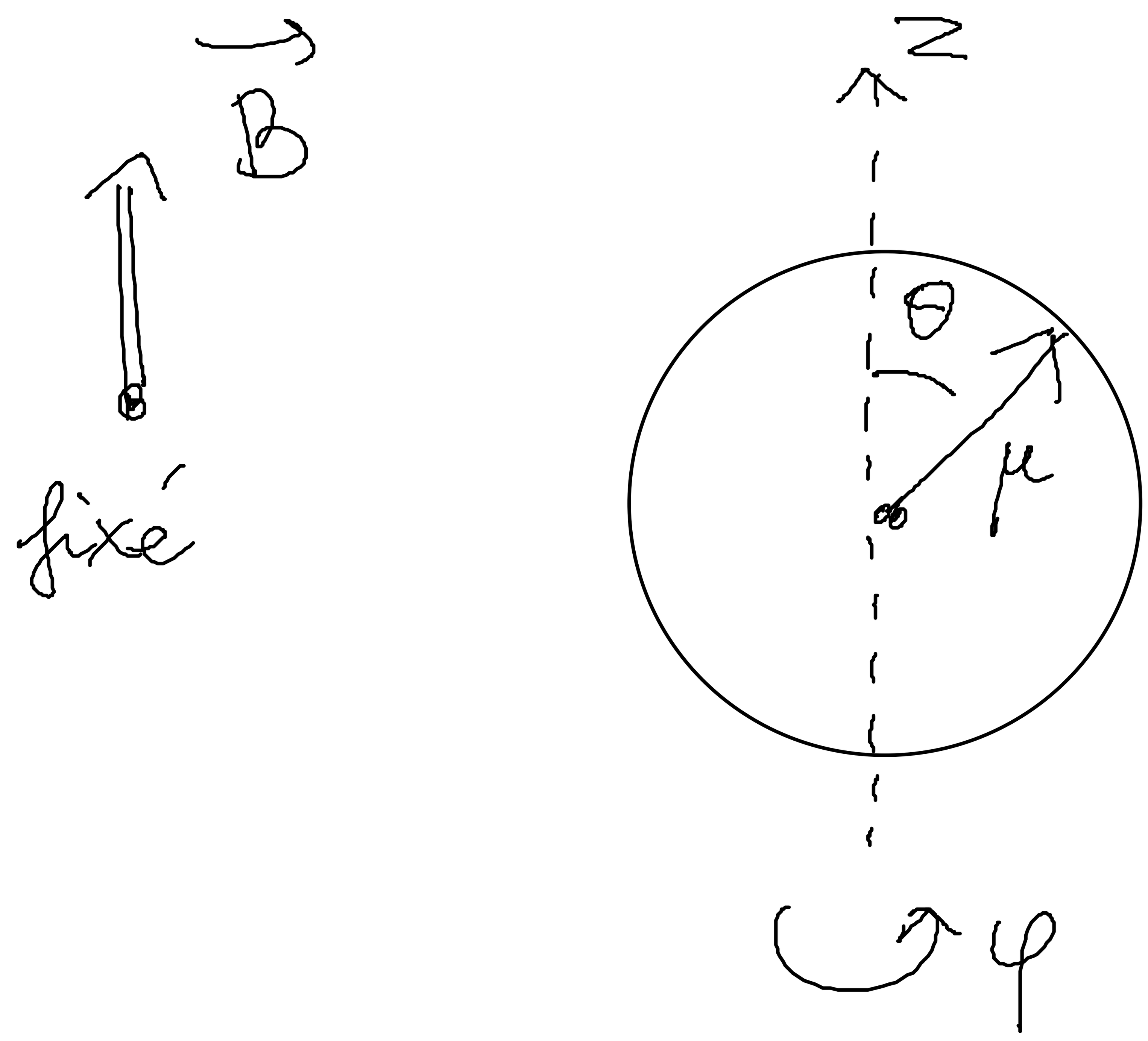
Modèle de magnétisme de Langevin



$\vec{M}$ aléatoire sur une sphère de rayon μ

$$E = -\mu B \cos\theta$$

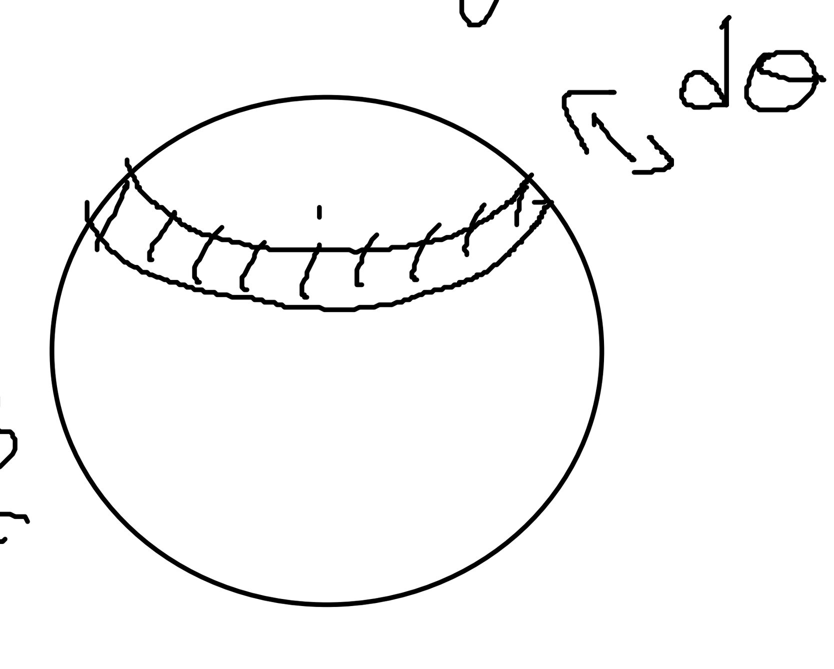
1) On utilise la mesure $(\sin\theta \, d\theta \, d\varphi) = dm$ en coordonnées sphériques (θ, φ) sur la sphère

Loi de Boltzman : $$P_m \, dm = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_m}{kT}} dm$$

Donc la loi induite sur θ est : $$= \frac{1}{Z} e^{\frac{\mu B \cos\theta}{kT}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$P(\theta) d\theta = \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{Z} e^{-\frac{E}{kT}} \sin\theta \, d\varphi \right) d\theta$$

avec θ fixé



$$= \frac{2\pi}{Z} e^{x \cos\theta} \sin\theta \, d\theta$$ avec $x = \frac{\mu B}{kT}$

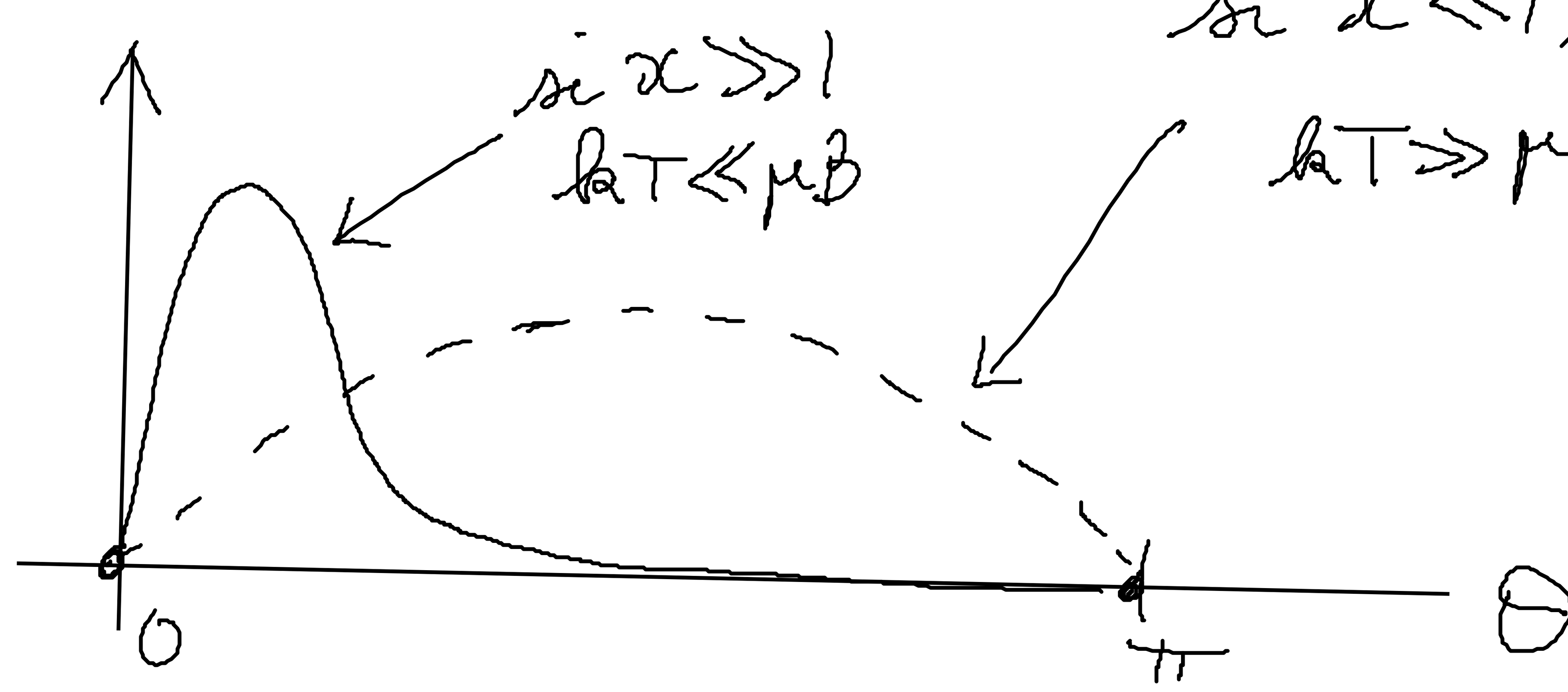
On a

$$\int P(\theta)\,d\theta = 1 \iff \frac{Z}{2\pi} = \int_0^\pi e^{x\cos\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{xu}\,du, \quad u = \cos\theta$$

$$= \frac{1}{x}\left[e^{xu}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{x}.$$

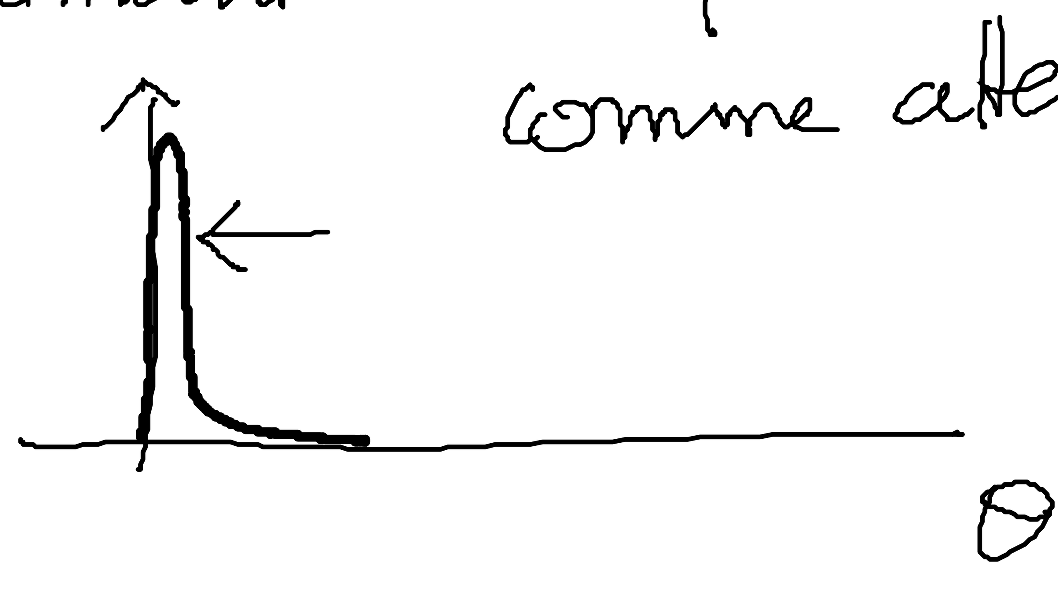
$$P(\theta) = \frac{2\pi}{Z}\, e^{x\cos\theta}\sin\theta$$

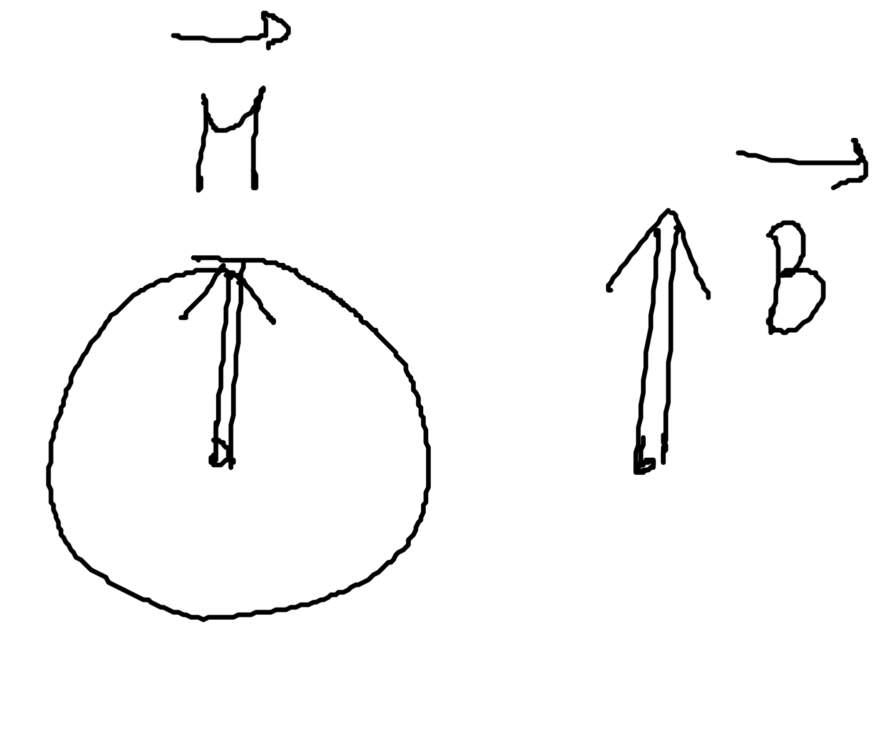


• <u>remarquer</u> que la limite $T \to 0$, ie $x \to 0$ est singulière. Dans ce cas la mesure de probabilité tend vers une mesure de probabilité <u>de Dirac</u> en $\theta = 0$, cad aimantation parallèle à $\vec{B}$.

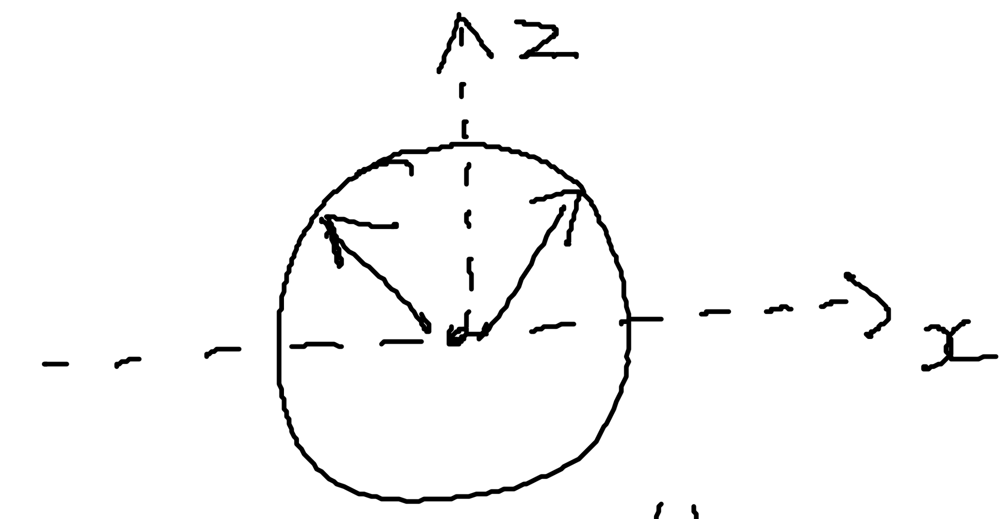
comme attendu.

si $x \to 0$:





② Par raison de symétrie $\langle M_x \rangle = 0$, $\langle M_y \rangle = 0$.
car la densité de proba
de Boltzman ne dépend pas de φ.



2 configurations équiprobables

$$\langle M_z \rangle = N \langle \mu \cos\theta \rangle$$

$$= N\mu \int_0^\pi \cos\theta \, P(\theta)\, d\theta = \frac{N\mu}{Z} \int_0^\pi \cos\theta \, e^{x\cos\theta} \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{N\mu}{Z} \int_{-1}^{1} u \, e^{xu} \, du \qquad \text{avec } u = \cos\theta$$

intégrale à calculer...

Rappelons que :

$$Z(x) := \int_{-1}^{1} e^{xu} \, du = \frac{1}{x}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

donc

$$\frac{dZ}{dx} = \int_{-1}^{1} e^{xu} \, u \, du = -\frac{1}{x^2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) + \frac{1}{x}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{x}\right)\left(-\frac{1}{x} + \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}\right)$$

$$= Z \cdot \left(\coth(x) - \frac{1}{x}\right)$$

donc $\langle M \rangle = \frac{N\mu}{\cancel{Z}} \cancel{Z} \left(\coth x - \frac{1}{x}\right)$

$$= N\mu \left(\coth x - \frac{1}{x}\right)$$

. <u>rem</u> : on a obtenu que :

$$\langle M \rangle = \frac{N\mu}{Z}\left(\frac{dZ}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(N\mu \ln Z(x)\right)$$

• pour $x \ll 1$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \sim \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2}}{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 + x - \frac{x^2}{2}}$$

$$\sim \frac{2 + x^2 + o(x^2)}{2x + o(x^2)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

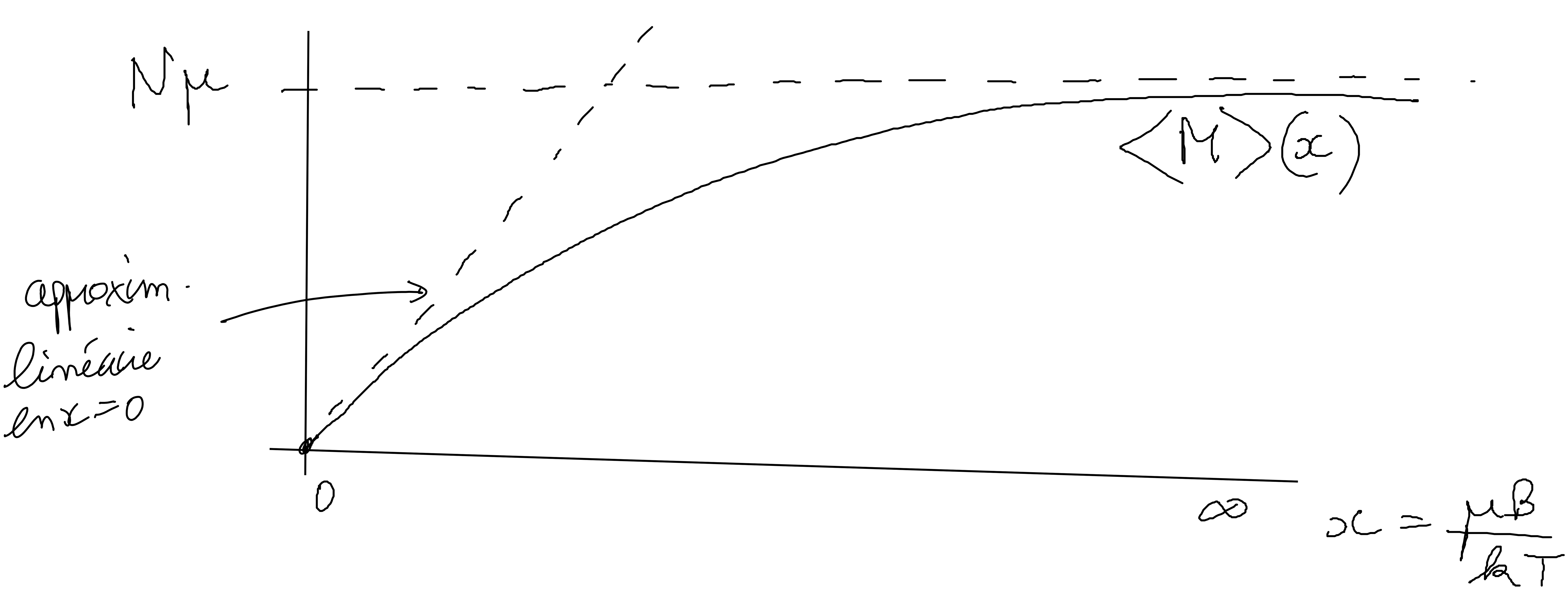
donc

$$\coth x - \frac{1}{x} = \frac{x}{2} + o(x)$$

$$\langle M \rangle \sim \frac{N\mu}{2} x = \chi B$$

: approximation linéaire en $x = 0$.

avec $\chi = \frac{N\mu^2}{2kT}$



• pour $x \to \infty$, $\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1$ et $\frac{1}{x} \to 0$

donc $\langle M \rangle(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} N\mu$.