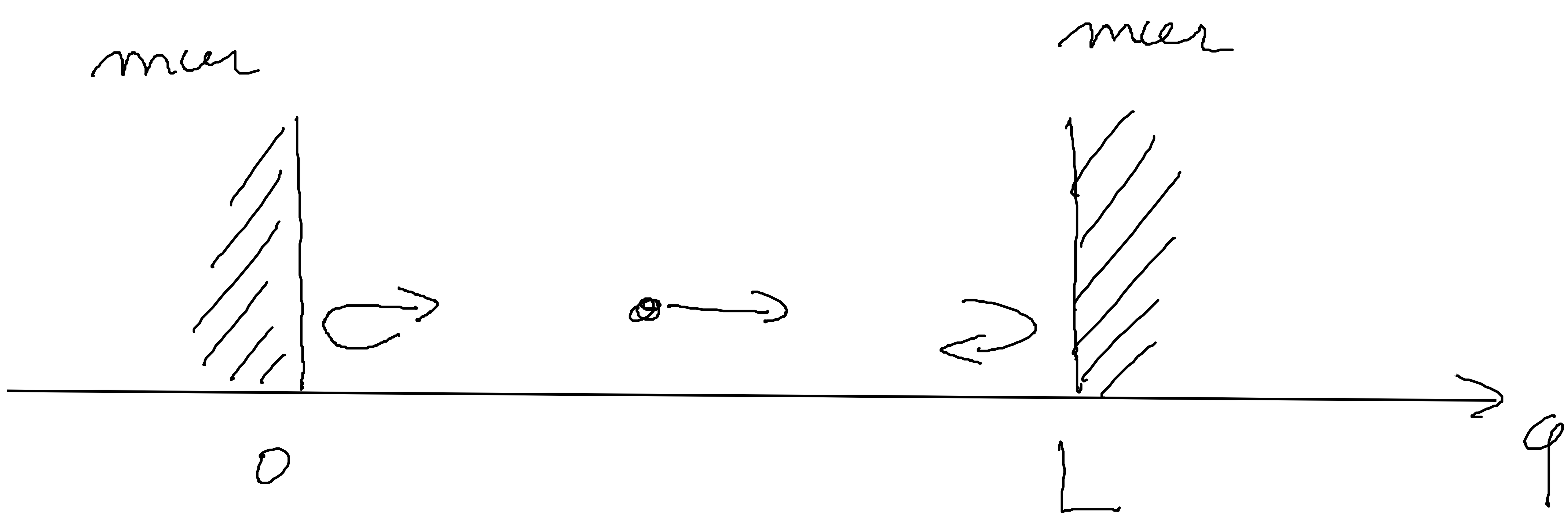
23/12/19

Particule dans une boîte

(1) à une dimension :

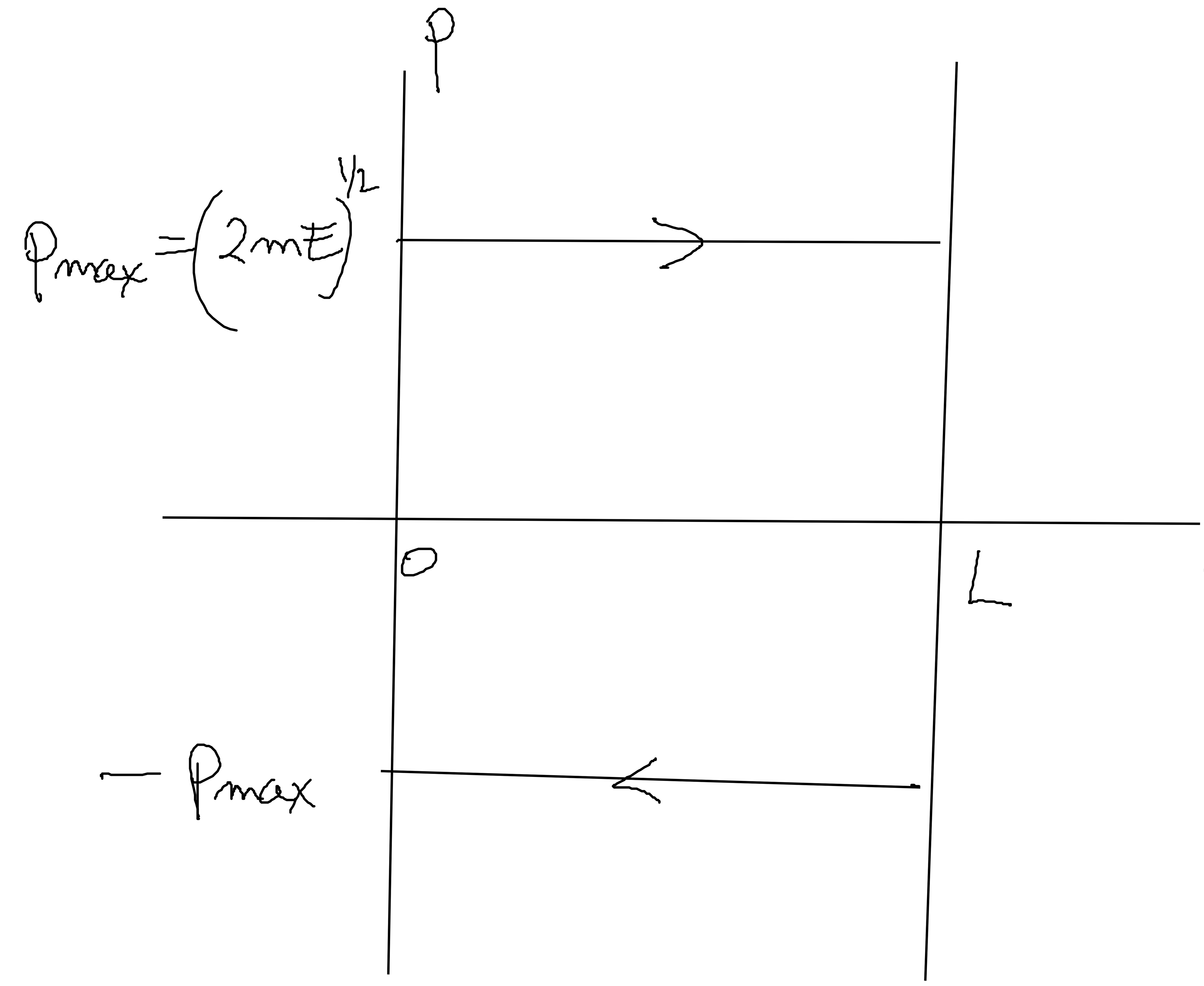


énergie potentielle :

$$\begin{cases} V(q) = 0 \quad \text{si} \quad 0 \leq q \leq L \\ \qquad \left(\text{car} \quad F(q) = -\dfrac{dV}{dq} = 0 \right) \\ \qquad \text{pas de force} \\ V(q) = \infty \quad \text{si} \quad q < 0 \ \text{ou} \ q > L. \end{cases}$$

énergie pour $0 \leq q \leq L$:

$$E = H(q,p) = \frac{p^2}{2m}$$



$$n(E) = \frac{\mathrm{Vol}\left(\{q,p,\ H(q,p) \leq E\}\right)}{2\pi\hbar} = \frac{L\,(2p_{max})}{2\pi\hbar}$$

$$= \frac{L\,2\,(2mE)^{1/2}}{2\pi\hbar}$$

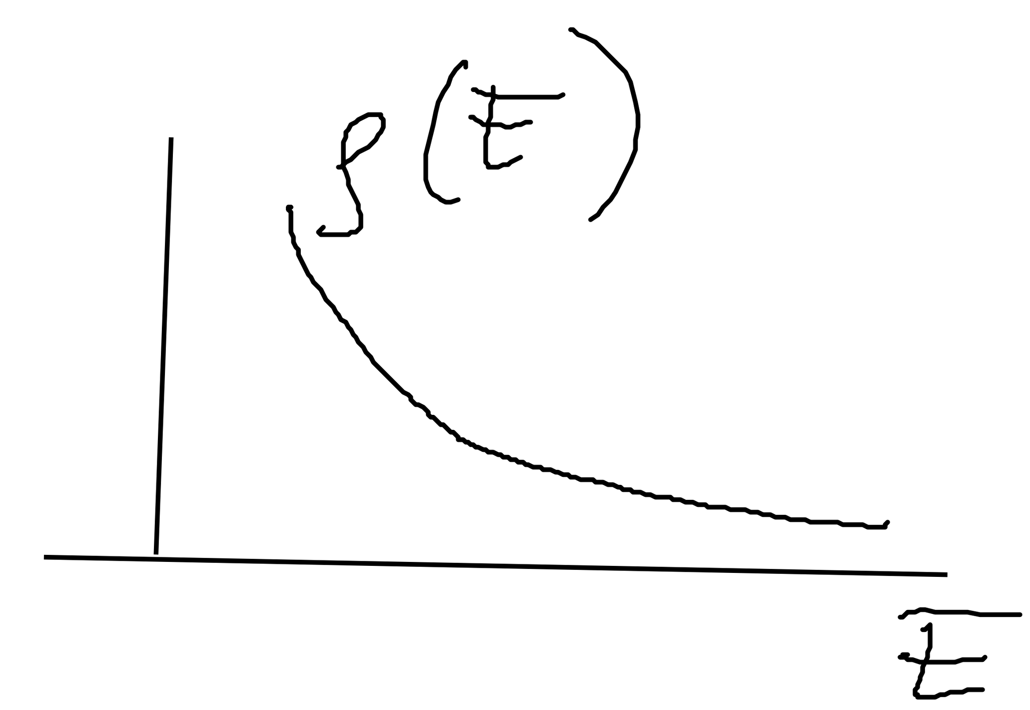
inversement

$$E_n = \left(\frac{2\pi\hbar n}{2L}\right)^2 \frac{1}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{L^2\,2m}$$

$$= E_n^{exact} \quad \text{si } n \geq 1.$$

L'exactitude est une coïncidence.

densité d'états $\rho(E) = \frac{dn}{dE} = \frac{C}{E^{1/2}}$



où C ne dépend pas de E.

(2) Pour une particule libre dans un volume V à 3 dimensions,

$$E = H(q,p) = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m}$$

$$\iff \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = (2mE) \quad \text{avec } \vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$$

: équation d'une sphère de rayon $R = \sqrt{2mE}$

D'après la formule de Weyl,

$$n(E) = \frac{\mathrm{Vol}\left(q,p \text{ tq } H(q,p) \leq E\right)}{(2\pi\hbar)^3}$$

car $q \in \mathbb{R}^3$

pour variables $\vec{q}$

pour variables $\vec{p}$

$$= \frac{V.\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V(mE)^{3/2}\, 2^{1/2}}{3\pi^2\hbar^3}$$

Inversement $\quad E_n = \left(\frac{3\pi^2\hbar^3 n}{\sqrt{2}\, V}\right)^{2/3} \frac{1}{m}$

densité d'états $\quad \rho(E) = \frac{dn}{dE} = C.E^{1/2}$

où C ne dépend pas de E.