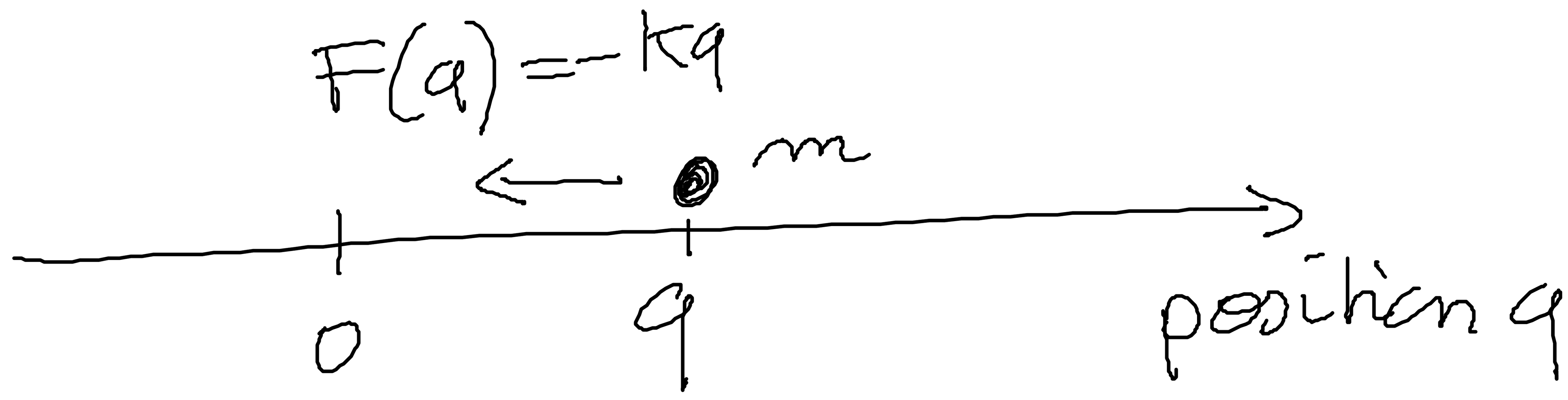
23/12/19

Oscillateur Harmonique et formule de Weyl



① $$E = H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{m} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -kq = F(q) \end{cases}$$: équ. de Hamilton

$$\Longleftrightarrow \quad m\ddot{q} = \dot{p} = F(q)$$: loi de Newton

2) L'énergie $E(t) = H(q(t), p(t))$ est conservée

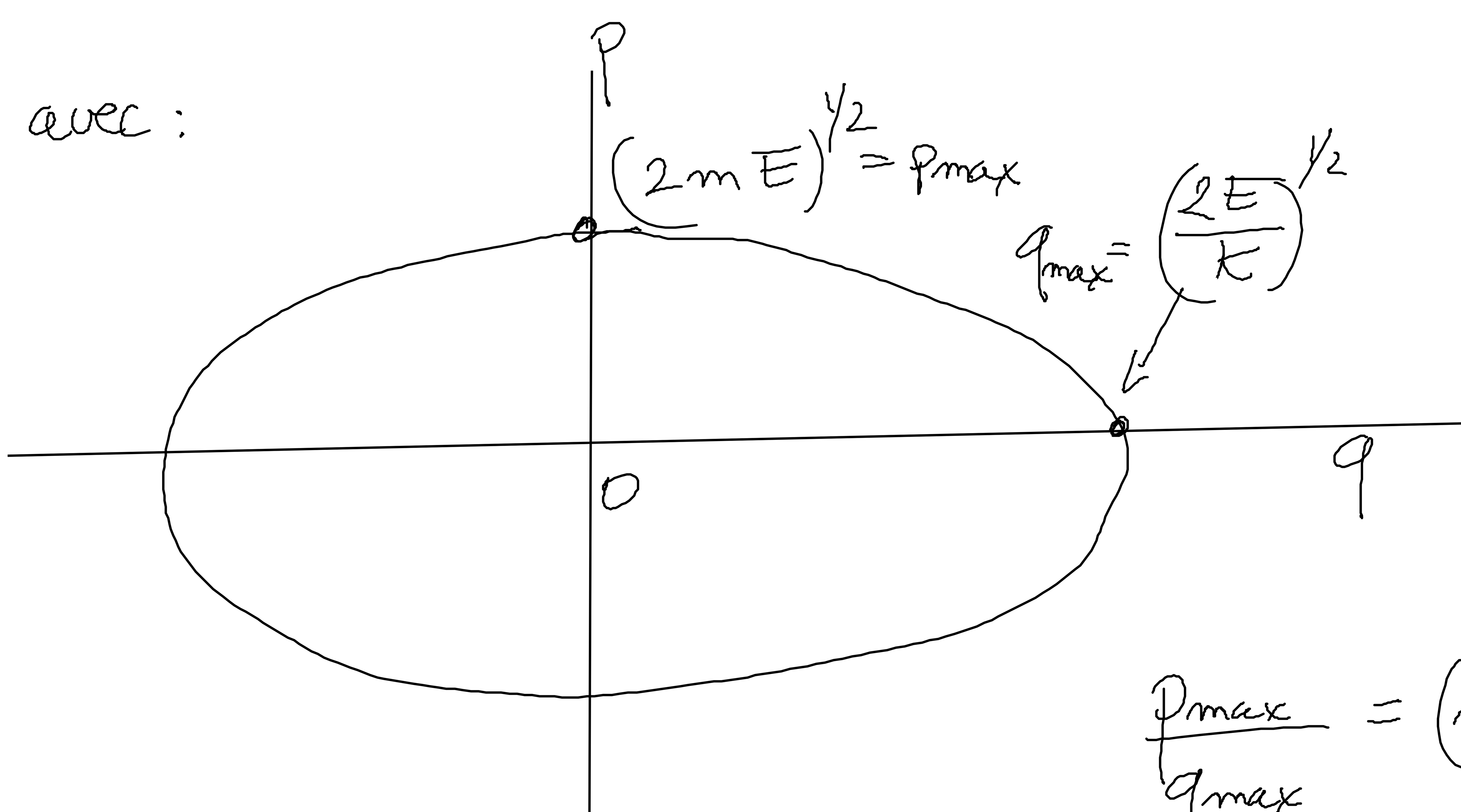
car $\frac{\partial E}{\partial t} = (\partial_q H)\,\dot{q} + (\partial_p H)\,\dot{p} = (\partial_q H)(\partial_p H) - (\partial_p H)(\partial_q H)$

$= 0$

donc $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} K q^2 = \text{cste}/t$: équation d'une ellipse

$\Longleftrightarrow \left(\frac{p}{p_{max}}\right)^2 + \left(\frac{q}{q_{max}}\right)^2 = 1$

avec :



$\frac{p_{max}}{q_{max}} = (mK)^{1/2}$

Surface de l'ellipse :

$\mathrm{Vol}(\{q, p \text{ tq } H(q,p) \leq E\}) = \pi\, q_{max}\, p_{max}$

$= \pi\, 2E \sqrt{\frac{m}{K}}$

$= \frac{2\pi E}{\omega}$ avec $\omega := \sqrt{\frac{K}{m}}$

on montre ci dessous que ω est la fréquence

Montrons que ω est la fréquence des trajectoires :

Il faut résoudre les équations du mouvement.

Posons $\quad X := \dfrac{q}{q_{max}} \quad , \quad Y := \dfrac{p}{p_{max}}$

$$Z = X + iY \in \mathbb{C}$$

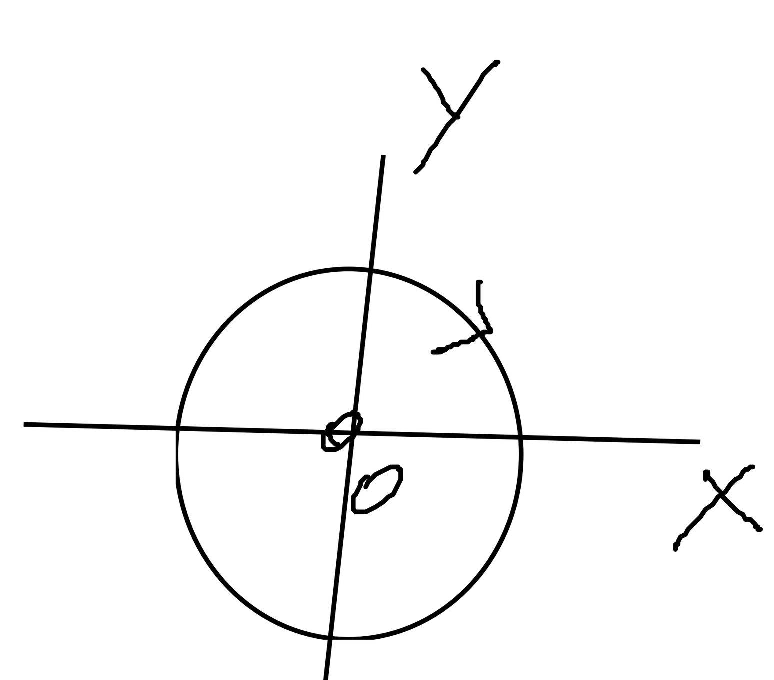
alors
$$\dot{Z} = \frac{\dot{q}}{q_{max}} + i\frac{\dot{p}}{p_{max}} = \frac{p}{m q_{max}} - i\frac{Kq}{p_{max}}$$

$$= \frac{p_{max}}{m\, q_{max}} Y - i\frac{K q_{max}}{p_{max}} X$$

$$= \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2}\left(Y - iX\right) = -i\omega Z$$

avec $\boxed{\omega = \left(\dfrac{K}{m}\right)^{1/2}}$

$\Longrightarrow \quad Z(t) = e^{-i\omega t} Z(0)$: rotation sens indirect à fréquence ω.



③ D'après la formule de Weyl,

$$n(E) = \frac{\mathrm{Vol}(\{q,p \text{ , tq } H(q,p) \leq E\})}{2\pi\hbar}$$

$$= \frac{2\pi E}{\omega\, 2\pi\hbar} = \frac{E}{\omega\hbar} + o(\hbar^{-1})$$

: valable si $\hbar \ll \frac{E}{\omega}$

Inversement :

$$E_n = \hbar\omega n + o(n)$$: valable si $n \gg 1$

comparable au résultat exact :

$$E_n^{\text{exact}} = \hbar\omega n + \left(\frac{1}{2}\hbar\omega\right)$$