Université Grenoble Alpes, Frédéric Faure.

1 Modèle simple de décohérence

1. Du fait que $|\pm\rangle$ sont vecteurs propres de $\hat{S}_z$, on a [1]

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = e^{-it\hat{H}}|\psi(0)\rangle &= e^{-it\hat{S}_z\otimes\hat{H}_e}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle\otimes|E(0)\rangle+|-\rangle\otimes|E(0)\rangle\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle\otimes e^{-it\frac{1}{2}\hat{H}_e}|E(0)\rangle+|-\rangle\otimes e^{+it\frac{1}{2}\hat{H}_e}|E(0)\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\rho(t) = \frac{1}{2}&\left(|+\rangle\otimes e^{-it\frac{1}{2}\hat{H}_e}|E(0)\rangle+|-\rangle\otimes e^{+it\frac{1}{2}\hat{H}_e}|E(0)\rangle\right)\\
&\otimes\left(\langle+|\otimes\langle E(0)|e^{+it\frac{1}{2}\hat{H}_e}+\langle-|\otimes\langle E(0)|e^{-it\frac{1}{2}\hat{H}_e}\right)
\end{aligned}
$$

et (on rappel que en algèbre linéaire $\mathrm{Tr}(|a\rangle\langle b|)=\langle a|b\rangle$),

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho}(t) = \mathrm{Tr}_{env}(\rho(t)) &= \frac{1}{2}\Big(|+\rangle\langle+|.\langle E(0)|e^{+it\frac{1}{2}\hat{H}_e}e^{-it\frac{1}{2}\hat{H}_e}|E(0)\rangle+|+\rangle\langle-|.\langle E(0)|e^{-it\frac{1}{2}\hat{H}_e}e^{-it\frac{1}{2}\hat{H}_e}|E(0)\rangle\\
&\quad+|-\rangle\langle+|.\langle E(0)|e^{+it\frac{1}{2}\hat{H}_e}e^{+it\frac{1}{2}\hat{H}_e}|E(0)\rangle+|-\rangle\langle-|.\langle E(0)|e^{-it\frac{1}{2}\hat{H}_e}e^{+it\frac{1}{2}\hat{H}_e}|E(0)\rangle\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(|+\rangle\langle+|.\langle E(0)|E(0)\rangle+|+\rangle\langle-|.\langle E(0)|e^{-it\hat{H}_e}|E(0)\rangle\\
&\quad+|-\rangle\langle+|.\langle E(0)|e^{+it\hat{H}_e}|E(0)\rangle+|-\rangle\langle-|.\langle E(0)|E(0)\rangle\Big)\\
&\equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \langle E(0)|E(t)\rangle\\ \overline{\langle E(0)|E(t)\rangle} & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

2. On calcule

$$
\begin{aligned}
\langle E(0)|e^{-it\hat{H}_e}|E(0)\rangle &= \prod_{i=1}^{N}\langle e(0)|e^{-i\frac{t}{\sqrt{N}}\hat{H}}|e(0)\rangle\\
&= \left(\langle e(0)|e^{-i\frac{t}{\sqrt{N}}\hat{H}}|e(0)\rangle\right)^N
\end{aligned}
$$

A t fixé et $N\to\infty$, on a $\frac{t}{\sqrt{N}}\to 0$, or $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)$ donc

$$
\begin{aligned}
\langle e(0)|e^{-i\frac{t}{\sqrt{N}}\hat{H}}|e(0)\rangle &= \langle e(0)|\left(1-i\frac{t}{\sqrt{N}}\hat{H}-\frac{t^2}{2N}\hat{H}^2+\dots\right)|e(0)\rangle\\
&= \langle e(0)|e(0)\rangle-i\frac{t}{\sqrt{N}}\langle e(0)|\hat{H}|e(0)\rangle-\frac{t^2}{2N}\langle e(0)|\hat{H}^2|e(0)\rangle+o\left(\frac{t^2}{N}\right)
\end{aligned}
$$

---

1. Justification de la 2eme ligne : en général $\left(\hat{A}\otimes\hat{B}\right)(|a\rangle\otimes|b\rangle)=\left(\hat{A}|a\rangle\right)\otimes\left(\hat{B}|b\rangle\right)$. Et $e^{\hat{A}\otimes\hat{B}}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\hat{A}\otimes\hat{B}\right)^n$. Donc $e^{\hat{A}\otimes\hat{B}}(|a\rangle\otimes|b\rangle)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\hat{A}^n|a\rangle\otimes\hat{B}^n|b\rangle$ n'est pas un état produit en général, mais si $\hat{A}|a\rangle=\alpha|a\rangle$ (vecteur propre) alors $e^{\hat{A}\otimes\hat{B}}(|a\rangle\otimes|b\rangle)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\alpha^n|a\rangle\otimes\hat{B}^n|b\rangle=|a\rangle\otimes\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\left(\alpha\hat{B}\right)^n|b\rangle=|a\rangle\otimes\left(e^{\alpha\hat{B}}|b\rangle\right)$.

Or $\langle e(0)|\hat{H}|e(0)\rangle = 0$ et $\sigma^2 := \langle e(0)|\hat{H}^2|e(0)\rangle$. Donc

$$\langle e(0)|e^{-i\frac{t}{\sqrt{N}}\hat{H}}|e(0)\rangle = 1 - \frac{t^2}{2N}\sigma^2 + o\left(\frac{t^2}{N}\right)$$

$$\begin{aligned}\langle E(0)|e^{-it\hat{H}_e}|E(0)\rangle &= \left(1 - \frac{t^2}{2N}\sigma^2 + o\left(\frac{t^2}{N}\right)\right)^N \\ &= \exp\left(N\log\left(1 - \frac{t^2}{2N}\sigma^2 + o\left(\frac{t^2}{N}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

or $\log(1+x) = x + o(x)$ donc

$$\begin{aligned}\langle E(0)|e^{-it\hat{H}_e}|E(0)\rangle &= \exp\left(-N\left(\frac{t^2}{2N}\sigma^2 + o\left(\frac{t^2}{N}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\sigma^2(1+o(1))\right)\end{aligned}$$

Par conséquent d'après la question 1

$$\tilde{\rho}(t) = \mathrm{Tr}_{env}(\rho(t)) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-t^2\sigma^2/2} \\ e^{-t^2\sigma^2/2} & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi pour $t \to \infty$ $\tilde{\rho}(t)$ converge vers $\frac{1}{2}\mathrm{Id}$.

3. La base $|\pm'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle \pm |-\rangle)$ s'obtient par la matrice de passage unitaire $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}$, et dans cette nouvelle base on a donc

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(t) &\equiv P^{-1}.\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-t^2\sigma^2/2} \\ e^{-t^2\sigma^2/2} & 1 \end{pmatrix}.P \qquad (1)\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+e^{-t^2\sigma^2/2} & 0 \\ 0 & 1-e^{-t^2\sigma^2/2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

C'est une matrice diagonale donc plus facile à interpréter. On vérifie que l'état initial est un état pur :

$$\tilde{\rho}(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'état final pour $t \to \infty$ est totalement mélangé :

$$\tilde{\rho}(\infty) \equiv \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Remarquons que la base notée ici $|\pm\rangle$ est la base dans laquelle s'effectue l'interaction avec l'environnement. Dans l'exercice 1, c'était la base associée à la décomposition du faisceau en A,B, donc $|\pm_x\rangle$. Et la base ici $|\pm'\rangle$ était la base $|\pm_z\rangle$ du faisceau initial et de la mesure final.

4. D'après l'expression obtenue, (1), les valeurs propres de $\tilde{\rho}(t)$ sont

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm e^{-t^2\sigma^2/2}\right)$$

L'entropie est donc

$$S(\tilde{\rho}(t)) = -\rho_+ \log \rho_+ - \rho_- \log \rho_-$$

Pour $t \to \infty$, on pose $x = e^{-t^2\sigma^2/2} \ll 1$. On a

$$\begin{aligned} S(\tilde{\rho}(t)) &= -\frac{1}{2}(1+x)\left(\log\frac{1}{2} + \log(1+x)\right) - \frac{1}{2}(1-x)\left(\log\frac{1}{2} + \log(1-x)\right) \\ &= -\frac{1}{2}(1+x)\left(-\log 2 + x - \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{2}(1-x)\left(-\log 2 - x - \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^3\right)\right) \\ &= \log 2 - \frac{1}{2}x^2 + O\left(x^3\right) \\ &= \log 2 - \frac{1}{2}e^{-t^2\sigma^2} + O\left(e^{-3t^2\sigma^2/2}\right) \end{aligned}$$

et pour $t \to 0^+$, $\rho_+(t) \simeq 1 - \frac{1}{4}t^2\sigma^2$, $\rho_-(t) \simeq \frac{1}{4}\sigma^2 t^2$ donc on pose $x = \frac{1}{4}\sigma^2 t^2 \ll 1$,

$$\begin{aligned} S(\tilde{\rho}(t)) &= -(1-x)\log(1-x) - x\log x \\ &= -(1-x)\left(-x + O\left(x^2\right)\right) - x\log x \\ &= -x\log x + x + O\left(x^2\right) \\ &\simeq \frac{\sigma^2}{2}t^2 \log\left(\frac{1}{t}\right) + O\left(t^2\right) \end{aligned}$$

(Remarque peu importante : il peut paraitre surprenant d'écrire $\log\left(\frac{1}{t}\right)$ car $1/t$ n'est pas sans dimension ("cela est contraire aux préceptes de la faculté"). Mais c'est bien correct car ce terme est le terme dominant d'un développement asymptotique. Le choix de l'unité (ou le temps caractéristique) apparait dans le terme sous dominant : $\log(1/(t/\tau)) = \log(1/t) + \log\tau \simeq \log(1/t)$ pour $t \to 0$.)
D'après (1) et la définition $\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Id} + \vec{P}(t).\hat{\vec{\sigma}}\right)$, on déduit que dans la base $|\pm'\rangle$, le vecteur de polarisation est

$$\vec{P} = \left(0, 0, e^{-t^2\sigma^2/2}\right)$$

donc $P_z(t) = e^{-t^2\sigma^2/2}$ décroit vers 0 avec le temps caractéristique de décohérence

$$\tau_{decoh.} = \frac{1}{\sigma}$$

5. Si $\rho(0) = (|S(0)\rangle\langle S(0)|) \otimes \rho_{env}$ alors on pose $\mathrm{Tr}\left(\hat{H}^2\rho_e\right) = \sigma^2$ et on obtient les même résultats.