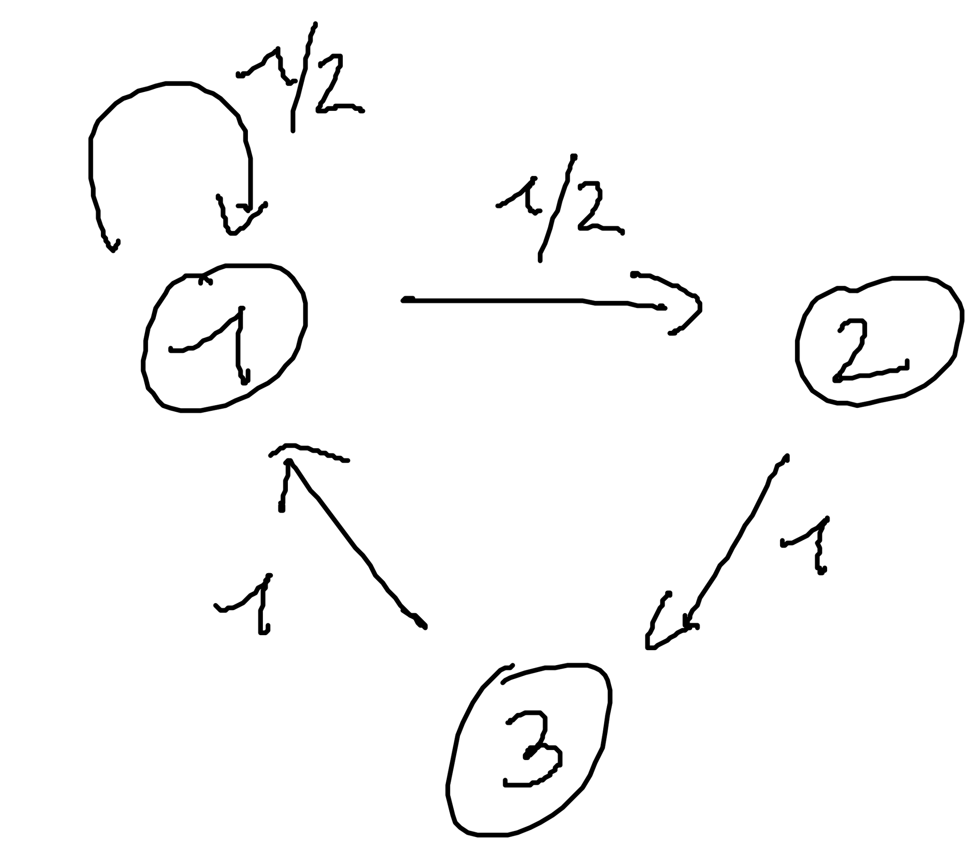
Dynamique stochastique de Markov

(1)

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \text{ : entrées} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{sorties} & \end{array}$$

graphe :



(2) • $\mu_{t+1}(x') = \sum_x P_{x \to x'} \cdot \mu_t(x) = \sum_x P_{x',x} \, \mu_t(x)$

$\iff \mu_{t+1} = P \mu_t$

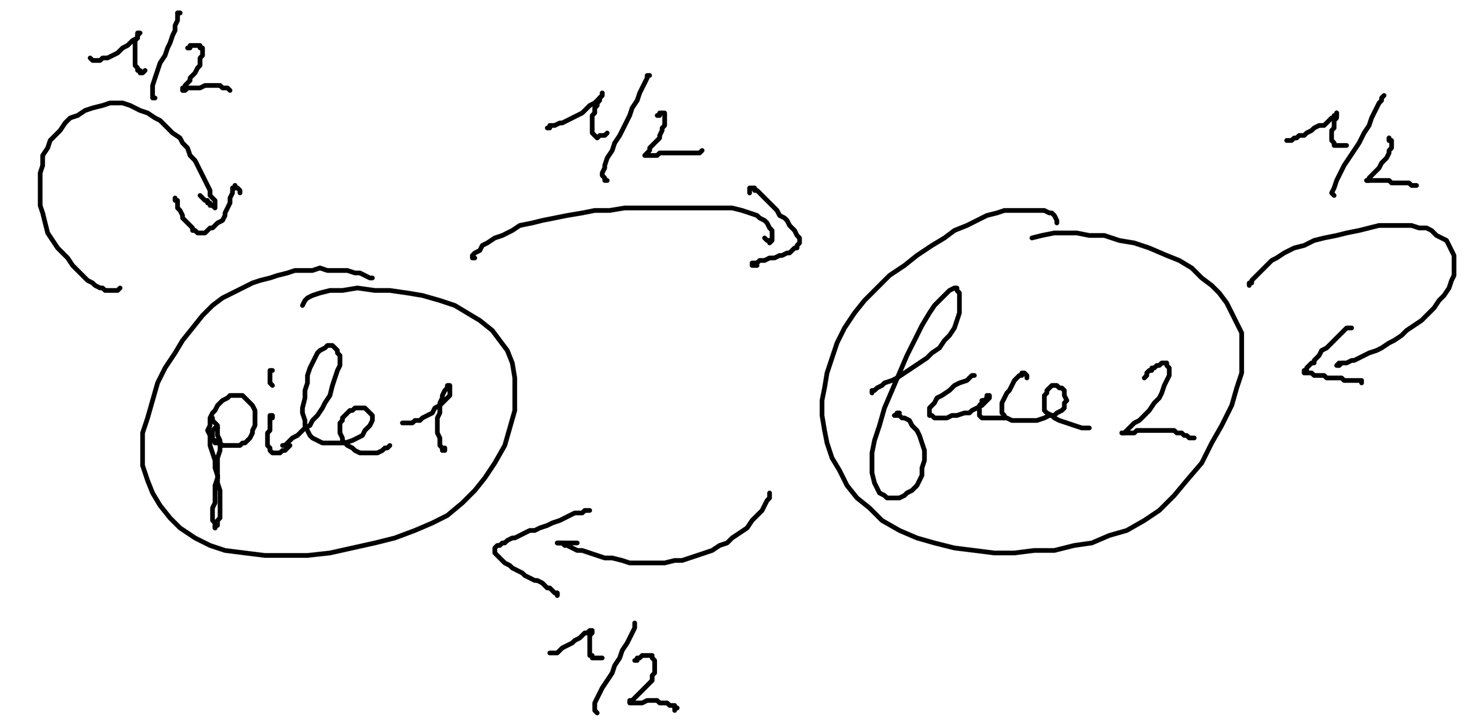
• μ_t et μ_{t+1} sont des mesures de probabilité donc

$$\sum_x \mu_t(x) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{x'} \mu_{t+1}(x') = 1$$

prenant $\mu_t = (0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ x}}{1}, 0 \dots)$, à x fixé, on obtient

$\mu_{t+1}(x') = P_{x',x} \, \mu_t(x) = P_{x',x}$, donc $1 = \sum_{x'} \mu_{t+1}(x') = \sum_{x'} P_{x',x}$

③ $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$



si $\mu_0 = (\mu_0(1), \mu_0(2)) \in [0,1]^2$

avec $\mu_0(1) + \mu_0(2) = 1$, est connu,

$$\mu_1 = P\mu_0 = \left(\frac{1}{2}\mu_0(1) + \frac{1}{2}\mu_0(2),\ \frac{1}{2}\mu_0(1) + \frac{1}{2}\mu_0(2)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

puis $\mu_t = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\forall\, t \geq 1$: distribution fixe,

"état d'équilibre"

④ $\mu_t = P\mu_{t-1} = \underbrace{P \dots P}_{t}\mu_0 = P^t \mu_0$

on écrit $P = ADA^{-1}$

alors $P^t = A D^t A^{-1}$

avec (d'après xcas), $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}(i\sqrt{7} - 1)$, $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$

: valeurs propres,

on a $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

donc $\lambda_2^t, \lambda_3^t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$,

$$D^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^t = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^t = e^{-t\frac{1}{2}\ln 2}$$

on a $A = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$

vecteurs colonnes / vecteurs lignes,

avec $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $V_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: vecteurs propres de $\lambda_1 = 1$

alors $P^t = A D^t A^{-1} = |U_1\rangle\langle V_1| + O\left(e^{-t/\tau}\right)$

avec $\tau = \frac{2}{\ln 2}$

$$\mu_t = P^t \mu_0 = |U_1\rangle \langle V_1 | \mu_0\rangle + O\left(e^{-t/\tau}\right)$$

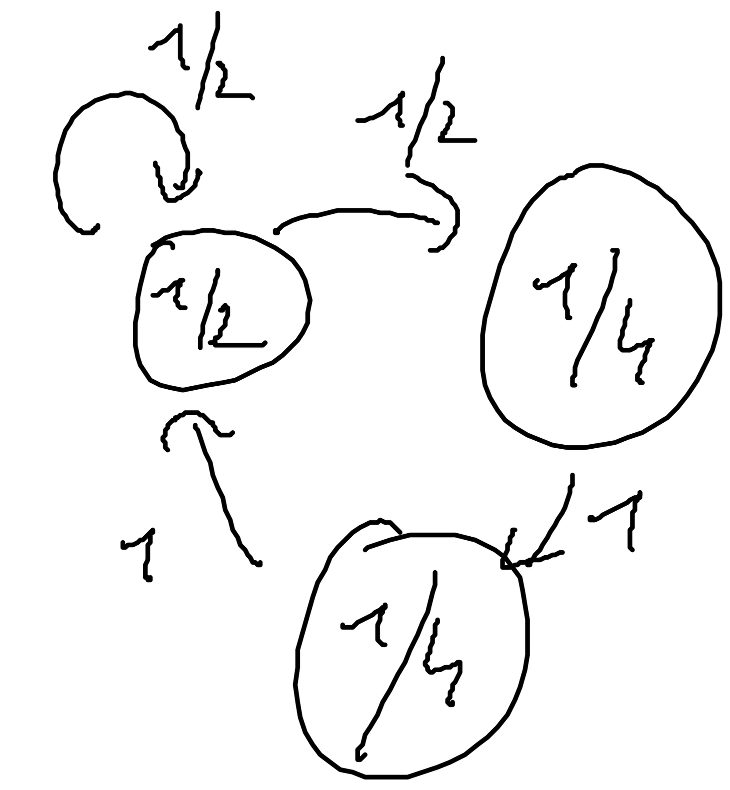
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\left(\underbrace{\mu_0(1) + \mu_0(2) + \mu_0(3)}_{1}\right)\right) + O\left(e^{-t/\tau}\right)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}}_{\mu_\infty} + O\left(e^{-t/\tau}\right)$$

μ_∞ : "état d'équilibre"

rem : l'état d'équilibre $u_\infty = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$

est attendu d'après le graphe :



car la "particule" reste en moyenne deux fois plus longtemps sur le 1er site que sur les suivants, grâce à la boucle.

le temps caractéristique de convergence est $\tau = \frac{2}{\ln 2} \simeq 2.88$

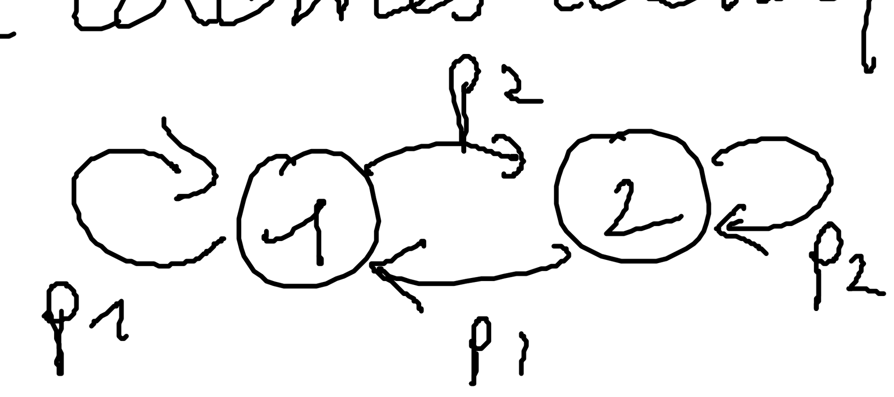
(5) Pour générer une suite de n évènements aléatoires indépendants et de mesure de proba :

$p_1, p_2, \dots, p_n$ donnée,

il faut une matrice : avec colonnes identiques.

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & & p_1 \\ p_2 & p_2 & \cdots & p_2 \\ p_3 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ p_n & p_n & & p_n \end{pmatrix}$$

ex :



L'état d'équilibre est

$U_1 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, en effet : $P U_1 = 1 \cdot U_1$

avec valeur propre 1. Les autres valeurs propres sont 0, donc il y a converge super exponentielle vers l'état d'équilibre. En fait à $t=1$, déjà $u_t = U_1$, $\forall u_0$.