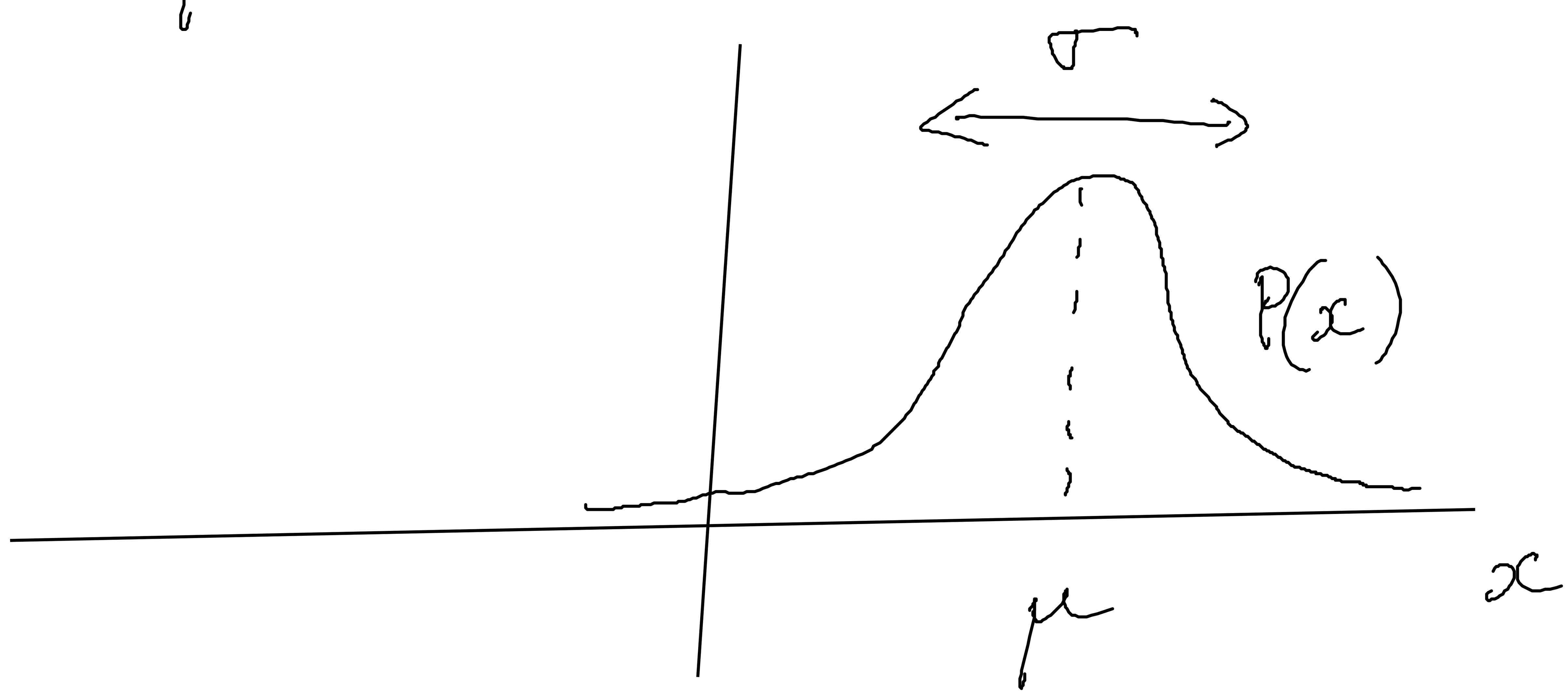
Loi Normale

2019

$$P(x) := \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$: densité de probabilité

avec $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.



① • $1 = \int_{\mathbb{R}} P(x)\,dx \iff Z = \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

changement de variable $X := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

donc $dX = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}\,dx$

$$Z = \sqrt{2}\sigma \cdot \int e^{-X^2}\,dX = \sqrt{2\pi}\;\sigma$$

• <u>Espérance</u> : $\mathbb{E}(x) = \int_{\mathbb{R}} x\,P(x)\,dx = \int (x-\mu)\,P(x)\,dx + \mu \int P(x)\,dx$

$$= \int \underbrace{x'\,P(x'+\mu)}_{\text{fonction impaire donc intégrale nulle}}\,dx' + \mu = \mu$$

changement $x' = x + \mu$

<u>Variance</u> $\mathbb{E}\left((x-\mu)^2\right) = \int (x-\mu)^2 P(x)\,dx$

$$= \frac{(\sqrt{2}\sigma)^2(\sqrt{2}\sigma)}{Z}\left(\underbrace{\int X^2 e^{-X^2} dX}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\right)$$

car soit $I_\alpha = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha Y^2} dY$, $X = \sqrt{\alpha}Y$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int e^{-X^2} dX = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi}$$

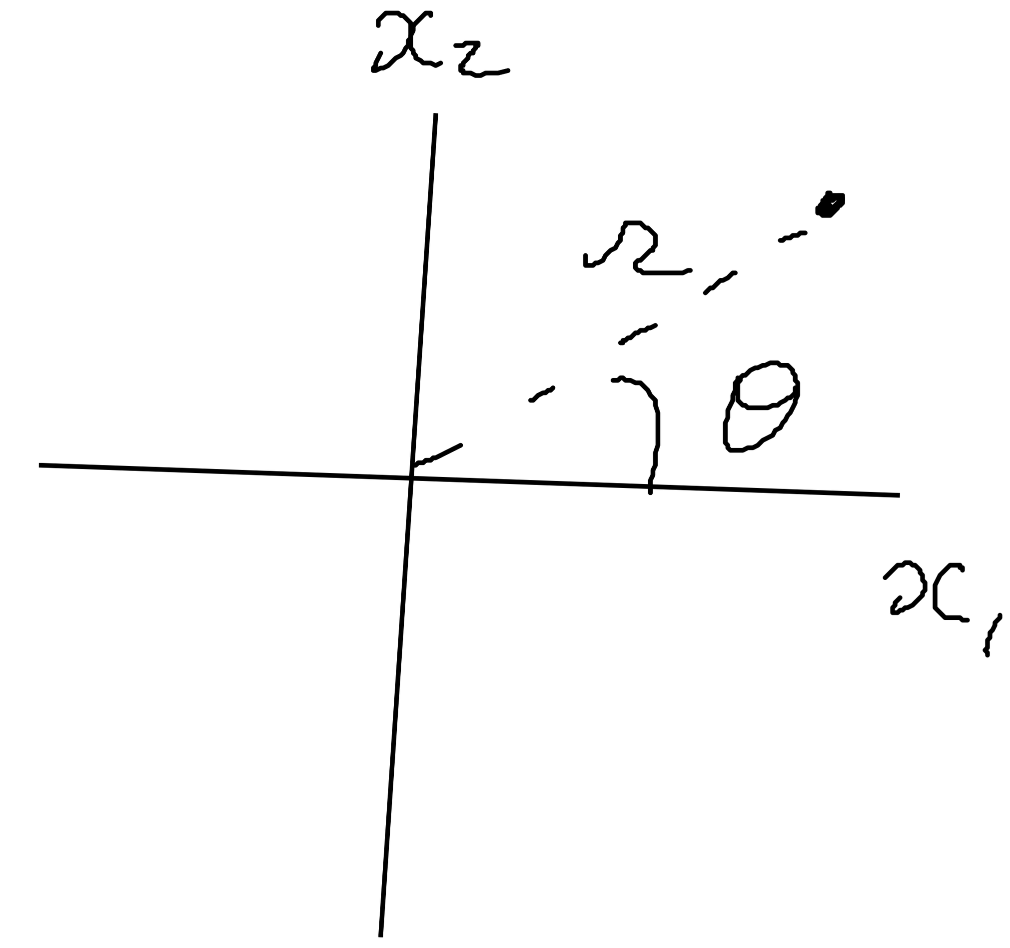
$$\frac{dI_\alpha}{d\alpha} = -\int Y^2 e^{-\alpha Y^2} dY = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}$$

donc $\mathbb{E}\left((x-\mu)^2\right) = \frac{(\sqrt{2}\sigma)^2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sigma^2$

(2) Soit x_1, x_2 variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$,

alors la mesure de proba est le produit:

$$P = P_{x_1,x_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \left(\frac{1}{Z} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} dx_1\right)\left(\frac{1}{Z} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}} dx_2\right)$$



on pose $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$r = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq 0.$$

On utilise les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{cases}$$

Mesure de proba:

$$P = P_{x_1,x_2}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = P_{x_1,x_2}(x_1,x_2)\,r\,dr\,d\theta$$

la mesure de proba induite sur r est:

$$P_r(r)\,dr := \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} P_{x_1,x_2}(x_1,x_2)\,d\theta\right) r\,dr$$

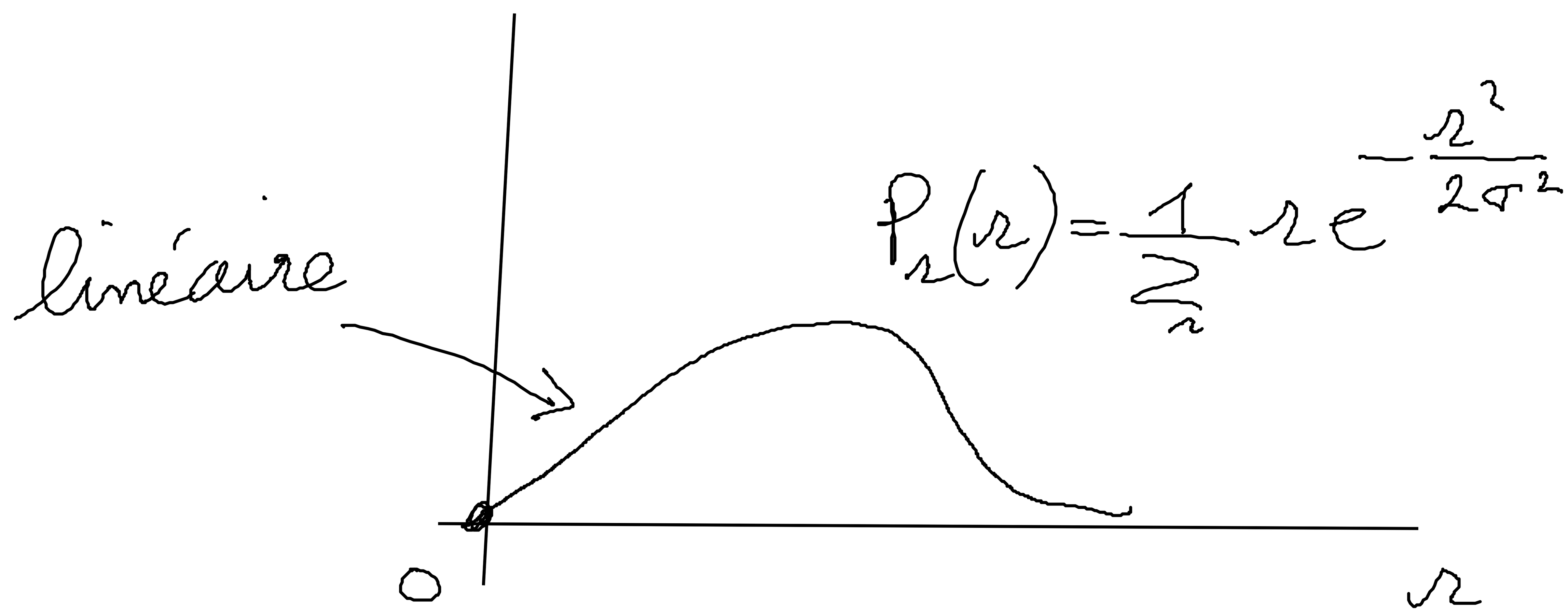
r fixé

r fixé

on intègre θ seulement

$$= \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{Z^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} d\theta\right) r\,dr = \frac{2\pi}{Z^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r\,dr$$

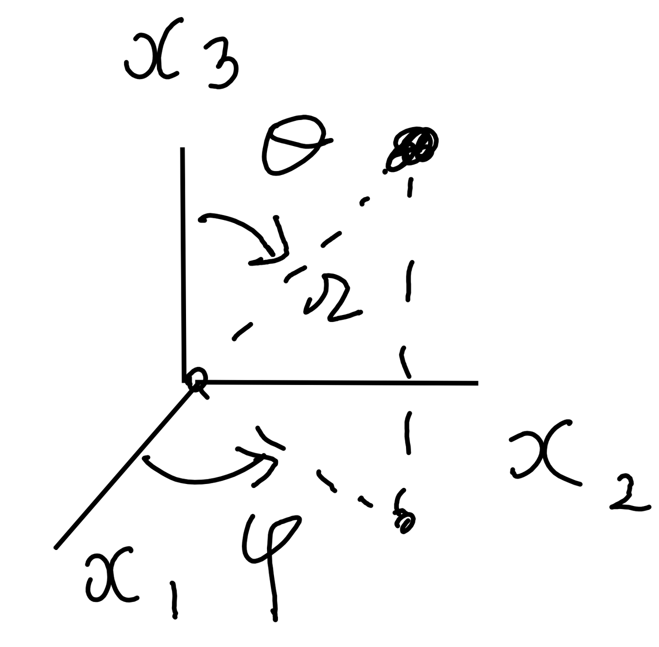
la densité est $P_r(r) = \frac{1}{Z_r}\, r\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$, $\frac{1}{Z_r} = \frac{2\pi}{Z^2}$



• De même pour $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

avec $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ aléatoires indépendants selon $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$,

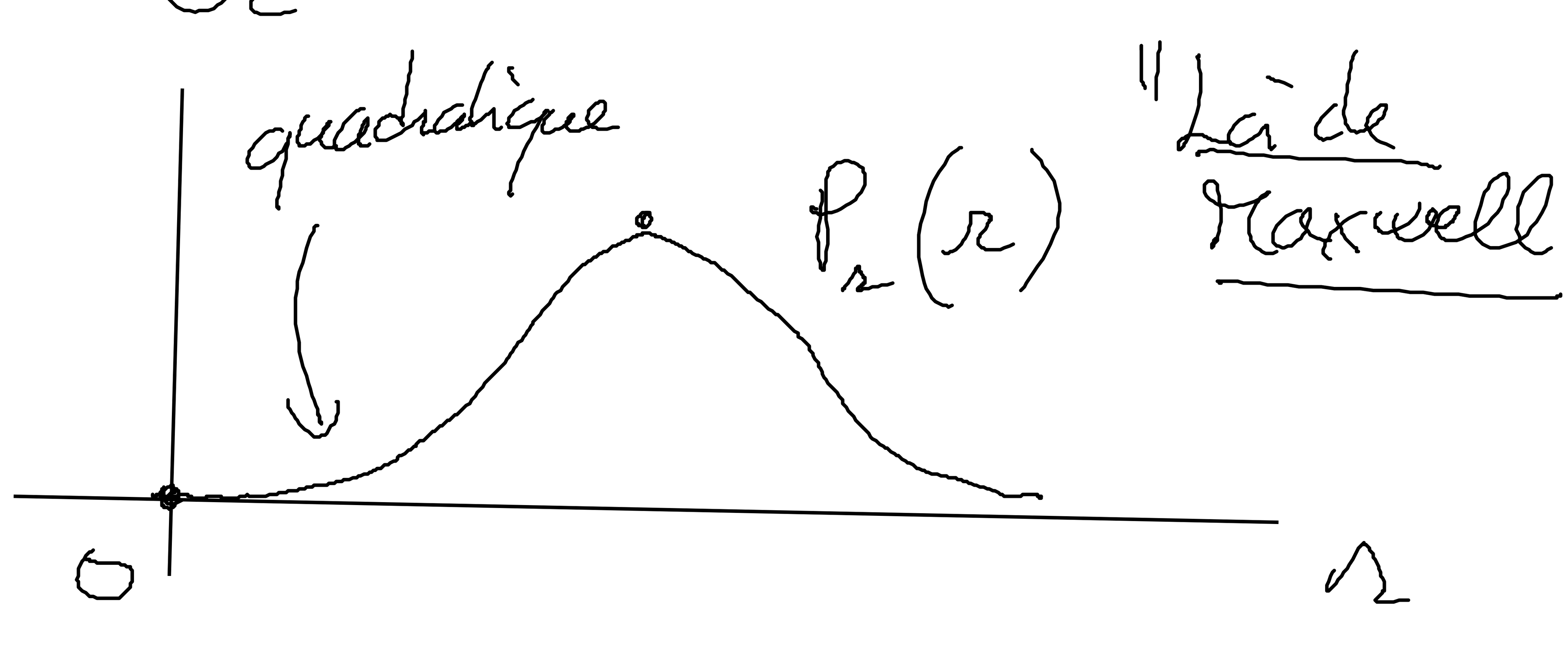
on a $$P_r(r)\,dr = \int_{\text{sur } \theta, \varphi \text{ avec } r \text{ fixé}} \frac{1}{Z} e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{Z} e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{Z} e^{-\frac{x_3^2}{2\sigma^2}}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$



$$= \left(\int \frac{1}{Z^3} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \underbrace{\sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{\text{coord. sphériques}} \right) r^2\, dr$$

$$= \frac{1}{Z_r}\, r^2\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\, dr$$

avec $\frac{1}{Z_r} = \frac{4\pi}{Z^3}$



• La valeur de r la plus probable est l'abscisse du maximum de $P_r(r) = \frac{1}{Z} r^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$

$$\frac{dP_r}{dr} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2r e^{-r^2/2\sigma^2} + r^2 \left(-\frac{2r}{2\sigma^2}\right) e^{-r^2/2\sigma^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2 - \frac{r^2}{\sigma^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \sqrt{2}\,\sigma$$

Moyenne : $$\mathbb{E}(r) := \int_0^\infty r\, P_r(r)\, dr$$

$$= \frac{1}{Z_r} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \frac{4\pi (\sqrt{2})^4 \sigma^4}{Z^3} \underbrace{\left(\int_0^\infty X^3 e^{-X^2} dX\right)}_{1/2 \text{ d'après XCAS}}$$

avec $X := \frac{r}{\sqrt{2}\,\sigma}$

$$= \frac{4\pi\, 4\, \sigma^4}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^3\, 2} = \frac{2\sqrt{2}\,\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

donc

$$\mathbb{E}(r) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\,\sigma$$

③ Application $E = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2$, $\vec{v} \in R^3$

$$P(\vec{v}) = \frac{1}{2} e^{-\frac{E}{kT}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} \frac{\|\vec{v}\|^2}{\sigma^2}}$$

avec $\sigma^2 = \frac{kT}{m}$

a) D'après 2) la vitesse la plus probable est de l'ordre de

$$\sigma = \left(\frac{kT}{m_{O_2}}\right)^{1/2} \qquad (\text{précisement} : \sqrt{2}\,\sigma)$$

$$m_{O_2} = 32 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{N_A}$$

↑ nbre avogadro

$T = 300\,K$

$R = k N_A = 8{,}31\ J K^{-1}$

$$\sigma = \left(\frac{k N_A T}{m_{O_2} N_A}\right)^{1/2} = \left(\frac{8{,}31\ J \cdot K^{-1}\quad 300\,K}{32 \cdot 10^{-3}\ kg}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{8{,}31 \cdot 3}{3{,}2} 10^4\right)^{1/2} m/s$$

$$= 279\ m/s = 1000\ km/h.$$

qui est l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse des molécules.

b) Supposons qu'une molécule fluorescente émet une longueur d'onde λ.

Si la molécule s'éloigne à la vitesse $v \ll c$ d'après l'effet Doppler, on reçoit la longueur d'onde $\lambda' = \lambda \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2}$ avec $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$

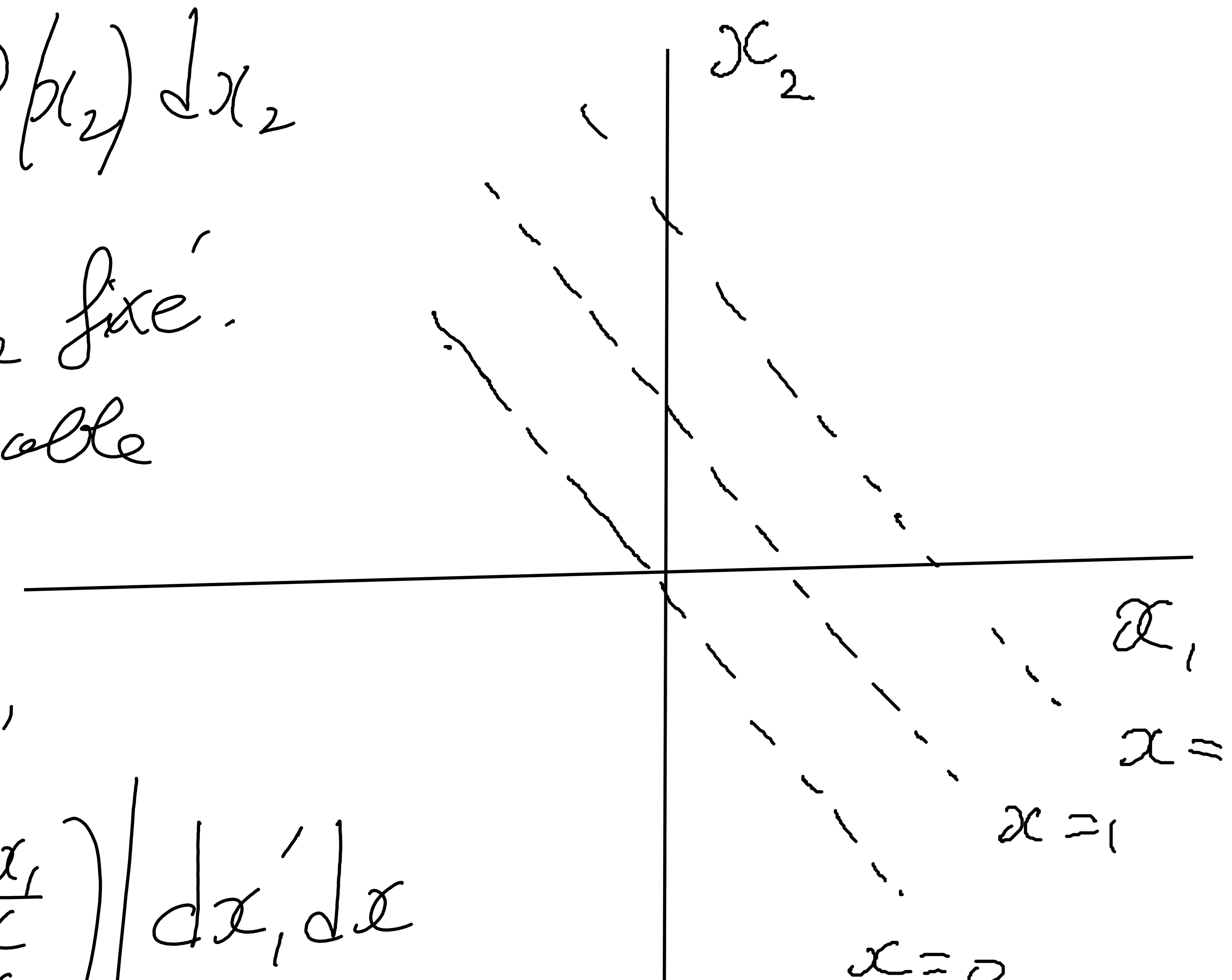
donc
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} - 1$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2}\beta + o(\beta)\right)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\beta + o(\beta)\right) - 1$$
$$= \beta + o(\beta)$$
$$= \frac{v}{c} = \frac{1}{c}\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}$$

ie
$$\boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{c}\left(\frac{kT}{m}\right)^{1/2}} = \frac{279 \text{ m/s}}{3.10^8 \text{ m/s}} \simeq 10^{-6}$$

(4) Commençons par montrer 3 résultats (lemmes).

Lemme (a) x_1, x_2 V.A. indépendantes de lois $P_1(x_1)$, $P_2(x_2)$.
alors $x = x_1 + x_2$ a la loi :
$$P(x) = (P_1 * P_2)(x) \quad \text{(produit de convolution)}$$

d'après le cours,
$$P(x)\, dx = \int P_1(x_1)\, dx_1\, P(x_2)\, dx_2$$
avec $x = x_1 + x_2$ fixé.



faisons le changement de variable
$$(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1', x)$$
avec $\begin{cases} x_1 = x_1' \\ x_2 = x - x_1' \end{cases}$

on a
$$dx_1\, dx_2 = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1'} & \frac{\partial x_1}{\partial x} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} & \frac{\partial x_2}{\partial x} \end{pmatrix} \right| dx_1'\, dx$$
$$= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right| dx_1'\, dx = dx_1'\, dx$$

$$P(x)\, dx = \left(\int P_1(x_1')\, P_2(x_2)\, dx_1' \right) dx \quad \text{avec } x \text{ fixé}$$
$$= \left(\int P_1(x_1')\, P_2(x - x_1')\, dx_1' \right) dx$$

donc $P = P_1 * P_2$.

$$\boxed{\underline{\text{Lemme}}\ (b)\quad \mathcal{F}(P_1 * P_2) = (\mathcal{F}P_1)(\mathcal{F}P_2)\cdot\sqrt{2\pi}}$$

$\underline{\text{preuve}}$:
$$\left(\mathcal{F}(P_1 * P_2)\right)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i\xi x}(P_1 * P_2)(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-i\xi x}\int P_1(x_1)\,P_2(x - x_1)\,dx_1\,dx$$

posons $x_2 = x - x_1$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\iint e^{-i\xi(x_1 + x_2)}P_1(x_1)\,P_2(x_2)\,dx_1\,dx_2 = \sqrt{2\pi}\,(\mathcal{F}P_1)(\xi)\,(\mathcal{F}P_2)(\xi)$$

☒

$$\boxed{\begin{array}{l}\underline{\text{Lemme (c)}}\ \text{si}\quad \psi(x) = e^{i\xi_0 x}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ \text{alors}\quad (F\psi)(\xi) = \sigma\, e^{i(\xi_0-\xi)\mu}\, e^{-\frac{\sigma^2}{2}(\xi-\xi_0)^2}\end{array}}$$

<u>preuve</u> : $(F\psi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\xi x}\, \psi(x)\, dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i(\xi_0-\xi)x}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

posons $X = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i(\xi_0-\xi)(\sqrt{2}\sigma X+\mu)}\, e^{-X^2}\, dX\, (\sqrt{2}\sigma)$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\, e^{i(\xi_0-\xi)\mu} \int e^{-X^2 + X\left(i(\xi_0-\xi)\sqrt{2}\sigma\right)} dX$$

: intégrale Gaussienne

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-X^2+BX}\, dX = \sqrt{\pi}\, e^{B^2/4}$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\, e^{i(\xi_0-\xi)\mu}\ \sqrt{\pi}\, e^{B^2/4}$$

avec $B = i(\xi_0-\xi)\sqrt{2}\,\sigma$

$B^2 = -2\sigma^2(\xi_0-\xi)^2$

$$= \sigma\, e^{i(\xi_0-\xi)\mu}\, e^{-\frac{2\sigma^2}{4}(\xi-\xi_0)^2}$$

∎

Supposons $x = x_1 + x_2$

avec $P_1(x_1) = \frac{1}{Z_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}$

$P_2(x_2) = \frac{1}{Z_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}$

alors $P(x) = (P_1 * P_2)(x)$: d'après Lemme (a)

$P = \mathcal{F}^{-1}\left((\mathcal{F}P_1)\, \mathcal{F}(P_2)\right)$: d'après Lemme (b)

$(\mathcal{F}P_1)(\xi) = \frac{\sigma_1}{Z_1} e^{-i\xi\mu_1} e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2\xi^2}$

: d'après Lemme (c)

donc

$$P(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{Z_1 Z_2} e^{-i\xi(\mu_1+\mu_2)} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2}\right)(x)$$

$= \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$: d'après Lemme (c)

$$\boxed{\text{avec } \begin{cases} \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ \mu = \mu_1 + \mu_2 \end{cases}}$$