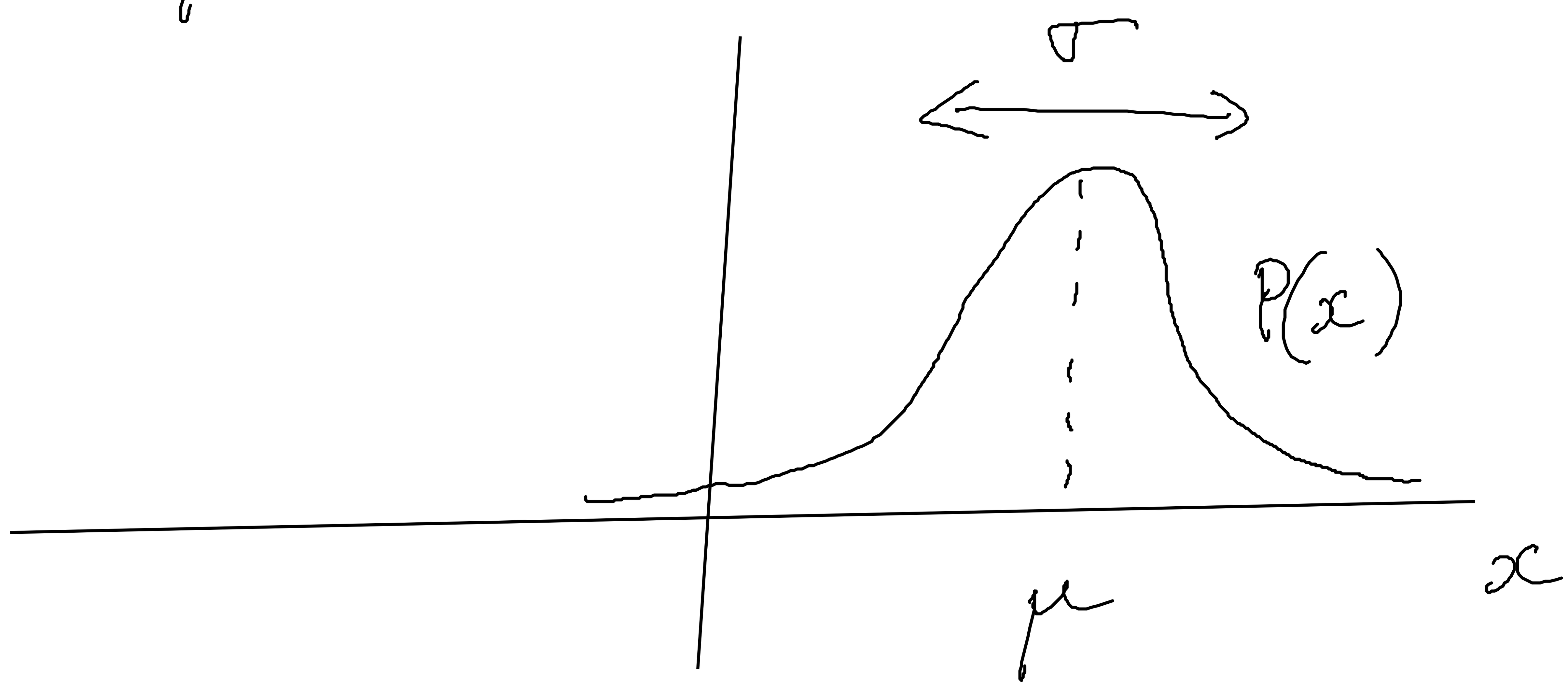
Loi Normale

2019

$$P(x) := \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$: densité de Probabilité

avec $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.



① . $1 = \int_{\mathbb{R}} P(x)\,dx \iff Z = \int e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

changement de variable $X := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

donc $dX = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma}\,dx$

$$Z = \sqrt{2}\sigma \int e^{-X^2}\,dX = \sqrt{2\pi}\,\sigma$$

. Espérance : $\mathbb{E}(x) = \int_{\mathbb{R}} x\,P(x)\,dx = \int (x-\mu)P(x)\,dx + \mu \int P(x)\,dx$

$$\underset{\substack{\text{changement} \\ x' = x+\mu}}{=} \int \underbrace{x' P(x'+\mu)}_{\substack{\text{fonction impaire} \\ \text{donc intégrale nulle}}} dx' + \mu = \mu$$

Variance $\mathbb{E}\left((x-\mu)^2\right) = \int (x-\mu)^2 P(x)\,dx$

$$= \frac{(\sqrt{2}\sigma)^2(\sqrt{2}\sigma)}{Z}\left(\underbrace{\int X^2 e^{-X^2} dX}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\right)$$

car soit $I_\alpha = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha Y^2} dY \quad , \quad X = \sqrt{\alpha}\, Y$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int e^{-X^2} dX = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi}$$

$$\frac{dI_\alpha}{d\alpha} = -\int Y^2 e^{-\alpha Y^2} dY = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{3/2}}$$

donc $\mathbb{E}\left((x-\mu)^2\right) = \frac{(\sqrt{2}\sigma)^2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sigma^2$

Soit x_1, x_2 variables aléatoires suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

$$\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$r = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geqslant 0.$$

On utilise les coordonnées polaires

$$\begin{cases} x_1 = r \cos\theta \\ x_2 = r \sin\theta \end{cases}$$

$$P(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2$$