(1) $x = (x_1, x_2, \dots, x_T)$ avec $x_t \in \{-1, 1\}$

évènements indépendants,

$p(-1) = 1/2, \qquad p(+1) = +1/2$

donc

$$p(x) = p(x_1) \cdot p(x_2) \cdots p(x_T) = \left(\frac{1}{2}\right)^T$$

$$S_x(T) := \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} x_t$$

$$P_T := \sum_{x \in \{-1,1\}^T} p(x)\, \delta_{S_x(T)} = \frac{1}{2^T} \sum_{x \in \{1,1\}^T} \delta_{S_x(T)}$$

a) $$\langle \psi | P_T \rangle = \frac{1}{2^T} \sum_{x \in \{-1,1\}^T} \langle \psi | \delta_{S_x(T)} \rangle$$

$$= \frac{1}{2^T} \sum_{x \in \{-1,1\}^T} \overline{\psi(S_x(T))}$$

b) $\psi_k(S) = \exp(i k S)$ avec $k \in \mathbb{R}$. "Mode de Fourier"

$$\langle \psi | P_T \rangle = \frac{1}{2^T} \sum_{x \in \{-1,1\}^T} \exp(-i k S_x(T))$$

$$= \frac{1}{2^T} \sum_{x \in \{-1,1\}^T} \exp\left(-i \frac{k}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{T} x_t\right)$$

$$= \frac{1}{2^T} \sum_{x_1, \dots, x_T} e^{-i \frac{k}{\sqrt{T}} x_1} e^{-i \frac{k}{\sqrt{T}} x_2} \dots e^{-i \frac{k}{\sqrt{T}} x_T}$$

$$= \frac{1}{2^T} \prod_{t=1}^{T} \left(\sum_{x_t \in \{-1,1\}} e^{-i \frac{k}{\sqrt{T}} x_t} \right)$$

$$= \frac{1}{2^T} \prod_{t=1}^{T} \left(e^{-i \frac{k}{\sqrt{T}}} + e^{+i \frac{k}{\sqrt{T}}} \right)$$

$$= \frac{1}{2^T} \left(2 \cos\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)\right)^T = \left(\cos\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)\right)^T$$

c) $\left(\cos\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)\right)^T = \exp\left(T \log\left(\cos\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)\right)\right)$ car $X = e^{\log X}$

$$= \exp\left(T \log\left(1 - \frac{k^2}{2T} + O\left(\frac{k^4}{T^2}\right)\right)\right)$$

car $\cos(X) = 1 - \frac{1}{2} X^2 + O(X^4)$

$$= \exp\left(-\frac{k^2}{2} + O\left(\frac{k^4}{T}\right)\right) = \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right)\left(1 + O\left(\frac{k^4}{T}\right)\right)$$

car $\log(1+X) = X + O(X^2)$, car $e^X = 1 + O(X)$

(2) Soit φ une fonction test quelconque.

Il faut montrer que :

$$\langle \varphi | P_T \rangle \xrightarrow[T \to \infty]{} \langle \varphi | G_\sigma \rangle$$

on décompose φ en modes de Fourier.

$$\varphi(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi_k(S)\, \tilde{\varphi}(k)\, dk \quad , \quad \varphi_k(S) = e^{ikS}$$

alors

$$\langle \varphi | P_T \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \langle \varphi_k | P_T \rangle\, \overline{\tilde{\varphi}(k)}\, dk$$

$$\underset{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}k^2} \left(1 + O\left(\frac{k^4}{T}\right)\right) \overline{\tilde{\varphi}(k)}\, dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{1}{2}k^2} \overline{\tilde{\varphi}(k)}\, dk + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

et car P_T est une mesure (thm Levy)

$$= \langle \tilde{\varphi} | \tilde{G} \rangle + O\left(\frac{1}{T}\right) \quad \text{avec } \tilde{G}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}k^2}$$

on a $$G(S) := \left(F^{-1}\tilde{G}\right)(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikS}\, \tilde{G}(k)\, dk$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int e^{ikS} e^{-\frac{1}{2}k^2}\, dk \quad : \text{intégrale Gaussienne}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int e^{-(Ak^2 + Bk)}\, dk \quad \text{avec } A = \frac{1}{2}, \; B = -iS$$

$$B^2/4A = -\frac{S^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{B^2/4A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{S^2}{2}}$$

alors

$$\langle \varphi \,|\, P_T \rangle \xrightarrow[T\infty]{} \langle \tilde{\varphi} \,|\, \tilde{G} \rangle = \langle F\varphi \,|\, FG \rangle$$

$$= \langle \varphi \,|\, G \rangle$$: car F est unitaire

donc $$\boxed{P_T \xrightarrow[T\to\infty]{} G \qquad \text{avec } G(S) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{S^2}{2}} \qquad \sigma = 1}$$

③ <u>Cas général.</u>

Soit $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes

de même mesure de probabilité $P(x)\,dx$,

d'espérance $\mu = \mathbb{E}(x) < \infty$ finie

et écart type $\sigma = \left(\mathbb{E}\left((x-\mu)^2\right)\right)^{1/2} < \infty$

fini.

On pose : $S_T := \frac{1}{\sqrt{T}}\left((x_1 + x_2 + \dots + x_T) - T\mu\right)$

on note $P_T = P_T(S)\,dS$ sa mesure de probabilité.

- <u>On veut montrer</u> que $P_T \xrightarrow[T\to\infty]{} \underbrace{\frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{S}{\sigma}\right)^2} dS}_{\text{la normale.}}$

au sens des distributions.

cad pour toute fonction test $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$, montrer que :

$$\langle \varphi \mid P_T \rangle \xrightarrow[T]{} \left\langle \varphi \middle| \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{S}{\sigma}\right)^2\right)\right\rangle \ ?$$

- Pour simplifier les notations, on <u>va supposer $\mu = 0$</u>.

(cela revient à remplacer x_t par $x_t - \mu$).

• Rappels :

On note $(\mathcal{F}\varphi)(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iks} \varphi(s)\, ds$

la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ d'une fonction $\varphi(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

On a $\varphi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{iks} (\mathcal{F}\varphi)(k)\, dk$: formule d'inversion de Fourier.

et $\langle \mathcal{F}\varphi_1 | \mathcal{F}\varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle$: $\forall \varphi_1, \varphi_2$

càd $\mathcal{F}$ est unitaire.

• On a $P_T(s)\, ds = \prod_{t=1}^{T} P(x_t)\, dx_t$: produit car variables indépendantes

donc

$(\mathcal{F} P_T)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iks} P_T(s)\, ds$: "fonction caractéristique"

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ik\frac{1}{\sqrt{T}}(x_1 + \dots + x_T)} \prod_{t=1}^{T} P(x_t)\, dx_t$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int e^{-i\frac{k}{\sqrt{T}} x} P(x)\, dx \right)^T$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi}\, (\mathcal{F}p)\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right) \right)^T$$

on considère pour $\frac{k}{\sqrt{T}} \ll 1$, le développement de Taylor :

$$(\mathcal{F}p)\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right) = (\mathcal{F}p)(0) + \frac{k}{\sqrt{T}} (\mathcal{F}p)'(0) + \frac{1}{2}\frac{k^2}{T} (\mathcal{F}p)''(0)$$

$$+ O\left(\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)^3\right)$$

on a $(\mathcal{F}p)(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int p(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$(\mathcal{F}p)'(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (-ix)\, p(x)\, dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}(x) = 0$$

$$(\mathcal{F}p)''(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (-ix)^2 p(x)\, dx = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int x^2 p(x)\, dx}_{\mathbb{E}_p(x^2) = \sigma^2}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma^2$$

donc

$$\left(\sqrt{2\pi}\, (\mathcal{F}p)\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)\right)^T = \left(\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k^2 \sigma^2}{T}\right) + O\left(\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)^3\right) \right)^T$$

$$= \exp\left(T \ln \left(1 - \frac{1}{2}\frac{k^2\sigma^2}{T} + O\left(\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)^3\right) \right) \right)$$

or $\ln(1+X) = X + O(X^2)$

donc

$$= \exp\left(T\left(-\frac{1}{2}\frac{k^2\sigma^2}{T} + O\left(\left(\frac{k}{\sqrt{T}}\right)^3\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}k^2\sigma^2 + O\left(\frac{k^3}{\sqrt{T}}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}k^2\sigma^2\right) \cdot \underbrace{\exp\left(O\left(\frac{k^3}{\sqrt{T}}\right)\right)}_{1 + O\left(\frac{k^3}{\sqrt{T}}\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}k^2\sigma^2\right) + O\left(\frac{k^3}{\sqrt{T}}\right)$$

Ainsi

$$(\mathcal{F}P_T)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}k^2\sigma^2\right) + O\left(\frac{k^3}{\sqrt{T}}\right)$$

$$= \widetilde{G}_\sigma(k) + O\left(\frac{k^3}{\sqrt{T}}\right)$$

avec $\widetilde{G}_\sigma(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}k^2\sigma^2\right)$

Soit $G_\sigma(s) = \left(F^{-1}\tilde{G}_\sigma\right)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{iks} \tilde{G}_\sigma(k)\, dk$

$$= \frac{1}{2\pi} \int e^{iks} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2} dk$$: intégrale Gaussienne comme ci-dessus

$$= \frac{1}{2\pi} \int e^{-(Ak^2 + Bk)} dk$$ avec $A = \frac{1}{2}\sigma^2$, $B = -is$

$$\frac{B^2}{4A} = -\frac{s^2}{2\sigma^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{A}}\, e^{B^2/4A} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2}$$

$$\boxed{G_\sigma(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2} \quad \text{: Gaussienne}}$$

Donc on a : $\left(\tilde{G}_\sigma\right)(k) = \left(F G_\sigma\right)(k)$,

$$\boxed{\left(F P_T\right)(k) = \left(F G_\sigma\right)(k) + O\left(\frac{k^3}{\sqrt{T}}\right) \xrightarrow[T \to \infty]{} \left(F G_\sigma\right)(k)}$$

Ce calcul a montré que la transformée de Fourier de P_T converge ponctuellement (cad à k fixé) vers une Gaussienne.

Par ailleurs, on sait que P_T est une mesure donc $(\mathcal{F}P_T)(k)$ est bornée uniformément en k.

Cela implique que pour une fonction test $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}\varphi)(k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 ,$$

donc
$$\langle \varphi | P_T \rangle = \langle \mathcal{F}\varphi | \mathcal{F}P_T \rangle$$
$$\xrightarrow[T\to\infty]{} \langle \mathcal{F}\varphi | \mathcal{F}G_\sigma \rangle = \langle \varphi | G_\sigma \rangle$$

ainsi $\boxed{P_T \xrightarrow[T\to\infty]{} G_\sigma \quad \text{au sens des distributions.}}$

<u>rem</u> : le dernier argument correspond au <u>thm. de continuité de Levy</u> en probabilités.