TD 6. **Les Fermions et les Bosons. Généralités**

Références : [3], [1], [2].

Table des matières

1 Fermions et Bosons 1

2 Comparaison des statistiques pour des particules dans un puits de potentiel harmonique 4

Dans ce TD on considère les "statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein" qui concerne le comportement collectif des particules élémentaires observées dans la nature. On définira plus loin la définition précise de Fermion/Boson. Référence : Particule data book du CERN.

- On observe que chaque **famille de particule élémentaire** est d'un type particulier, **Fermion** ou **Boson**. Par exemple les électrons ou les quarks sont des Fermions. Les photons γ ou les gluons g sont des bosons. La plupart des particules élémentaires sont instables, i.e. se désintègrent en d'autres particules stables. Par exemple le muon se désintègre ainsi $\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu_e} + \nu_\mu$ en $\tau \sim 2 \times 10^{-6} s$ ref. **Les seules particules élémentaires stables** sont électrons e^-, neutrinos ν, photons γ, et quarks q, gluons g (mais quarks et gluons n'existent pas à l'état individuel).
- Certaines particules élémentaires (les particules stables) s'assemblent pour former des particules composées très variées, par exemple les protons et neutrons sont des assemblées de quarks et gluons, les noyaux atomiques sont des assemblages de protons et neutrons, les atomes sont des assemblages de noyaux et électrons, les molécules sont des assemblages d'atomes, etc.. (les cristaux, cellules vivantes, fluides sont des assemblages de molécules)
- En première approximation (i.e. à faible dilution et petit nombre de degrés de liberté), un composé de **nombre impair de Fermions a les propriétés d'un Fermion** et un composé de **nombre pair de Fermions a les propriétés d'un Boson**. Par exemple, le proton et le neutron sont chacun composés de gluons (Bosons) et de trois quarks (Fermions), ce sont donc des Fermion. Le noyau He4 est composé de 2 protons et 2 neutrons (Fermions), c'est donc un Boson. Le noyau He3 est composé de 2 protons et 1 neutron, c'est donc un Fermion.
- Toutes les particules élémentaires possèdent un moment angulaire appelé **spin** ou **moment angulaire intrinsèque** caractérisé par son intensité $s \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\right\}$ si la masse est $m > 0$ (et si la masse est $m = 0$, le spin appelé hélicité est caractérisé par $s \in \left\{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \ldots\right\}$) [4, p.148]. Il apparait que **les Fermions ont un spin demi-entier** $s \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right\}$ et **les Bosons ont un spin entier** $s \in \{0, 1, 2 \ldots\}$ (idem dans le cas $m = 0$). Ce fait s'appelle « le théorème spin-statistique ».

1 Fermions et Bosons

vidéo de la solution.

Ce problème est un rappel de cours. Ref : Par exemple, Section 5.3 de ce cours.

1.1 Définition pratique des Fermions et Bosons

On donne une **définition des Fermions et des Bosons** dans le cadre de la mécanique quantique en définissant l'espace de Fock Fermionique et l'espace de Fock Bosonique des états possibles $(\psi_m)_m$ en terme d'états à une particule $(\varphi_n)_{n \geq 1}$.

Considérons une particule élémentaire Fermion ou Boson d'une famille donnée (par exemple un électron ou un photon). En mécanique quantique cette particule est décrite par un vecteur $\psi \in \mathcal{H}_1$ (sa fonction d'onde) dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ (indice 1 pour signifier que l'on considère $N = 1$ particule). On note $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ **une base orthonormée quelconque de cet espace $\mathcal{H}_1$ à une particule**. Les états $(\varphi_n)_n$ ne sont pas forcément des états stationnaires. Par exemple on peut penser à φ_n comme un paquet d'onde en (q, p), caractérisant la position q, impulsion p, et aussi le spin d'une particule. Autre exemple, $(\varphi_n)_n$ peut être la base des états orbitaux de l'électron dans un atome d'hydrogène (et son spin).

On considère maintenant **plusieurs de particules d'une même famille** (ex : des électrons). Elles ont toutes les même caractéristiques physique : même masse, charge, spin etc.. on dit qu'elles sont **identiques** et **indiscernables**. Conformément à l'expérience, on postule :

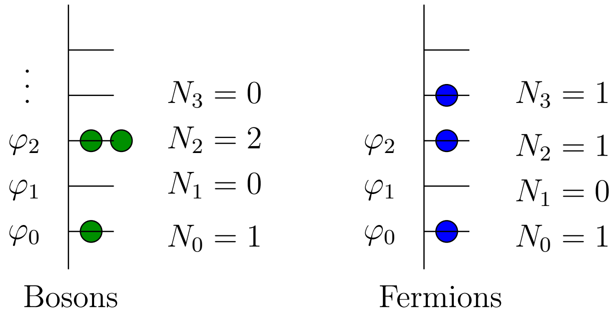

FIGURE 1.1 – On note N_n le nombre de particules dans l'état φ_n. $N = \sum_n N_n$ est le nombre total. Exemples d' un état $m = (N_0, N_1, N_2, N_3, \dots)$ à $N = 3$ particules. Dans le cas des Fermions on a la contrainte $0 \leq N_n \leq 1$.

Définition 1.1. Dans le cas des **Bosons**, chaque état possible m d'un ensemble de plusieurs particules est caractérisé par **le nombre de particules** $N_n \geq 0$ **dans chaque état individuel** φ_n avec $n \geq 0$. Ainsi un état possible est noté

$$m = (N_0, N_1, N_2, \dots), \quad \text{avec } N_n \geq 0.$$

Le nombre total de particules dans cet état m est donc

$$N(m) = \sum_{n \geq 0} N_n$$

Ces états m forment une base orthonormée de l'espace quantique de tous les états possibles, appelé **espace de Fock Bosonique** $\mathcal{F}$. Autrement dit, un état quelconque de plusieurs particules est une combinaison linéaire de ces états de base m. Voir figure 1.1.

Définition 1.2. Dans le cas des **Fermions**, chaque état possible m d'un ensemble de plusieurs particules est caractérisé par **le nombre de particules** $N_n \geq 0$ **dans chaque état individuel** φ_n avec $n \geq 0$, mais avec **la contrainte supplémentaire que** $N_n \leq 1$. Ainsi un état possible est noté

$$m = (N_0, N_1, N_2, \dots), \quad \text{avec } 0 \leq N_n \leq 1.$$

Le nombre total de particules dans cet état m est donc

$$N(m) = \sum_{n \geq 0} N_n$$

Ces états m forment une base orthonormée de l'espace quantique de tous les états possibles, appelé **espace de Fock Fermionique** $\mathcal{F}$. Autrement dit, un état quelconque de plusieurs particules est une combinaison linéaire de ces états de base m. Voir figure 1.1.

Remarque 1.3. On note $\mathcal{F}_N$ l'espace de Fock à nombre fixé $N \geq 0$ de particules. Ainsi

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 \dots \tag{1.1}$$

en particulier $\mathcal{F}_1 = \mathcal{H}_1$ est l'espace à une particule et $\mathcal{F}_0$ est un espace à zéro particule, contenant un seul état $m = (0, 0, \dots)$ appelé état du **vide quantique**.

1.2 Ensemble canonique

On suppose que le système étudié a un nombre N fixé de particules identiques. L'énergie est une quantité conservée dans les interactions, mais on suppose que le système peut échanger de l'énergie avec l'extérieur et qu'il est dans un état d'équilibre statistique à la température T imposée par l'extérieur. La mesure de probabilité de Boltzmann, (appelé “ensemble canonique”, vue au TD précédents) est

$$P(m) := \frac{1}{Z_N} e^{-\beta E(m)} \tag{1.2}$$

avec $\beta = \frac{1}{kT}$ et $Z_N(\beta)$ une constante de normalisation qui dépend de β.

1. Montrer que l'énergie moyenne du système $\langle E\rangle := \sum_m P(m) E(m)$ est donnée par

$$\langle E\rangle = -\partial_\beta \ln Z_N$$

2. Montrer que l'entropie $S := -k \sum_m P(m) \ln P(m)$ est donnée par

$$S = \frac{1}{T}\langle E\rangle + k \ln Z_N$$

1.3 Ensemble grand canonique

On suppose que le nombre de particules est conservé par les interactions (ce n'est pas toujours le cas, par exemple l'interaction électromagnétique ne conserve pas le nombre de photons). Mais on suppose que le système peut échanger de l'énergie et des particules avec l'extérieur. La mesure de probabilité de Boltzmann (appelé "ensemble grand canonique") est

$$P(m) := \frac{1}{\Xi} e^{-\beta(E(m)-\mu N(m))}, \tag{1.3}$$

où μ est le potentiel chimique imposé par l'extérieur et $\Xi(\beta,\mu)$ une constante de normalisation qui dépend de β,μ.

1. Montrer que

$$\Xi = \sum_{N\geq 0} e^{N\beta\mu} Z_N.$$

2. Montrer que l'énergie moyenne du système $\langle E\rangle := \sum_m P(m) E(m)$ est donnée par

$$\langle E\rangle = -\partial_\beta \ln \Xi + \mu\langle N\rangle$$

   où $\langle N\rangle = \sum_m P(m) N(m)$ est le nombre moyen de particules.

1.4 Distribution de Bose-Einstein et de Fermi-Dirac

On considère maintenant le **cas particulier de particules indépendantes** (i.e. sans interaction mutuelle) qui sont des Bosons ou des Fermions. On suppose que $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ sont les états propres d'énergie pour une particule seule et on note ϵ_n l'énergie de φ_n, i.e. $\hat{H}\varphi_n = \epsilon_n\varphi_n$ avec $\epsilon_0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_2 \leq \ldots$.

On note $m = (N_0, N_1, N_2, \ldots)$ un état du système comme expliqué ci-dessus.

1. Exprimer l'énergie totale $E(m)$ de l'état m et le nombre total de particules $N(m)$ du système à partir de $(N_n)_n$ et $(\epsilon_n)_n$.
2. On considère la distribution de Boltzmann de l'ensemble grand canonique (1.3). Montrer que la probabilité d'avoir N_n particules dans l'état φ_n est

$$P_n(N_n) = \frac{1}{\xi_n} e^{-\beta N_n(\epsilon_n-\mu)}$$

   avec

$$\xi_n = \sum_{0\leq N_n(\leq 1)} e^{-\beta N_n(\epsilon_n-\mu)}$$

   et où la contrainte supplémentaire $N_n \leq 1$ s'applique au cas des Fermions.
3. Dans le cas des Bosons, quelle contrainte doit vérifier μ par rapport au spectre $(\epsilon_n)_n$?
4. Montrer que le nombre moyen de particules $\langle N_n\rangle$ dans un état φ_n est $\langle N_n\rangle = \frac{1}{\beta}\partial_\mu \ln \xi_n$.
5. Calculer $\langle N_n\rangle$ pour les Bosons (**appelée distribution de Bose-Einstein**) en fonction de β, ϵ_n, μ et l'expression simplifiée si $\beta(\epsilon_n-\mu) \gg 1$. Tracer $\langle N_n\rangle$ en fonction de ϵ_n.
6. Même question pour les Fermions (**distribution de Fermi-Dirac**).

1.5 (Optionnel) Statistiques quantiques

Des solutions et plus d'explications dans cette référence : Cours de MQ, chap. 5.3

Rappel : on a noté $\mathcal{F}_1 = \mathcal{H}_1$ l'espace (quantique) à une particule et $\mathcal{F}_N$ "l'espace de Fock" quantique à N particules. On note $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ une base arbitraire de $\mathcal{H}_1$.

1. Si la dimension de l'espace à une particule est fini : $\dim\mathcal{H}_1 = d$, calculer $\dim\mathcal{F}_N$ pour les Bosons et pour les Fermions.

2. En mécanique quantique, on donne la définition suivante des états possible des **bosons.** Ce sont des combinaisons linéaires des états suivants

$$\psi_m = \hat{S}\left(\varphi_{n_1} \otimes \varphi_{n_2} \ldots \otimes \varphi_{n_N}\right)$$

avec $\varphi_{n_j} \in \mathcal{H}_1$ et $\hat{S}$ est l'opérateur de symétrisation

$$\hat{S} := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} \hat{\sigma}$$

où S_N est le groupe des permutations de N éléments et $\hat{\sigma}$ est l'opérateur qui permute les vecteurs du produit tensoriel, ex : $\hat{\sigma}\left(\varphi_1 \otimes \varphi_2\right) = \varphi_2 \otimes \varphi_1$. De même les états possible des **Fermions** sont les combinaisons linéaires des états suivant

$$\psi_m = \hat{A}\left(\varphi_{n_1} \otimes \varphi_{n_2} \ldots \otimes \varphi_{n_N}\right)$$

avec $\varphi_{n_j} \in \mathcal{H}_1$ et $\hat{A}$ est l'opérateur de anti-symétrisation

$$\hat{A} := \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma)\, \hat{\sigma}$$

avec $\epsilon(\sigma) = \pm 1$ la signature de la permutation. Montrer que ces définitions sont équivalentes aux précédentes. Pour cela, montrer qu'une base de $\mathcal{F}_N$ des bosons est

$$\psi_m = \hat{S}\left(\varphi_{n_1} \otimes \varphi_{n_2} \ldots \otimes \varphi_{n_N}\right)$$

avec $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_N$ et est caractérisé par $m = (N_0, N_1, N_2, \ldots)$ avec N_n que l'on exprimera. Montrer qu'une base de $\mathcal{F}_N$ des Fermions est

$$\psi_m = \hat{A}\left(\varphi_{n_1} \otimes \varphi_{n_2} \ldots \otimes \varphi_{n_N}\right)$$

avec $n_1 < n_2 < \ldots < n_N$ et est caractérisé par $m = (N_0, N_1, N_2, \ldots)$ avec N_n que l'on exprimera.

3. Montrer que pour $\sigma \in S_N$, $\hat{\sigma}\hat{S} = \hat{S}$ et $\hat{\sigma}\hat{A} = \hat{A}$.
4. Dans l'espace $\mathcal{H}^{\otimes N} := \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_1$, montrer que $\hat{S}^2 = \hat{S}$, $\hat{S}^\dagger = \hat{S}$ et donc $\hat{S}$ est un projecteur orthogonal sur le sous espace de Fock Bosonique $\mathcal{F}_N$. De même montrer que $\hat{A}$ est un projecteur orthogonal sur le sous espace de Fock Fermionique.

2 Comparaison des statistiques pour des particules dans un puits de potentiel harmonique

vidéo de la solution.
Le spectre de l'oscillateur harmonique quantique $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}K\hat{q}^2$ pour une particule à une dimension est

$$\epsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

avec la fréquence $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$. On posera $y = e^{-\beta\hbar\omega}$ et $x = \frac{kT}{\hbar\omega} = \frac{1}{\beta\hbar\omega}$.

1. On considère $N = 1$ particule (i.e. dans l'ensemble canonique). Calculer $Z_{N=1}$ défini en (1.2), en fonction de y.
2. On considère $N = 2$ particules (i.e. dans l'ensemble canonique), et successivement le cas des Bosons, des Fermions.
   (a) Calculer $Z_{N=2}$ défini en (1.2), en fonction de y.
   (b) Calculer $u := \frac{1}{\hbar\omega}\langle E\rangle$ en fonction de y et tracer l'allure des fonctions.
   (c) Calculer $\frac{1}{k}S$ en fonction de y et tracer l'allure des fonctions.

Références

[1] Roger Balian. *From microphysics to macrophysics : methods and applications of statistical physics*, volume 1,2. Springer Science & Business Media, 2007.

[2] L. Couture and R. Zitoun. *Physique statistique.* 1992.

[3] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. *Physique statistique.* 1989.

[4] S. Sternberg. *Group theory and physics.* Cambridge University Press, 1994.