TD 9. **Gaz de photons à l'équilibre thermique : loi de Planck.**

Références : [2, chap.7], [3, Chap.VI,p.818,p.919], [1, Tome II, chap.13, p.235]. Les mots entourés de couleurs dans ce document pdf ont un hyperlien vers wikipedia.

Table des matières

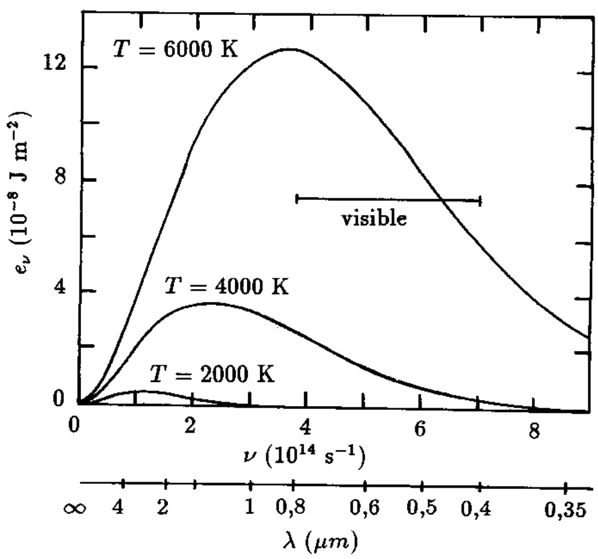
1 Loi de Planck : gaz de photons à l'équilibre thermique

vidéo de la solution

1.1 Introduction

Soit un volume V fixé, qui contient un gaz de photons à l'équilibre thermodynamique à la température T fixée. Cela signifie que ces photons sont en contact avec de la matière qui est à la température T, car il n'y a pas d'interaction directe entre les photons pouvant donner l'équilibre thermique.

La distribution d'énergie de ces photons étudiée ici s'appelle la **loi de Planck** ou **spectre du corps noir.** L'allure de ce spectre dépend de la température T. La position du maximum de ce spectre par rapport à l'intervalle des fréquences visible explique la couleur apparente du gaz de photons.



Exemple 1.1.

— A la surface du Soleil (blanc-jaune), le magma a la température $T = 6000^0 K$. L'étoile Bételgeuse qui est rouge a une température $T = 2400K$. L'étoile Bellatrix qui est bleue a la température de surface $T = 22000K$.
— Dans un four, on peut avoir $T = 600^0 K$. Cf [3, p826-917] pour une barre de fer. Le forgeron a des tables de couleurs, lui donnant la température, à partir de la couleur observée.
— Le rayonnement fossile de l'univers suit la loi de Planck pour $T = 2,725\,K \ \pm 0.002$. Attention, ce gaz de photons n'est pas à l'équilibre thermique car il ne subit plus d'interactions. Il ne s'agit donc pas d'une "véritable température".

1.2 Loi de Planck, 1900.

On va établir la loi de Planck qui donne la densité d'énergie $u(\omega)$ (par intervalle de fréquence et par unité de volume) d'un gaz de photons à l'équilibre thermique à la température T. Pour cela il faut considérer une théorie quantique du champ électromagnétique ("**théorie quantique des champs**").

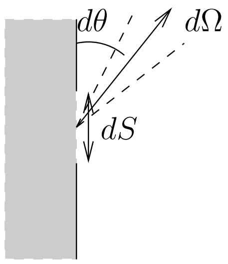
1. Considérant l'équation d'ondes pour le champ électromagnétique "classique" $\partial_t^2 \vec{E} = c^2 \Delta \vec{E}$ (idem pour $\vec{B}$) appliqué à une onde plane $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\left(\omega t + \vec{k}.\vec{x}\right)}$ déduire que la fonction Hamiltonien[1] est $\omega\left(\vec{x}, \vec{k}\right) = c\left\|\vec{k}\right\|$ sur l'espace des phases $\left(\vec{x}, \vec{k}\right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (aussi appelée "relation de dispersion").
2. Une onde plane (champ classique de la question 1) est comme un oscillateur harmonique classique de fréquence ω. (Réf : Voir ce cours d'introduction, chap2, section 2.2.4, ou ce [4]). D'après la quantification du champ électromagnétique , il faut le décrire par un oscillateur harmonique quantique, i.e. par des états quantique $\varphi_{\omega,N}$ d'énergie $E_{\omega,N} = \hbar\omega\left(N + \frac{1}{2}\right)$ où le niveau entier $N \in \mathbb{N}$ est appelé le nombre de photons. Pourquoi peut-on dire que les photons sont des bosons ?
3. La loi de Boltzmann, stipule que l'état $\varphi_{\omega,N}$ apparaît avec la probabilité $P\left(\varphi_{\omega,N}\right) = \frac{1}{Z_\omega}\exp\left(-\frac{E_{\omega,N}}{kT}\right)$. Appliquant la mesure $\int \frac{d\vec{x}d\vec{k}}{(2\pi)^3}$ sur les modes du champ classiques dans l'espace des phases, associée à la loi de Weyl et sans oublier les deux états de polarisations, montrer que l'énergie totale moyenne du gaz de photons à température T définit par
$$\langle E\rangle = 2\int \frac{d\vec{x}d\vec{k}}{(2\pi)^3}\sum_{N\geq 0} E_{\omega,N} P\left(\varphi_{\omega,N}\right)$$
peut s'écrire sous la forme
$$\langle E\rangle = V\int_0^\infty u_T(\omega)\,d\omega$$
avec la densité d'énergie par unité de volume $u_T(\omega)\,d\omega$ que l'on explicitera. Exprimer la densité $u_0(\omega)$ à $T = 0$K qui s'appelle **densité d'énergie du vide**. Montrer que la différence est
$$v_T(\omega)\,d\omega = \left(u_T(\omega) - u_0(\omega)\right)d\omega = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3\left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1\right)}$$
appelée **loi de Planck**.
4. Calculer l'énergie volumique du vide quantique électromagnétique dans l'intervalle de fréquence visible $\lambda \in [0.4\mu m, 0, 8\mu m]$.

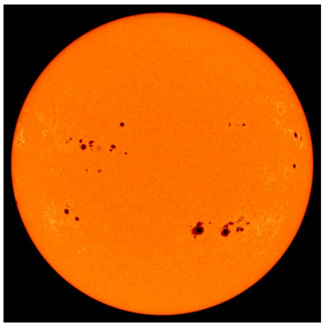
1. Pour comprendre pourquoi on l'appelle fonction Hamiltonien, voir ce cours, chapitre 1.

1.3 Le rayonnement du Soleil

Le rayonnement du Soleil a un spectre dont la composition est voisine de celle d'un "corps noir" de température $T = 6000$K.

1. On considère un élément de surface dS du Soleil. Déterminer la puissance rayonnée dW depuis cette surface, dans l'angle solide $d\Omega$, direction θ, en fonction de la densité volumique d'énergie $u(\omega)d\omega$? En déduire [2] **la radiance** qui est la puissance totale rayonnée vers le demi-espace, par unité de surface.





2. Déterminez la masse que le Soleil perd en 1 seconde ? Quel est le temps nécessaire pour que le Soleil voit sa masse diminuer de 1% ?
3. En assimilant la Terre à un second corps noir, déterminez sa température d'équilibre sous l'effet du rayonnement solaire ? [3]
4. Pourquoi le Soleil qui est une sphère nous parait il être un disque d'intensité uniforme ?

1.4 Loi du déplacement de Wien

[1, vol2, p.219]

1. A partir de la loi de Planck (densité volumique d'énergie unité de fréquence), montrez que la fréquence $\omega_{\max}$ correspondant au maximum de la distribution spectrale de Planck varie comme αT où T est la température du corps noir (loi de déplacement de Wien, 1896). Calculer [4] α. A quoi peut servir cette loi ?
2. Trouvez maintenant la longueur d'onde $\widetilde{\lambda}_{max}$ du maximum de la distribution de Planck en longueur d'onde : densité volumique d'énergie par unité de longueur d'ondes. Exprimer $\widetilde{\lambda}_{max}$ à partir de $\lambda_{max} = 2\pi c/\omega_{max}$.
3. La température du soleil étant égale à 6000K, déterminez λ_{max} et $\widetilde{\lambda}_{max}$ du soleil. Conclusion ?

2 Nombre de photons par mètre cubes et "photons fossiles" dans l'univers

ref : [3, p.222].[1, vol2, p.220, p.235]

Pendant les 300 000 ans après "la grande explosion" (le big bang), les photons de l'univers étaient en équilibre thermique avec la matière, formant un "magma". A cause de l'expansion, la température a diminuée ; à cette date, elle était de 3000 K, et ensuite, les photons n'ont plus interagit avec la matière (essentiellement car il n'y avait plus d'électrons libres), et cette population de photons distribuée selon la loi de Planck, et devenue "fossile".

---

2. Utiliser : $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$.

3. A.N. $R_{Soleil} = 0.7\,10^6 km$, $R_{Terre} = 6400 km$, $d_{Terre-soleil} = 1.5\,10^8 km$,$M_{soleil} = 2\,10^{30} kg$

4. Aide : en posant $x = \hbar\omega/(kT)$, il faut résoudre $x = 3(1 - e^{-x})$, que l'on résout approximativement en posant $x = 3 - \epsilon$.

$h = 6,62\,10^{-34} J.s$; $c = 3\,10^8 m.s^{-1}$; $k = 1,38\,10^{-23} J.K^{-1}$

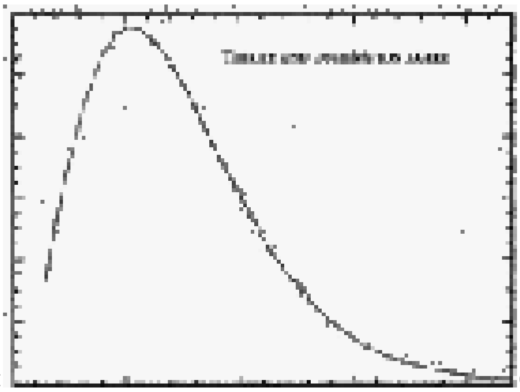
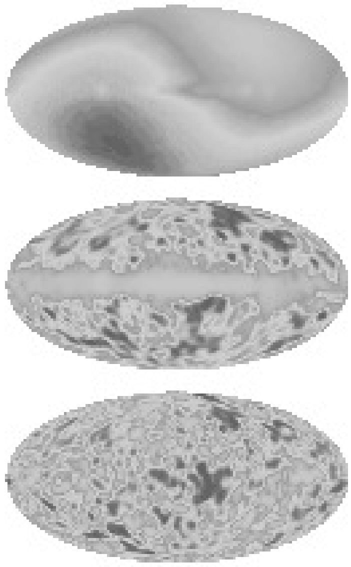
(a) :  (b) : 

FIGURE 2.1 – *(Source: http://space.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/ed_resources.html)*

1. On note $u(\omega)$ la distribution de Planck lorsque $T = 3000K$. Soit f le facteur avec lequel l'univers s'est dilaté depuis cette date. Sachant que le nombre de photons s'est conservé (car transformation adiabatique), établir la loi de distribution actuelle pour cette population fossile, et montrer que c'est encore une distribution de Planck pour une température effective T'. Actuellement des mesures précises de ce rayonnement montrent que $T' = 2.728 \pm 0.002\,K$. En déduire le facteur d'expansion f.
2. A partir de la distribution de Planck, montrez que la densité volumique d'un gaz de photons à l'équilibre thermique (avec un corps noir) à la température T, est égale[5] à $n = 2.03\;10^7 T^3$? En déduire le nombre de photons fossiles par cm^3actuellement ?

(a) Spectre mesuré par le satellite COBE.

(b) : The plane of the Milky Way Galaxy is horizontal across the middle of each picture. Sagittarius is in the center of the map, Orion is to the right and Cygnus is to the left. The image just shows the reduced map (i.e., both the dipole and Galactic emission subtracted). The cosmic microwave background fluctuations are extremely faint, only one part in 100,000 compared to the 2.73 degree Kelvin average temperature of the radiation field. The cosmic microwave background radiation is a remnant of the Big Bang and the fluctuations are the imprint of density contrast in the early universe. The density ripples are believed to have given rise to the structures that populate the universe today : clusters of galaxies and vast regions devoid of galaxies.

Références

[1] Roger Balian. *From microphysics to macrophysics : methods and applications of statistical physics*, volume 1,2. Springer Science & Business Media, 2007.

[2] L. Couture and R. Zitoun. *Physique statistique.* 1992.

[3] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. *Physique statistique.* 1989.

[4] Philippe Martin and Francis Rothen. *Problèmes à N-corps et champs quantiques.* Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), 1990.

5. On donne $\int x^2/(exp(x)-1)dx = 2.40$.