TD 8. **Etude élémentaire des étoiles naines blanches**

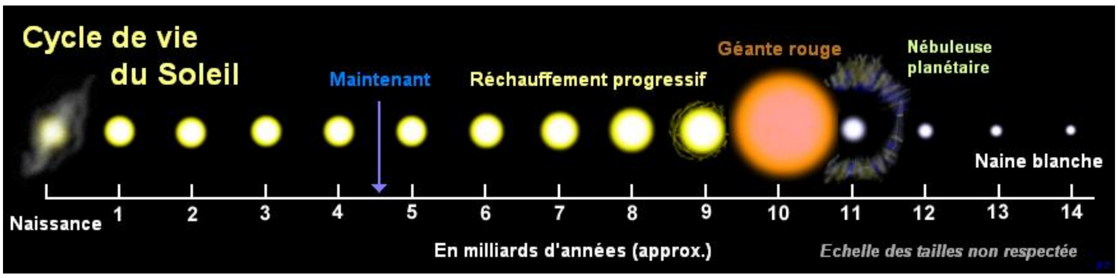
Références : [2, p.319], [3, p.860], [1, Tome II, p.488]. Les mots entourés de couleurs dans le texte ont un hyperlien vers wikipedia. Les données numériques sont en bas de page. [1]

Table des matières

1 Scénario d'évolution d'une étoile

explications en vidéo

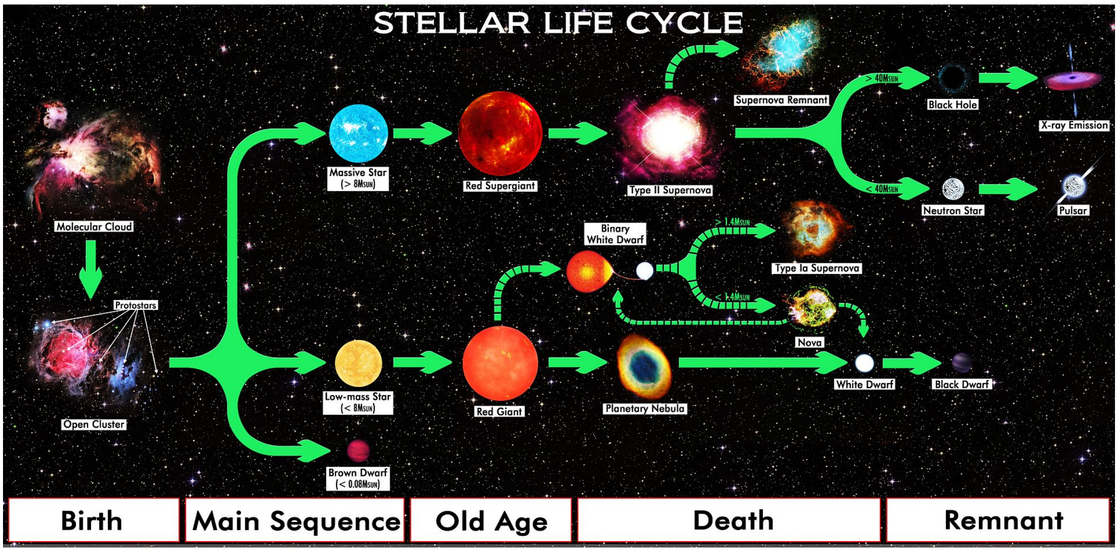
Pour une étoile de masse comparable à celle du soleil, contenant essentiellement de l'hydrogène qui est un combustible pour des réactions de fusion nucléaire, l'équilibre thermodynamique implique un rayon de l'ordre de $R \sim 10^6$ km, pendant des milliards d'années. Plus précisément, la fusion de l'hydrogène donne de l'Hélium. Après épuisement du combustible Hydrogène, une partie de la matière de l'étoile est éjectée, donnant une nébuleuse planétaire qui servira de berceau à de nouvelles étoiles (notre Soleil serait déjà de la 3ème génération, fille de l'étoile Coatlicue). En son cœur, le plasma qui ne produit plus de radiation s'effondre sous l'attraction gravitationnelle jusqu'à un rayon limite de l'ordre de $R \sim 5000$km, comparable à celui de la Terre. Ce qui détermine ce rayon est que les électrons sont des Fermions et ne peuvent donc occuper tous le même état. Dans ce TD, le but est d'étudier le gaz d'électrons contenus dans cette étoile résiduelle appelée naine blanche pour déduire le rayon d'équilibre R. Ensuite, après plusieurs milliards d'années, l'étoile naine blanche cessera de rayonner et deviendra une "étoile naine noire" invisible et errant dans la galaxie (de telles étoiles n'existent pas encore).



Le schéma suivant montre les scénarios d'évolution d'une étoile selon sa masse initiale. Si la masse de l'étoile est plus importante que celle du Soleil, l'énergie gravitationnelle sera telle que les électrons peuvent disparaître dans la réaction endothermique $e^- + p^+ \to n + \nu_e$,

1. Données :
$m_{He} = 4g/mole$,
$N_A = 6,02.10^{23}$,
$G = 6,67.10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$,
$m_e c^2 = 8,2.10^{-14} J$,
$hc = 2.10^{-25} J.m$
$k = 1,38.10^{-23} J.K^{-1}$

donnant une étoile à neutrons. Les neutrons obtenus sont aussi des Fermions mais de masse plus élevée que celle des électrons et ainsi le rayon d'une étoile à neutron est plus faible $R \sim$10km. Pour des masses encore plus importantes, l'étoile à neutron n'est pas stable sous l'effet de l'attraction gravitationnelle dominante et l'espace temps se "déchire", donnant un trou noir de rayon $R \sim$ 1km.



2 Etude d'un gaz d'électrons relativistes

vidéo de la solution.

On aura besoin de traiter un gaz d'électrons dans le régime relativiste, i.e. de vitesse comparable à la vitesse de la lumière c. On va obtenir l' expression de l'énergie totale U en fonction de N, V et à température $T = 0$K. Cela sera utile pour le problème suivant.

1. On considère **un électron libre** dans un volume V dont l'état est caractérisé par sa position $\vec{q}$ son impulsion $\vec{p}$ et son spin. Utiliser la formule de Weyl (voir TD2) pour montrer que le nombre d'états quantiques possibles dont l'impulsion est de module inférieure à $p \geq 0$ donné est $n(p) = ap^3$ avec a à préciser en fonction de $V, \hbar$.
2. On suppose maintenant que N **électrons libres** et indépendants sont dans le volume V (i.e. on néglige les interactions entre les électrons). Quels sont les états occupés à $T = 0$ K ? On appelle impulsion de Fermi p_F l'impulsion maximale des états occupés. Donner l'expression de V en fonction de $N, \hbar, m_e, c, \alpha_F = \frac{p_F}{m_e c}$ et relier α_F avec la densité d'électrons $\frac{N}{V}$.
3. En relativité, l'énergie totale ϵ d'un électron de masse m_e est donnée par l'équation
$$\epsilon^2 - p^2c^2 = m_e^2c^4 \tag{2.1}$$
où $p = |\overrightarrow{p}|$ est le module de l'impulsion. On pose $\alpha = \frac{p}{m_e c}$. Exprimer ϵ en fonction de α, m_e, c. Exprimer le facteur de Lorentz $\gamma = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} \geq 1$ à partir de α.
4. Soit $U = \int_0^N \epsilon dn$ l'énergie totale du gaz des N électrons relativistes à $T = 0$ K. Déduire une expression de U qui fait intervenir $m, c, N, \alpha_F = \frac{p_F}{m_e c}$ ainsi que la fonction que l'on ne cherchera pas à expliciter : $H(x) = \frac{1}{x^3}\int_0^x y^2\left(1+y^2\right)^{1/2} dy$, dont la dérivée est représentée en Figure 3.1(b).

3 Application à l'étude des naines blanches

vidéo de la solution.

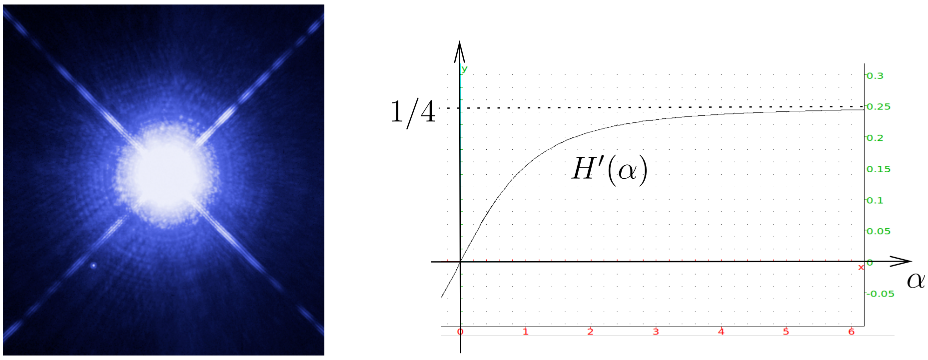


FIGURE 3.1 – (a) Photographie prise le 15 octobre 2003 par le télescope spatial Hubble de l'étoile Sirius B qui est une naine blanche. (b) Graphe de la fonction $H'(\alpha)$. On a $\lim_{\alpha\to\infty} H'(\alpha) = \frac{1}{4}$.

1. Une naine blanche est une étoile vieille, constituée essentiellement d'hélium ^{4}He, de masse M voisine de la masse du Soleil $M \simeq M_S = 2,0.10^{30} kg$. La température interne de l'étoile est de l'ordre de $T \sim 10^7 K$. L'hélium est complètement ionisé et on peut considérer que l'étoile est formée de N électrons libres et $N/2$ noyaux d'hélium (de masse : $m_{He} = 4g/mole \gg m_e$) qui neutralisent la charge des électrons (et maintiennent la cohésion de l'étoile par interaction gravitationnelle). Exprimer la masse de l'étoile M en fonction de N et calculer N si $M = M_S$?
2. On justifiera à la fin du problème la nécessité de décrire les électrons par la relativité, et d'autre part que l'approximation $T \approx 0$K est valable. On le suppose pour le moment. Utilisant le problème (1-2), exprimer le volume V puis le rayon R de l'étoile en fonction de N, α_F puis de M, α_F ?
3. L'énergie totale $E = E_g + U$ de l'étoile est la somme de l'énergie gravitationnelle d'une sphère homogène
$$E_g = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}$$
et de l'énergie cinétique U des électrons étudiée en (1-4) (l'énergie cinétique des noyaux et l'énergie électrostatique étant négligeables). Mettre E sous la forme :
$$E = -C_1 \alpha_F + C_2 H(\alpha_F)$$
où C_1 et C_2 sont des constantes que l'on calculera. Ainsi l'énergie de l'étoile E est exprimée à partir du paramètre sans dimension α_F qui lui même est relié à R. Le graphe de $H'(\alpha)$ est représenté sur la Figure 3.1 (b).
4. L'étoile est dans la configuration qui minimise E. Mettre cette condition sous la forme $H'(\alpha_F) = \frac{C_1}{C_2}$ et montrer que $\frac{C_1}{C_2} \sim 0.17$.
5. Déduire graphiquement la valeur de α_F puis du rayon R de l'étoile à l'aide de (2).
6. Etait-ce nécessaire d'utiliser la description relativiste ? Calculer l'énergie de Fermi μ_0 à l'aide de (3) et comparer à kT. Conclusion sur la validité de l'approximation $T \approx 0$K ?
7. Tracer l'allure de $E(\alpha)$ selon C_1/C_2 et discuter. Montrer que les naines blanches ne peuvent avoir une masse supérieure à une masse limite M_C (masse de Chandrasekhar) que l'on exprimera en fonction de M_S. Discuter.

Références

[1] Roger Balian. *From microphysics to macrophysics : methods and applications of statistical physics*, volume 1,2. Springer Science & Business Media, 2007.

[2] L. Couture and R. Zitoun. *Physique statistique*. 1992.

[3] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. *Physique statistique*. 1989.