

# Chapitre 1

## Le son

[Video](#) de cette section.

Le son est le vecteur de l'information musicale. Dans ce chapitre on présente certaines des caractéristiques physiques essentielles du son qui interviennent en musique. On étudiera la propagation des ondes sonores dans l'espace.

Le son est une onde qui se propage dans la matière. Ce peut être dans l'air (gaz), dans l'eau ou dans les solides ou toute autre forme de matière. Le son correspond aux vibrations de cette matière dans un certain régime de fréquences et d'amplitudes. Le son est très utilisé par les organismes vivants pour communiquer, en particulier parmi l'espèce humaine dans l'air, avec la voix et la musique, mais aussi par les poissons et de nombreux animaux dans l'eau, voir [video de L. Ballesta](#).



Dans ce cours on s'intéressera essentiellement aux ondes sonores dans l'air à pression et température ambiante, ce qui est la situation courante en musique.

L'[air](#) est un [fluide](#) gazeux légèrement visqueux et son comportement est régi par l'équation de la dynamique de Newton qui s'exprime par les [équations de Navier-Stokes](#). Ces équations sont simples mais les solutions qui en résulte, i.e. le comportement du gaz, peuvent être parfois très complexe, on parle alors de [turbulence](#). A l'heure actuelle on ne sait pratiquement pas résoudre les équations de Navier Stokes sauf dans des cas limites où le comportement est simple. La propagation du son sous forme ondulatoire fait partie des

ces cas simples que l'on va décrire. Par contre la production des tourbillons à l'embouchure d'une flûte par exemple fait partie des cas complexes pas bien compris.

## 1.1 Les équations de Euler (non linéaires)

**Video** de cette section.

Références : [Schroeder et al. \(2007, chap.3\)](#), [Landau & Lifshitz \(1987, chap VIII\)](#).

L'air est un fluide essentiellement constitué des molécules diatomiques  $N_2$  (di-azote) pour 79% et de  $O_2$  (di-oxygène) pour 21% et considéré ici comme un "gaz parfait", c'est à dire que les particules (molécules) qui le constituent sont libres et indépendantes mais subissent des chocs entre elles qui redistribuent leur énergie en conservant l'énergie totale. On rappelle que  $N_A = 6.10^{23}$  est le **nombre d'Avogadro** qui est le nombre d'objets dans une mole (autrement dit c'est l'ordre de grandeur du nombre de molécules dans un objet de taille humaine) et que la masse d'une mole de **nucléons** (i.e. neutron ou proton) est de 1 gramme. D'après la composition en nucléons des noyaux atomiques, l'atome  $N$  contient 7 protons et 7 neutrons, l'atome  $O$  contient 8 protons et 8 neutrons, donc on a les **masses molaires**  $M_{N_2} = 2 \times (7 + 7) g/mole$ ,  $M_{O_2} = 2 \times (8 + 8) g/mole$  et donc la masse molaire moyenne des molécules de l'air est

$$M = 0.79 M_{N_2} + 0.21 M_{O_2} = 29g/mole$$

### 1.1.1 Ordre de grandeurs du modèle de gaz

- La taille d'une molécule est de l'ordre de  $R = 10^{-10}m$ .
- La distance moyenne entre les molécules de l'air est  $d = 35 R$  (car la densité est  $\frac{N}{V} = 2.5 \cdot 10^{25} \text{ molécules}/m^3$ )
- La vitesse moyenne d'une molécule de di-oxygène est

$$v = 280 m/s \tag{1.1.1}$$

(car  $v = \left(\frac{RT}{M_{O_2}}\right)^{1/2}$  avec  $R = 8.31 J/K$ ,  $T = 273K$ ,  $M_{O_2} = 2 \times 16g/mole$ )

- La distance moyenne parcourue entre deux chocs est  $l = 3 \cdot 10^{-7}m = 3000 R$ , appelée libre parcourt moyen.
- Le nombre moyen de collisions pour une molécule est  $n_{col.} = \frac{v}{l} = 10^9$  collisions/seconde.

*Remarque 1.1.1.* Si on zoome par la pensée un cube d'air de  $L = 1cm$  de côté, de sorte à transformer la taille d'une molécule  $R = 10^{-10}m$  ci-dessus en taille macroscopique :  $R' = 1cm$ , le facteur de zoom est  $\frac{R'}{R} = \frac{10^{-2}}{10^{-10}} = 10^8$  et voici les valeurs correspondantes :

Tailles microscopiques :	$R = 10^{-10}m$	$d = 35R$	$L = 1cm$	$l = 3000 R$
Tailles macroscopique après un zoom d'un facteur $\times 10^8$	$R' = 1cm$	$d' = 35cm$	$L' = 10^8 cm = 1000km$	$l' = 3000cm = 30m$

Ainsi le cube à la taille  $L' = 1000km$  de la France!

### 1.1.2 Emergence d'un comportement collectif à l'échelle mésoscopique : le fluide.

L'échelle des atomes et molécules s'appelle l'**échelle microscopique**. L'échelle humaine s'appelle l'**échelle macroscopique**. Il y a une échelle intermédiaire appelée **échelle mésoscopique** à partir de laquelle laquelle l'air est un **fluide**, c'est à dire que l'on ne perçoit que le comportement collectif des molécule et non plus individuel. A cette échelle la population de molécules a un comportement collectif chaotique appelé **état d'équilibre**.

- Par exemple le fluide peut être au repos (pas de vent) même si les molécules sont en mouvement permanent.
- Pour l'air, l'échelle mésoscopique est précisément à partir de  $D = 10^3 d = 3 \cdot 10^{-6} m = 3 \mu m > l$ , de sorte qu'un cube de côté  $D$  contient  $10^9$  molécules qui est grand et  $D$  est plus grand que le libre parcourt moyen  $l$ . (Dans la remarque 1.1.1 ci-dessus, après le zoom, cela donne  $D' = 10^3 d' = 350m$ )
- Par exemple un gaz et un liquide sont des fluides.
- L'état d'équilibre local, résultat de ce comportement collectif est **caractérisé par des grandeurs locales** (bien connues) que sont :
  - la **température**  $T$ , qui correspond à la vitesse moyenne des molécules
  - la **pression**  $P$ , qui est inversement proportionnelle au volume libre autour de chaque molécule. (d'après la loi des **gaz parfaits**  $PV = nRT$ )

### 1.1.3 Gaz à l'équilibre. Equation des gaz parfaits.

On va supposer un gaz parfait à l'équilibre, avec une **température**  $T_0$  (en  $K$ ) avec une **pression** constante et uniforme  $p_0$  (en  $Pa = N/m^2$ ) et une densité constante et uniforme  $\rho_0$  (en  $kg/m^3$ ). On introduit la constante de Boltzmann  $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$  et on pose

$$R = N_A k = 8.31 \frac{J}{K}.$$

En physique statistique on démontre la **loi des gaz parfait**<sup>1</sup>

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{RT_0}{M}. \quad (1.1.2)$$

**Exemple 1.1.2.** Avec une température  $T_0 = 293K = 20C^\circ$ , une pression  $p_0 = 10^5 Pa$ , alors la densité de l'air est  $\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0} = 1.19 kg/m^3$ .

### 1.1.4 Gaz à l'équilibre local. Equation d'Euler. Turbulence.

On notera  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  un point de l'espace et  $t \in \mathbb{R}$  le temps. Un fluide est un ensemble de molécules en interaction et on suppose un équilibre local, c'est à dire

---

1. L'écriture plus habituelle est  $p_0 V = nRT_0$ . Avec la masse volumique  $\rho_0 = \frac{m}{V}$  est la masse molaire  $M = \frac{m}{n}$  on obtient  $\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{V n R T_0}{m V} = \frac{R T_0}{M}$ .

l'existence d'un champ de pression  $\mathbf{p}(x, t)$ , d'un champ de densité  $\rho(x, t)$  et d'un champ de vitesse  $v(x, t)$ . Le champ de vitesse détermine des trajectoires du fluide  $x(t)$  par l'équation  $\frac{dx}{dt} = v$ . On notera l'accélération du fluide par

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}v(x(t), t).$$

On rappelle que le **gradient** est  $\text{grad}(\mathbf{p}) = \left( \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_3} \right)$ .

**Proposition 1.1.3.** *Le fluide subit des forces de pression internes, la force résultante est opposée au gradient de pression et l'équation de la dynamique de Newton pour le fluide par unité de volume prend donc la forme*

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad}(\mathbf{p}) \quad (1.1.3)$$

appelée **équation d'Euler**.

Malgré son apparence simple, c'est une équation non linéaire que l'on ne sait pas résoudre en général et pouvant donner des solutions très complexes (turbulence). On peut rajouter une force de cisaillement (dissipation) donnant l'**équation de Navier-Stokes**.

*Démonstration.* On considère un petit cube élémentaire de côté  $[x_j, x_j + dx_j]$  selon chaque axe  $j = 1, 2, 3$ . La masse contenue est  $dm = \rho d^3x$  avec  $d^3x = dx_1 dx_2 dx_3$ . La force de pression exercée sur la face  $x_1$  est  $F_1(x_1) = \mathbf{p}(x_1) dx_2 dx_3$ . La force de pression exercée sur la face  $x_1 + dx_1$  est  $F_1(x_1 + dx_1) = -\mathbf{p}(x_1 + dx_1) dx_2 dx_3$ . On écrit le développement de Taylor à l'ordre 1 :  $\mathbf{p}(x_1 + dx_1) = \mathbf{p}(x_1) + dx_1 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} + O(dx_1^2)$ . Ainsi la force résultante selon  $x_1$  est

$$\begin{aligned} F_1^{(\text{tot})} &= F_1(x_1) + F_1(x_1 + dx_1) \\ &= \mathbf{p}(x_1) dx_2 dx_3 - \left( \mathbf{p}(x_1) + dx_1 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right) dx_2 dx_3 \\ &= -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} d^3x \end{aligned}$$

L'équation de Newton selon l'axe  $x_1$  s'écrit :

$$\begin{aligned} (dm) \frac{dv_1}{dt} &= F_1^{(\text{tot})} \\ \Leftrightarrow \rho d^3x \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} d^3x \\ \Leftrightarrow \rho \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Et de même selon les axes  $x_2, x_3$ . On a obtenu (1.1.3). □

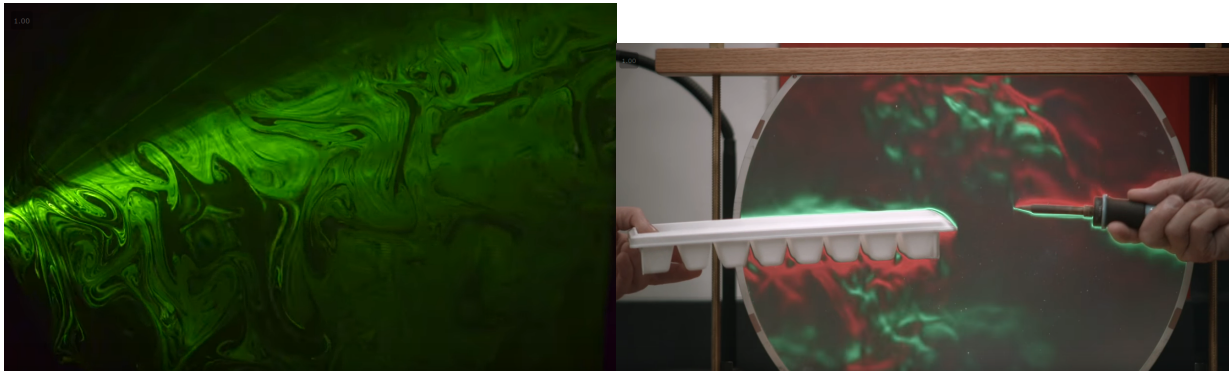


FIGURE 1.1.1 – (1) Turbulence de l'air éclairé par un faisceau laser. (2) Turbulence observée par l'effet Schlieren.

#### Vidéos de turbulence et le son :

- Voir cette [vidéo d'expérience de turbulence](#).
- Cette vidéo qui explique [Schlieren flow visualization](#). Cette vidéo qui montre des [ondes sonores](#), et celle ci montrant des balles de polystyrène qui surfent et [lévitent sur les ondes sonores](#).
- Vidéo du [cnrs sur la visualisation du son](#).

On supposera de plus que les variations du fluides sont [adiabatiques](#), c'est à dire que l'équilibre thermodynamique local est toujours présent, l'[entropie](#) est conservée. Cela implique la [formule de Laplace](#) :

$$p = C\rho^\gamma \quad (1.1.4)$$

avec une constante  $C$  et l'[indice adiabatique](#)

$$\gamma = 1 + \frac{2}{3+2} = \frac{7}{5}$$

où le chiffre **3** correspond aux trois dimension de l'espace ordinaire  $\mathbb{R}^3$ , i.e. les 3 degrés de liberté de translation de chaque molécule, le chiffre **2** correspond aux deux dimension de la sphère  $S^2$ , i.e. les 2 degrés de liberté de rotation de l'axe des molécules diatomiques. Si le gaz est constitué de molécules plus complexe, il y a 3 degrés de liberté de [rotation](#) (car  $\dim\text{SO}(3) = 3$ ) et donc  $\gamma = 1 + \frac{2}{3+3} = \frac{4}{3}$ . Si le gaz est monoatomique, sans rotation interne des molécules, alors  $\gamma = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ .

### 1.1.5 Remarques sur l'histoire des équations de la mécanique des fluides

Réf : [Euler et al. \(1980\)](#) p27.

Au XVIIIème siècle, il était crucial d'étudier la mécanique des fluides. En 1748, Euler organise avec l'académie de Berlin un prix pour une étude de "la résistance qu'éprouvent les corps solides dans les fluides". D'Alembert a rendu un mémoire d'une grande importance

car il a été le premier à introduire les opérateurs à dérivées partielles. Il a proposé une équation, où apparaissait correctement le terme de transport, mais le terme de force de pression était incorrect. Euler a refusé ce manuscrit, mais a étudié le problème par lui-même. Il a rédigé un mémoire en 1757 avec les “équations de Euler des fluides”. En 1752, le prix a été décerné à un “étudiant de Euler” Jacob Adami. Le terme de forces de cisaillement ont été introduit par [Henri Navier 1823](#) et [George Gabriel Stokes](#).

En 2000, il a été proposé un [prix](#) de  $10^6$ \$ pour toute personne qui [montrerait que les équations de Navier Stokes](#) en dimension 3, ont un comportement régulier et ne divergent pas en temps fini (ou le contraire). En janvier 2014, Mukhtarbay Otelbayev, (mathématicien kazakh) a écrit un article en russe prétendant répondre à cette question. Cela a beaucoup intéressé la communauté internationale. Il y avait une erreur. En 2014, Terence Tao a montré une [explosion des solutions](#) pour un modèle très proche. Le problème est toujours ouvert et beaucoup de chercheurs sont actifs sur cette question.

- Vidéos sur la visualisation des mouvements de l’air et des ondes sonores :
  - [Turbulence, vortex rings](#)
  - [What Does Sound Look Like?](#)
  - [Visualizing Ultrasound with Schlieren Optics Part I](#)
  - [Visualizing Ultrasound with Schlieren Optics Part III](#)

### Lectures supplémentaires :

- Pour des explications de la loi des gaz parfaits et autres notions de physique statistique, voir ce cours de [physique statistique](#).

## 1.2 Des équations de Navier-Stokes à l’équation d’onde

### 1.2.1 Gaz proche du repos. Ondes sonores.

[Video de cette section.](#)

La proposition suivante est le résultat principal de cette section qui montre que lorsque le gaz est proche de l’équilibre global, alors les petites fluctuations de pression  $p(x, t)$  oscillent et se propagent selon “l’équation des ondes”. Pour simplifier on notera une dérivée partielle  $\partial_x f := \frac{\partial f}{\partial x}$ . On notera  $\Delta$  l’opérateur [Laplacien](#) défini par

$$\Delta p := \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j}^2 p = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(p))$$

**Proposition 1.2.1.** *On suppose que le fluide est soumis aux équations de mouvement de Euler  $\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad}(\mathbf{p})$ . On suppose des petites fluctuations de la pression  $p$  et de la densité  $\rho$  autour de l'état d'équilibre constant et uniforme, i.e.*

$$\mathbf{p}(x, t) = p_0 + p(x, t)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \rho(x, t)$$

avec  $|p| \ll p_0$  et  $|\rho| \ll \rho_0$ . Alors au premier ordre,  $p$  est solution de **l'équation des ondes**

$$\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0 \quad (1.2.1)$$

avec la **vitesse du son**

$$c = \left( \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \stackrel{(1.1.2)}{=} \left( \frac{\gamma R T_0}{M} \right)^{1/2},$$

et on a la relation suivante entre  $p, \rho$  :

$$\frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (1.2.2)$$



FIGURE 1.2.1 – Ondes sonores (ultra sons) observées par effet Schlieren et par éclairage stroboscopique. Les ondes sont émises à gauche et se réfléchissent sur la plaque. On observe des figures d'interférence.

Preuve de la proposition 1.2.1 [Video de cette section.](#)

Partons de l'équation de Euler (1.1.3) :

$$\boldsymbol{\rho} \frac{dv}{dt} = -\text{grad}(p) \quad (1.2.3)$$

où  $v = \frac{dx}{dt}$  et

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}v(x(t), t) = \sum_{j=1}^3 (\partial_{x_j} v) (\partial_t x_j) + \partial_t v = \sum_{j=1}^3 (\partial_{x_j} v) v_j + \partial_t v$$

La fonction densité  $\boldsymbol{\rho}(x, t)$  satisfait l'équation de conservation de la masse :

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \text{div}(\boldsymbol{\rho}v) = 0 \quad (1.2.4)$$

*Preuve de (1.2.4).* Notons le **flot**  $\phi^t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , c'est à dire  $\phi^t(x) = x(t)$ ,  $\frac{d\phi^t}{dt} = v$ . Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est un domaine initial quelconque et  $\Omega(t) = \phi^t(\Omega)$  son évolution, alors on stipule que la masse  $M$  contenue dans  $\Omega(t)$  est constante. On note  $\chi_\Omega$  la **fonction caractéristique** du domaine  $\Omega$ . Donc  $\chi_{\Omega(t)} = \chi_\Omega \circ \phi^{-t}$ . On a

$$M = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\rho} dx = \int_{\mathbb{R}^3} (\chi_\Omega \circ \phi^{-t}) \boldsymbol{\rho} dx$$

donc avec une **intégration par parties**

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{dM}{dt} \right)_{t=0} = \int \left( \sum_j (\partial_{x_j} \chi_\Omega) (-v_j) \right) \boldsymbol{\rho} + (\chi_\Omega \circ \phi^{-t}) (\partial_t \boldsymbol{\rho}) dx \\ &\stackrel{\text{(par parties)}}{=} \int \chi_\Omega \left( \sum_j (\partial_{x_j} (v_j \boldsymbol{\rho})) + \partial_t \boldsymbol{\rho} \right) dx = \int \chi_\Omega (\text{div}(v\boldsymbol{\rho}) + \partial_t \boldsymbol{\rho}) dx \end{aligned}$$

Si cela est vrai pour tout domaine  $\Omega$  alors nécessairement  $\text{div}(v\boldsymbol{\rho}) + \partial_t \boldsymbol{\rho} = 0$ .  $\square$

Supposons maintenant des petites fluctuations

$$\boldsymbol{p}(x, t) = p_0 + p(x, t)$$

$$\boldsymbol{\rho}(x, t) = \rho_0 + \rho(x, t)$$

avec  $|p| \ll p_0$  et  $|\rho| \ll \rho_0$  et  $|(\partial_{x_j} v) v_j| \ll |\partial_t v|$ . Alors au premier ordre, (1.2.3) donne

$$\rho_0 \partial_t v = -\text{grad}(p) \quad (1.2.5)$$

et (1.2.4) donne

$$\partial_t \rho + \rho_0 \text{div}(v) = 0. \quad (1.2.6)$$

On déduit

$$\rho_0 \partial_t \text{div}(v) \stackrel{(1.2.5)}{=} -\text{div}(\text{grad}(p)) = -\Delta p,$$



$$\partial_t^2 \rho + \rho_0 \partial_t \operatorname{div}(v) \stackrel{(1.2.6)}{=} 0,$$

et donc

$$\partial_t^2 \rho = \Delta p. \quad (1.2.7)$$

D'après la formule de Laplace (1.1.4) d'un gaz parfait adiabatique :

$$p = C \rho^\gamma \Leftrightarrow \ln p = \ln C + \gamma \ln \rho \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

et donc au premier ordre pour les petites fluctuations  $p, \rho$  :

$$\frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0}$$

On a obtenu (1.2.2). Finalement, on obtient l'équation d'onde pour  $p$  :

$$\partial_t^2 p \stackrel{(1.2.7)}{=} \left( \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right) \Delta p = c^2 \Delta p$$

avec la constante  $c = \left( \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2}$  appelée vitesse du son.

### 1.2.1.1 Remarques

- En étudiant les solutions de l'équation d'onde, on verra en (1.5.12) pourquoi  $c$  s'appelle la vitesse du son.
- Avec les valeurs  $p_0, T_0$  de l'exemple 1.1.2, on obtient une vitesse du son

$$c = \left( \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left( \frac{\gamma R T_0}{M} \right)^{1/2} = \left( \frac{\frac{7}{5} \times 8.31 \times 293}{29 \times 10^{-3}} \right)^{1/2} = 343 \text{ m/s}. \quad (1.2.8)$$

- L'équation de départ de Euler est non linéaire et est impossible à résoudre en général, mais grâce à notre hypothèse d'être proche de l'état d'équilibre, on a obtenu **l'équation des ondes qui est linéaire** et donc plus facilement **soluble**. Ce sera le sujet des sections suivantes.
- Comme  $\gamma = \frac{7}{5}$ ,  $\gamma = \frac{4}{3}$  ou  $\gamma = \frac{5}{3}$  dépend de la nature diatomique, polyatomique ou monoatomique des molécules, la vitesse du son  $c$  en dépend aussi.
- D'après (1.2.2),  $\rho$  est proportionnel à  $p$ . Donc il vérifie aussi l'équation des ondes  $\partial_t^2 \rho - c^2 \Delta \rho = 0$ .
- Ainsi le son parcourt  $34 \text{ cm}$  en  $1 \text{ ms}$  ou  $17 \text{ m}$  en  $50 \text{ ms}$  qui est le temps de réaction d'un neurone et donc la limite de la **latence en musique**. Pour cette raison, il ne faut pas que les musiciens qui jouent ensemble soient trop éloignés les uns des autres, sinon le retard du son est perceptible.
- Il a été observé récemment (Pour la science juillet 2021) que à la naissance, les chauves souris connaissent précisément la vitesse du son, de façon innée. Des papillons de nuit “**arctiinae**” captent et émettent (pour brouiller) les sons radars des chauves souris (Ratcliffe and Fullard, 2005).

**Exemple 1.2.2.** La masse molaire de l'Hélium est  $M = 4g/mol$  et c'est un gaz monoatomique. On déduit que la vitesse du son dans l'Hélium est

$$c = \left( \frac{\gamma RT_0}{M} \right)^{1/2} = \left( \frac{\frac{5}{3} \times 8.31 \times 273}{4 \times 10^{-3}} \right)^{1/2} = 972m/s.$$

**Exemple 1.2.3.** On a  $c = \left( \frac{\gamma RT}{M} \right)^{1/2}$  donc  $\ln c = \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma R}{M} + \frac{1}{2} \ln T$  et  $\frac{dc}{dT} = \frac{1}{2T}$ . Si la température augmente de  $\delta T = 20C^\circ$  alors la vitesse du son augmente de  $\frac{\delta c}{c} = \frac{\delta T}{2T} = 3\%$  soit  $\delta c = 0.03 \times 343m/s = 10m/s$ .

## 1.2.2 Champ de vitesse et potentiel des vitesses

[video de cette section.](#)

Pour compléter la proposition 1.2.1, on a les résultats suivants.

**Proposition 1.2.4.** Le *champ de vitesse* du gaz  $v(x, t)$  (en  $m/s$ ) est donné par

$$v = \text{grad}(\phi) \tag{1.2.9}$$

avec une fonction  $\phi(x, t)$  appelé *potentiel des vitesses* relié aux fluctuations de pression  $p$  par

$$p = -\rho_0 \partial_t \phi. \tag{1.2.10}$$

*Remarque 1.2.5.* Par intégration,  $\phi$  et  $v$  vérifient aussi l'équation des ondes  $\partial_t^2 \phi - c^2 \Delta \phi = 0$  et  $\partial_t^2 v - c^2 \Delta v = 0$  comme (1.2.1). Comme  $v(x, t) \in \mathbb{R}^3$ , cette dernière équation a trois composantes.

*Démonstration.* L'équation (1.2.5) et la relation  $\text{rot grad} = 0$  donne

$$\rho_0 \partial_t \text{rot}(v) = 0$$

et donc si  $\text{rot}(v) = 0$  à l'instant initial, ce sera vrai à tout instant et d'après le **Lemme de Poincaré**,  $v = \text{grad}(\phi)$  pour une certaine fonction  $\phi(x, t)$ , définie à une constante près. Alors (1.2.5) donne

$$\rho_0 \partial_t \text{grad}(\phi) = -\text{grad}(p)$$

soit, en choisissant correctement la constante de  $\phi$ ,

$$p = -\rho_0 \partial_t \phi.$$

□

### 1.2.3 Conservation de l'énergie et densité d'énergie

[Video de cette section](#)

Pour compléter la proposition 1.2.1, on a les résultats suivants.

**Proposition 1.2.6.** *On a la conservation de l'énergie*

$$\partial_t \epsilon + \operatorname{div}(j) = 0 \quad (1.2.11)$$

avec la **densité de courant d'énergie** (en  $\frac{W}{m^2}$ ) qui est

$$j = pv \quad (1.2.12)$$

et la **densité d'énergie** (en  $J/m^3$ ) qui est

$$\epsilon = \frac{1}{2} \rho_0 |v|^2 + \frac{c^2 \rho^2}{2\rho_0}.$$

On rappelle (1.2.11) signifie que dans tout domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  fixé, la quantité d'énergie contenue  $E_\Omega(t) := \int_\Omega \epsilon d^3x$  et le flux sortant  $J_\Omega(t) = \int_{\partial\Omega} j d^2s$  (sur le bord  $\partial\Omega$  du domaine) se compensent :

$$\frac{dE_\Omega}{dt} + J_\Omega(t) = 0. \quad (1.2.13)$$

*Démonstration.* Référence : [Landau & Lifshitz \(1987, p.256\)](#). La pression  $p$  est une force par unité de surface d'unité  $\text{Pa} = \frac{N}{m^2}$  donc  $j = pv$  est d'unité  $\text{Pa} \frac{m}{s} = \frac{N}{m \cdot s} = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2}$ . C'est bien une densité de flux d'énergie. On souhaite trouver l'expression de la densité d'énergie  $\epsilon$  en  $J/m^3$  qui vérifie la loi de conservation

$$\partial_t \epsilon + \operatorname{div}(j) = 0.$$

Vérifions que  $\epsilon = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{c^2 \rho^2}{2\rho_0}$ . On a

$$\begin{aligned} \partial_t \epsilon &= \rho_0 v \partial_t v + \gamma \frac{p_0 \rho}{\rho_0^2} \partial_t \rho \\ &\stackrel{(1.2.5, 1.2.6, 1.2.2)}{=} -v \operatorname{grad}(p) - \frac{p}{\rho} \operatorname{div}(v) = -\operatorname{div}(vp) = -\operatorname{div}(j). \end{aligned}$$

On rappelle la démonstration de (1.2.13) qui explique l'appellation "conservation de l'énergie". On a d'après la [formule de Stokes](#)

$$\frac{dE_\Omega}{dt} = \int_\Omega \partial_t \epsilon d^3x \stackrel{(1.2.11)}{=} - \int_\Omega \operatorname{div}(j) d^3x = - \int_{\partial\Omega} j d^2s = -J_\Omega.$$

□

*Remarque 1.2.7.* A cause du terme de dissipation dans l'[équation de Navier-Stokes](#), une partie de l'énergie sonore est **dissipée**,  $\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = 0.5$  par  $km$ , convertit sous forme de chaleur.

### 1.3 Solutions particulières de l'équation des ondes

Dans cette Section on étudie particulièrement l'équation des ondes (1.2.1) décrivant les petites fluctuations de pression  $p(x, t)$  autour d'une valeur constante et uniforme  $p_0$  :

$$\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$$

avec  $c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma RT_0}{M}\right)^{1/2} = 343 \text{ m/s}$ .

#### 1.3.1 Variantes de l'équation d'onde

[Video de cette section](#)

##### 1.3.1.1 Équation plus générale

On présente une version plus générale de l'équation d'onde que celle obtenue en (1.2.1).

Si la température  $T(x, t)$  **varie** lentement avec  $x$  et  $t$  comme c'est le cas dans l'atmosphère ou dans un grand hall alors  $c(x, t)$  devient une fonction. De plus, il peut y avoir un **amortissement** de l'onde modélisé par une fonction réelle  $a(x, t) \geq 0$  et une **source sonore** modélisée par une fonction réelle  $s(x, t)$ . Par exemple si la source est ponctuelle en  $x_0$  (ex. haut parleur), alors  $s(x, t) = s(t) \delta_{x_0}(x)$  où  $\delta_{x_0}$  est la distribution de Dirac en  $x_0$ .

**Définition 1.3.1.** L'**équation des ondes** obtenue en (1.2.1) s'écrit plus généralement avec **indice variable**  $c(x, t)$ , **amortissement**  $a(x, t)$  et **source**  $s(x, t)$  :

$$\partial_t^2 p - c^2 \Delta p + a \partial_t p = s \quad (1.3.1)$$

L'inconnue est la fonction  $p(x, t)$  décrivant les fluctuations de pression.

C'est encore une équation affine en  $p$  (i.e. de degré 1), mais à coefficients variables. C'est une EDP (Équations aux Dérivées Partielles) affine. En étudiant les solutions, on verra en effet pourquoi  $c$  correspond à la vitesse de l'onde,  $a$  modélise un amortissement et  $s$  une source.

Avant de chercher à résoudre et comprendre l'équation d'onde (1.3.1), voici quelques commentaires.

##### 1.3.1.2 Conditions aux bords

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est un domaine donné (modélisant un espace comme une pièce par exemple), on peut demander des conditions au bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  comme  $v(x, t) = 0$  pour tout  $x \in \partial\Omega$  et  $t \in \mathbb{R}$ , signifiant qu'il n'y a pas de déplacement d'air sur les parois.

### 1.3.1.3 Question de résolution

Que signifie résoudre l'équation d'onde? Si on connaît les fonctions  $c, a, s$  et la valeur de l'onde  $p(x, t)$ ,  $\partial_t p(x, t)$  à  $t = 0$  pour tout  $x \in \Omega$ , la question peut être de comprendre le comportement de l'onde, i.e. de trouver  $p(x, t)$  pour tout  $x \in \Omega$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ . Cette question peut être non soluble à la main, mais soluble dans certains cas limites ou soluble approximativement avec un ordinateur. Dans cette section on expliquera cela et nous verrons un algorithme simple de résolution numérique.

On va considérer différentes situations, de façon progressive, de simple à plus compliquées.

**Exemple 1.3.2.** Voici par exemple une résolution numérique de l'équation d'onde en dimension 2 sur un domaine  $\Omega$  qui est un rectangle tronqué d'un disque : [vidéo](#). Ce qui est intéressant à observer et que l'on expliquera est que l'on observe en effet la propagation des "fronts d'ondes" à une certaine vitesse  $c$ . Ces front d'ondes semblent suivre des trajectoires bien définies, comme celles de particules.

Dans la suite de cette section on considère des cas très particuliers de domaine  $\Omega$  et de fonctions  $c, a, s$  qui font que l'équation (1.3.1) est soluble. On va commencer par étudier le cas à une dimension d'espace.

### 1.3.1.4 A propos de l'amortissement $a$

Le terme d'amortissement aura pour effet de réduire l'énergie de l'onde au cours du temps. On parle de dissipation. Cela s'appelle aussi la "[viscoélasticité](#)". Ce paramètre est important en lutherie dans la conception des instruments de musique, voir cette vidéo [Conférence de Michele Castellengo sur le son](#) à 24'.

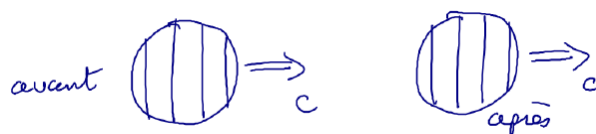
## 1.3.2 Trajectoire des ondes et importance en acoustique musicale

L'objectif de comprendre le comportement des ondes dans la suite est de pouvoir l'appliquer à l'acoustique musicale. Voici en résumé quelques résultats que l'on obtiendra et qui sont déterminant par exemple pour l'acoustique d'une salle :

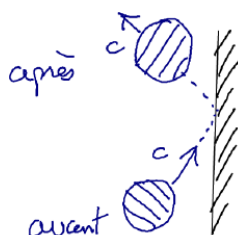
### 1.3.2.1 Dans un milieu homogène

Un **milieu homogène** est un milieu où la **vitesse  $c_{\text{son}}$  du son est constante**, i.e. ne dépend pas du point. Pour cela il faut que la température et la pression soit constantes. On définira précisément la notion de paquet d'onde plus loin.

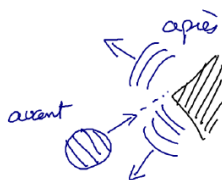
**Proposition 1.3.3.** *Dans un milieu homogène, i.e. la vitesse  $c_{\text{son}}$  est constante, alors les paquets d'ondes se propagent en **ligne droite** perpendiculairement aux lignes (ou plan) de phases. Une faible partie de l'énergie est dissipée pendant la propagation.*



**Proposition 1.3.4.** *Sur un obstacle plan lisse ou de longueur de variation grande devant la longueur d'onde, un paquet d'onde se réfléchit et une partie est absorbée par la paroi.*



**Proposition 1.3.5.** *Sur un obstacle de variation courte devant la longueur d'onde, un paquet d'onde diffuse, i.e. produit plusieurs paquets d'ondes avec des amplitudes variables.*

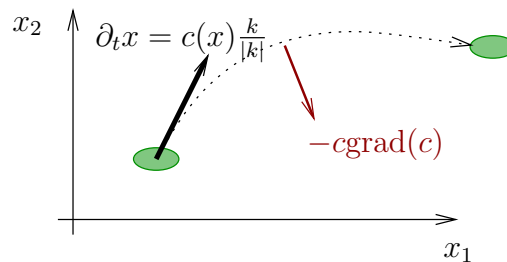


**Exemple 1.3.6.** Par exemple si l'obstacle est très petit devant la longueur d'onde comme un point, la diffusion est isotrope (on parle de diffusion "s") ou **diffusion de Rayleigh**. Cela explique la **couleur du ciel**.

### 1.3.2.2 Dans un milieu inhomogène

Un **milieu inhomogène** est un milieu où la vitesse  $c_{\text{son}}(x)$  du son n'est constante, i.e. dépend du point  $x$ . Ce peut être du à la température ou la pression qui varient.

**Proposition 1.3.7.** *Dans un milieu inhomogène, i.e. si la vitesse  $c_{\text{son}}(x)$  dépend du point de façon lente par rapport à la longueur d'onde, alors la trajectoire d'un paquet d'onde est déviée vers les zones où  $c_{\text{son}}(x)$  décroît (i.e.  $-\text{grad}c_{\text{son}}$  agit comme une force).*



Pour énoncer le résultat très important suivant, considérons un paquet d'onde solution de l'équation générale (1.3.1), (ou tout autre équation différentielle linéaire). Cette équation détermine une fonction  $x, k \rightarrow \omega(x, k)$  appelée **relation de dispersion** ou **symbole** (ou Hamiltonien classique) obtenue remplaçant  $p$  dans ((1.3.1) par le mode de Fourier  $p(x, t) = e^{i(k \cdot x - \omega t)}$ . Par exemple, prenons le cas simple (on verra d'autres cas ensuite, en particulier celui de l'équation de Schrödinger)

$$\partial_t^2 p - c(x)^2 \Delta p = 0$$

On a  $\partial_{x_j} p = ik_j p$  et  $\partial_t p = -i\omega p$ , donc on obtient  $-\omega^2 - c(x)^2 (-\|k\|^2) = 0$  et l'on déduit l'expression de

$$\omega(x, k) = c(x) \|k\|.$$

**Proposition 1.3.8.** “*Théorème semi-classique de Ehrenfest-Hamilton*”. Lors du déplacement d'un paquet d'onde on peut mesurer la vitesse de déplacement de son enveloppe de position moyenne  $x(t)$ , appelée **vitesse de groupe**  $v_g = \frac{dx}{dt} \in \mathbb{R}^3$  et le comportement des lignes de phases  $y \rightarrow e^{ik(t) \cdot (y - x_{\text{phase}}(t))}$ , avec le vecteur d'onde  $k(t) \in \mathbb{R}^3$  et la **vitesse de phase**  $v_{\text{phase}} = \frac{dx_{\text{phase}}}{dt}$ . Par exemple pour un paquet d'onde Gaussien

$$u(x, t) = A e^{ik(t) \cdot (y - x_{\text{phase}}(t))} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{|y - x(t)|}{\sigma} \right)^2}$$

d'amplitude  $A > 0$  et largeur  $\sigma > 0$ . De façon générale, le comportement des paquet d'ondes est caractérisé à partir de la fonction  $\omega(x, k)$  par **équations de Hamilton**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \\ \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \end{cases}$$

donnent en particulier la **vitesse de groupe**  $v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ .

### 1.3.2.3 Acoustique d'une salle

Comme conséquence des propriétés précédentes, pour une salle de concert,  
 — on évite les parois lisses et planes sur lesquelles l'onde se réfléchit parfaitement, ex : mur de salle de bain.

- On évite aussi des parois trop absorbantes de l'énergie de l'onde, qui l'empêche de se réfléchir.
- On préfère des **parois qui diffusent** les ondes. Pour cela on peut utiliser une structure aléatoire appelée **diffuseur de Schroeder** (1975), voir [ici](#). Pour quelle raison ? peut être que cette diffusion aléatoire ressemble à la diffusion du son dans la forêt sur les troncs d'arbres ?
- Exemples : diffusion du son
  - dans une église,
  - dans une grotte : voir [ce documentaire](#) sur arte qui explique que les **points rouge** (et mains rouges) marquent les zones de résonances particulières.
- Les algorithmes de “**reverb**” sont modélisés à base de phénomènes de diffusion multiples aléatoires

### 1.3.3 Equation des ondes $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$ sur $\mathbb{R}$ (1 dim)

[Video de cette section.](#)

Pour commencer le cas le plus simple est celui de l'équation d'onde  $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$  d'inconnue  $p(x, t)$  sur l'**espace de dimension 1** :  $x \in \mathbb{R}$  sans bord et avec la vitesse  $c > 0$  constante.

*Remarque 1.3.9.* On va présenter deux méthodes de résolution, importantes l'une et l'autre. La solution d'Alembert est spécifique à la dimension 1 et en dimension plus grande correspond à la **spherical mean** ou **formule de Kirchoff** qui n'est pas exacte. La solution de Fourier est valable en toutes dimensions mais nécessite des coefficients constants. Elle se généralise pour des **EDP** à coefficients variables avec l'analyse semi-classique ou analyse micro-locale, on le verra en section [1.5](#).

#### 1.3.3.1 Solution d'Alembert

Nous présentons **la solution d'Alembert** particulière à ce cas et très importante pour la suite du cours.



**Proposition 1.3.10.** *L'équation d'onde à une dimension  $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$  admet comme solution générale*

$$p(x, t) = R(x - ct) + G(x + ct) \quad (1.3.2)$$

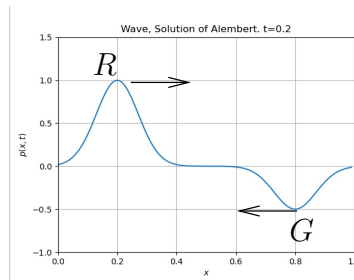
avec des fonctions  $R, G$  arbitraires, déterminées par les conditions initiales  $p(x, 0)$ ,  $(\partial_t p)(x', 0)$  par

$$R(x) = \frac{1}{2} \left( p(x, 0) - \frac{1}{c} \int^x (\partial_t p)(x', 0) dx' \right) \quad (1.3.3)$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left( p(x, 0) + \frac{1}{c} \int^x (\partial_t p)(x', 0) dx' \right)$$

Remarquer que  $R(x - ct)$  représente une fonction qui se translate vers la droite à la vitesse  $c$ , car son argument est constant pour  $x - ct = x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + ct$ . De même  $G(x + ct)$  qui se translate vers la gauche. On appelle parfois  $R(x - ct)$  et  $G(x + ct)$  des “**ondes progressives**”.

Voici un exemple d'une onde, [vidéo1](#) fait par ce programme [onde\\_1dim\\_segment\\_superposition.py](#).



*Démonstration.* Vérifions que (1.3.2) est solution. On a

$$\partial_t p = -cR'(x - ct) + cG'(x + ct), \quad \partial_t^2 p = c^2 R''(x - ct) + c^2 G''(x + ct),$$

$$\partial_x p = R'(x - ct) + G'(x + ct), \quad \partial_x^2 p = R''(x - ct) + G''(x + ct).$$

On vérifie donc que  $\partial_t^2 p = c^2 \partial_x^2 p$ . Ensuite cela donne  $p(x, 0) = R(x) + G(x)$  et  $(\partial_t p)(x, 0) = c(G'(x) - R'(x))$ , donc  $G(x) - R(x) = \frac{1}{c} \int^x (\partial_t p)(x', 0) dx'$ , à une constante près. On déduit (1.3.3).  $\square$

**Exercice 1.3.11.** Une onde  $p(x, t)$  est solution de  $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$ .

1. A  $t = 0$ , on suppose connue la fonction  $p(x, 0)$  et on suppose sa dérivée temporelle nulle :  $\partial_t p(x, 0) = 0, \forall x$ . Donner l'expression de  $p(x, t)$  à partir de  $p(x, 0)$  et tracer l'allure de  $p(x, t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$  dans le cas  $p(x, 0) = e^{-x^2}$ .
2. Quelles conditions vérifient les valeurs initiales  $p(x, 0)$  et  $\partial_t p(x, 0)$  pour que l'onde soit progressive vers la droite seulement, i.e.  $p(x, t) = R(x - ct)$  ?

### 1.3.3.2 Solution de Fourier

L'équation  $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$  est une **EDP** linéaire à coefficient constant. On peut donc la résoudre par transformée de Fourier. D'après la théorie de Fourier, toute solution est combinaison linéaire de

$$p_{k,\omega}(x, t) = Ae^{i(kx+\omega t)} \quad (1.3.4)$$

appelée **onde plane** (ou **mode de Fourier**) avec  $\omega \in \mathbb{R}$  **pulsation** (ou **fréquence temporelle**) et  $k \in \mathbb{R}$  **vecteur d'onde** (ou **fréquence spatiale**) et une amplitude  $A \in \mathbb{C}$ . Lire la remarque **B.4.1** concernant l'intérêt d'utiliser les modes de Fourier ou ondes planes.

*Remarque 1.3.12.* L'onde plane (1.3.4) vérifie les relations de périodicité suivante  $p_{k,\omega}(x + \lambda, t) = p_{k,\omega}(x, t) = p_{k,\omega}(x, t + T)$  avec la période spatiale ou **longueur d'onde**

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

et la période temporelle

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

*Remarque 1.3.13.*  $\operatorname{Re}(p_{k,\omega})(x, t) \stackrel{(1.3.12)}{=} |A| \cos(kx + \omega t + \alpha)$  avec  $A = |A| e^{i\alpha}$ . Voir figure **1.3.1**.

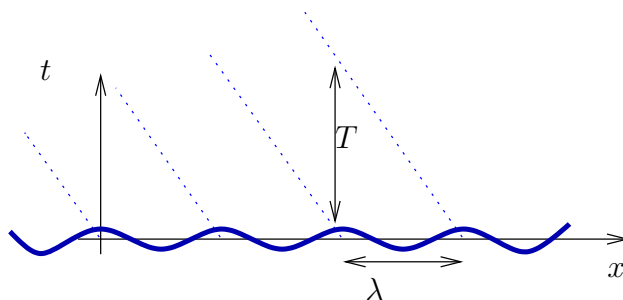


FIGURE 1.3.1 – La partie réelle d'une **onde plane** est  $\operatorname{Re}(p_{k,\omega})(x, t) \stackrel{(1.3.12)}{=} |A| \cos(kx + \omega t + \alpha)$ . Elle a des lignes de phase en pointillé  $kx + \omega t + \alpha = 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow x = -ct + x_0$  avec  $x_0 = -\frac{\alpha + 2\pi k}{k}$ ,  $c = \frac{\omega}{|k|}$  appelé vitesse de phase. Ici  $k > 0, \omega > 0$ .

D'après le Théorème de Fourier (**B.4.3**), tout signal  $p(x, t)$  se décompose comme somme de modes de Fourier (1.3.4).

**Proposition 1.3.14.** *Sur le domaine  $\mathbb{R}$ , une **onde plane**  $p(x, t) = Ae^{i(kx+\omega t)}$  avec  $\omega, k \in \mathbb{R}$  est solution de (1.3.11),  $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$ , si et seulement si*

$$\omega = \pm ck,$$

*ainsi  $p(x, t) = Ae^{ik(x \pm ct)}$ .*

*Remarque 1.3.15.* L'onde plane  $p(x, t) = Ae^{ik(x \pm ct)}$  est une onde progressive particulière, i.e.  $p(x, t) = F(x \pm ct)$  pour la fonction particulière  $F(X) = Ae^{ikX}$  appelé mode de Fourier en accord avec la solution d'Alembert (1.3.2).

Voici une [animation](#) faite par ce programme [onde\\_1dim\\_R.py](#).

*Démonstration.*  $p(x, t) = Ae^{i(kx + \omega t)}$  dans l'équation d'onde  $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$  donne

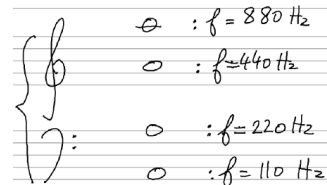
$$(i\omega)^2 - c^2 (ik)^2 = 0 \quad (1.3.5)$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 + c^2 k^2 = 0 \quad (1.3.6)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \pm ck \quad (1.3.7)$$

□

**Exercice 1.3.16.** Calculer la longueur d'onde  $\lambda$  pour une onde sonore de fréquence  $f = 440\text{Hz}$ , (la du diapason) et pour les autres la de la figure ?



**Solution 1.3.17.** D'après  $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$ , on déduit

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{440 \text{ s}^{-1}} = 0.80 \text{ m} = 80 \text{ cm}$$

**Exercice 1.3.18.** Les **dauphins** utilisent des sons de fréquences  $f \approx 150 \text{ kHz}$  pour localiser les poissons (proies). Quelle est la longueur d'onde  $\lambda$  correspondante ? Même questions pour les **Marsouins** ( $f \geq 100 \text{ kHz}$ ) et les **Orques** ( $f \leq 100 \text{ kHz}$ ) ?

**Solution 1.3.19.** Dans l'eau, la vitesse du son est  $c = 1500 \text{ m/s}$ . Donc pour les dauphins

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1500 \text{ m/s}}{150\,000 \text{ s}^{-1}} = 0.01 \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

Cette petite longueur d'onde leur permet de localiser les petits poissons par **écholocalisation** pour se nourrir. Pour les marsouins,

$$\lambda = \frac{c}{f} \leq \frac{1500 \text{ m/s}}{100\,000 \text{ s}^{-1}} = 0.015 \text{ m} = 1.5 \text{ cm}$$

Pour les orques,  $\lambda = \frac{c}{f} \geq 1.5 \text{ cm}$ .

### 1.3.3.3 Effet Doppler

On parle d'effet Doppler si la **source sonore est en mouvement**, et/ou le **récepteur est en mouvement par rapport au fluide**. La conséquence est que la **longueur d'onde est différente, ainsi que la fréquence perçue**.

Voici des expériences pour expliquer cela.

- Vidéos dans une cuve à ondes de surface.
- [Effet Doppler subsonique](#)
- [Effet Doppler supersonique](#)
- [Le mur du son](#)

**Exemple 1.3.20.** Expériences connues : le son d'une sirène d'une voiture en mouvement. Le mur du son créé par un avion supersonique.

### 1.3.4 Equation $\partial_t^2 v - c^2 \partial_x^2 v = 0$ sur le segment $[0, L]$

[Video de cette section](#)

On considère ici la grandeur vitesse  $v(x, t)$ , la variable spatiale  $x \in [0, L]$  sur un **segment unidimensionnel** et  $t \in \mathbb{R}$  avec les conditions suivantes aux bords  $x = 0$  et  $x = L$

$$v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad \forall t.$$

qui signifie que la vitesse est nulle aux bords car l'air ne bouge pas à cause des parois.

Une fois de plus on résoud l'équation par deux méthodes : la méthode d'Alembert spécifique au cas dimension 1 et la méthode de Fourier (séries de Fourier).

#### 1.3.4.1 Solution d'Alembert

Voici la solution d'Alembert obtenue à partir de la solution sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 1.3.21.** *L'équation d'onde à une dimension  $\partial_t^2 v - c^2 \partial_x^2 v = 0$  sur l'intervalle  $x \in [0, L]$  avec les conditions aux bords  $v(0, t) = v(L, t) = 0, \forall t$ , admet comme solution générale*

$$v(x, t) = R(x - ct) - R(-x - ct) \quad (1.3.8)$$

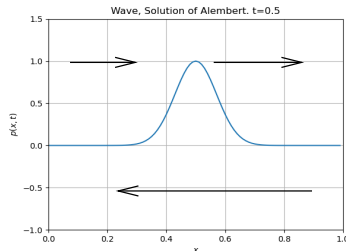
avec une fonction  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de période  $2L$  arbitraire, i.e.

$$R(x + 2L) = R(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent la fonction est **périodique en temps**, de période  $T = \frac{2L}{c}$ , i.e.

$$v\left(x, t + \frac{2L}{c}\right) = v(x, t), \forall x.$$

*Remarque 1.3.22.*  $R(x - ct)$  représente une fonction qui se translate vers la droite à la vitesse  $c$  et  $R(-x - ct)$  la fonction symétrique qui se translate vers la gauche.  $R$  est déterminée par les conditions initiales comme en (1.3.3). Voici un exemple d'une onde, vidéo fait par ce programme [onde\\_1dim\\_segment\\_superposition.py](#) sur le segment  $x \in [0, 1]$ .



*Remarque 1.3.23.* La **périodicité en temps** de l'équation d'onde est une **propriété spéciale à la géométrie**  $[0, L]$  et produit une “**note musicale**” d'après la définition 2.3.1 que l'on étudiera. Pour cette raison on dit que c'est **système harmonique**. Cette périodicité du signal n'est pas vrai pour d'autres géométries. Cette propriété est la raison principale d'utiliser des cordes pincées ou frappées dans certains **instruments de musique**, comme la kora, le piano, la guitare, le clavecin, la harpe, etc.

*Démonstration.* On part de la solution (1.3.2) sur  $\mathbb{R}$ ,  $v(x, t) = R(x - ct) + G(x + ct)$ . On rajoute les conditions

$$v(0, t) = R(-ct) + G(ct) = 0, \forall t,$$

donnant  $G(x) = -R(-x)$ ,  $\forall x$  et

$$\begin{aligned} v(L, t) &= R(L - ct) + G(L + ct) \\ &= R(L - ct) - R(-L - ct) = 0, \forall t \end{aligned}$$

donnant, en posant  $-L - ct = x$

$$R(x + 2L) = R(x), \forall x.$$

On déduit que pour tout  $x$ ,

$$\begin{aligned} v\left(x, t + \frac{2L}{c}\right) &= R(x - ct - 2L) - R(-x - ct - 2L) \\ &= R(x - ct) - R(-x - ct) = v(x, t). \end{aligned}$$

□

**Exercice 1.3.24.** On souhaite qu'une corde de guitare ( $3/4$ ) de longueur  $L = 56\text{cm}$ , produise un la de fréquence  $f = 110\text{Hz}$ . Calculer la vitesse  $c$  de l'onde élastique sur la corde.

**Solution 1.3.25.** On a

$$c = \frac{2L}{T} = 2Lf = 2 \times 0.56\text{m} \times 110\text{s}^{-1} = 123 \text{ m/s}$$

**Exercice 1.3.26.** Considérons la corde de mi<sub>4</sub>,  $E_4$ ,  $f_{E_4} = 330\text{Hz}$  de la guitare de longueur  $L = 56\text{cm}$ . A quelle distance  $L'$  placer le doigt, pour produire son octave  $E_5$  de fréquence  $f_{E_5} = 2f_{E_4} = 660\text{Hz}$ ? et pour produire la quinte  $B_4$  de fréquence  $f_{B_4} = \frac{3}{2} \times f_{E_4} = 495\text{Hz}$ ?

**Solution 1.3.27.** D'après la formule ci-dessus

$$f = \frac{c}{2L}$$

on observe que  $f$  est inversement proportionnel à  $L$ . Ainsi pour doubler la fréquence  $f$  il faut diviser par 2 la longueur. Donc pour obtenir  $f_{E_5} = 2f_{E_4}$  il faut  $L' = \frac{1}{2}L = \frac{1}{2} \times 56 = 28\text{cm}$ . Pour obtenir  $f_{B_4} = \frac{3}{2}f_{E_4}$  il faut  $L' = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3} \times 56 = 37,3\text{cm}$ .

*Remarque 1.3.28.* La **vitesse des ondes** sur une corde tendue de tension  $T$  (en  $N$ ) et masse par unité de longueur  $\mu$  est (Par **Vincenzo Galileo**, vers 1570, le père de G. Galilée)

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Cette formule montre ce qui est bien connu des musiciens : la vitesse  $c$  (et donc la fréquence  $f$ ) augmente si la tension de la corde augmente. La vitesse (et donc la fréquence) diminue si la masse de la corde augmente.

### 1.3.4.2 Solution de Fourier

**Proposition 1.3.29.** Sur un **segment unidimensionnel**  $x \in [0, L]$ , avec les conditions aux bords  $v(0, t) = v(L, t) = 0$ , une solution générale de l'équation d'onde

$$\partial_t^2 v - c^2 \partial_x^2 v = 0$$

est une superposition de **modes stationnaires** (ou **modes propres** ou **ondes stationnaires**) :

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 1} V_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \sin(k_n x) \quad (1.3.9)$$

avec l'amplitude  $V_n \geq 0$  et phase  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  arbitraires, le vecteur d'onde  $k_n = n\frac{\pi}{L}$ , la fréquence  $\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$  vérifiant  $\omega_n = k_n c$  et

$$\omega_n = n\omega_1 \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (1.3.10)$$

Le fait que  $\omega_n$  est multiple entier de  $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$ , on dit que le spectre est **harmonique**.

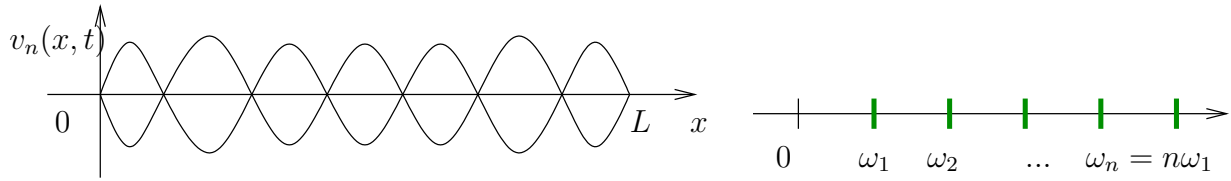


FIGURE 1.3.2 – (a) Enveloppe d'un mode propre (1.3.9), ici  $n = 7$ . (b) Spectre harmonique. Voici des vidéos pour le **mode n=1**, **mode n=2**, et **mode n=3** faites par ce programme [onde\\_1dim\\_segment.py](#). Voici des superpositions de modes, [vidéo1](#), [vidéo2](#), [vidéo3](#) faites par ce programme [onde\\_1dim\\_segment\\_superposition.py](#).

*Remarque 1.3.30.* La fonction (1.3.9) est périodique en temps de période  $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$ , donc de fréquence  $f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}$ . Comme  $T_n = \frac{1}{n}T_1$ , la fonction  $v_n$  est a fortiori de période  $T_1$  et donc une solution générale, superposition des modes stationnaires, est périodique en temps de période  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2L}{c}$  et fréquence

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{c}{2L}$$

appelée **fréquence fondamentale**. C'est pour cette raison de périodicité que le spectre  $\omega_n = n\omega_1$  est appelé "spectre harmonique" (car on verra plus loin que tout signal périodique est perçu comme "harmonieux" par notre audition). On verra en section 3.3.7 que le **timbre** que l'on perçoit de ce signal périodique est caractérisé par la suite des amplitudes  $(V_n)_{n \geq 1}$ .

*Démonstration. (Méthode 1).* On part de l'expression (1.3.8) avec la fonction  $R(x)$  de période  $2L$  que l'on peut donc décomposer en série de Fourier

$$R(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{R}_n e^{i2\pi n \frac{x}{2L}}$$

avec des amplitudes  $\hat{R}_n = |\hat{R}_n| e^{i\alpha_n} \in \mathbb{C}$ , vérifiant  $\hat{R}_{-n} = \overline{\hat{R}_n}$  cad  $\alpha_{-n} = -\alpha_n$ . Par conséquent

$$\begin{aligned} v(x, t) & \stackrel{(1.3.8)}{=} R(x - ct) - R(-x - ct) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{R}_n e^{i2\pi n \frac{x-ct}{2L}} - \hat{R}_n e^{i2\pi n \frac{(-x-ct)}{2L}} \\ & = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{R}_n e^{-i2\pi n \frac{ct}{2L}} (e^{i2\pi n \frac{x}{2L}} - e^{-i2\pi n \frac{x}{2L}}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{R}_n| e^{-i2\pi n \frac{ct}{2L} + i\alpha_n} 2 \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) \\ & = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{R}_n| \cos\left(-2\pi n \frac{ct}{2L} + \alpha_n\right) 2 \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) \\ & = \sum_{n \geq 1} 4 |\hat{R}_n| \cos\left(2\pi n \frac{ct}{2L} + \alpha_n\right) \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) \\ & = \sum_{n \geq 1} V_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \sin(k_n x) \end{aligned}$$

avec  $V_n = 4 \left| \hat{R}_n \right|$ ,  $\omega_n = 2\pi n \frac{c}{2L} = n \frac{\pi c}{L}$  et  $k_n = 2\pi n \frac{1}{2L} = n \frac{\pi}{L}$ .

**(Méthode 2)** Sans utiliser la proposition 1.3.21. On cherche une solution avec une fréquence  $\omega$  donnée. La solution est combinaison linéaire de  $v = e^{i(k \cdot x + \omega t)}$  avec la condition (1.3.14)  $k = \pm \frac{\omega}{c} \in \mathbb{R}$ , avec  $\omega \in \mathbb{R}$  fixé, donc

$$v = v_+ e^{i(|k|x + \omega t)} + v_- e^{i(-|k|x + \omega t)}$$

On a

$$0 = v(x=0) = (v_+ + v_-) e^{i\omega t}, \forall t,$$

donc  $v_- = -v_+$ . On a

$$0 = v(x=L) = v_+ (e^{i(kL + \omega t)} - e^{i(-kL + \omega t)}) = v_+ e^{i\omega t} (e^{ikL} - e^{-ikL})$$

donc  $e^{ikL} - e^{-ikL} = 0 \Leftrightarrow e^{2ikL} = 1 \Leftrightarrow 2kL = 2\pi n$  avec  $n \in \mathbb{Z}$ , donc

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\omega_n = k_n c = \frac{\pi c n}{L}.$$

Seulement ces fréquences  $\omega_n$  discrètes sont possibles. Au final l'onde de vitesse réelle (onde physique) est

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \operatorname{Re} (A e^{i\omega_n t} (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x})) = \operatorname{Re} (A e^{i\omega_n t} 2i \sin(k_n x)) \\ &= V \cos(\omega_n t + \alpha) \sin(k_n x) \end{aligned}$$

avec  $2iA = V e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ . □

**Exercice 1.3.31.** (\*) Programmer la propagation d'un paquet d'onde Gaussien sur le segment  $[0, L]$  avec la méthode de Fourier.

### 1.3.5 Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur $\mathbb{R}^3$

[video de cette section](#)

Ici l'espace est l'espace **Euclidien total**  $\mathbb{R}^3$  (ou  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}$ ). La solution de Fourier que l'on a vu au paragraphe précédent 1.3.3.2 se généralise facilement à  $\mathbb{R}^d$ . Considérons l'équation d'onde

$$\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0 \tag{1.3.11}$$

avec  $c > 0$  constant,  $x \in \mathbb{R}^3$ , d'inconnue la fonction  $p(x, t)$ . C'est une EDP linéaire à coefficients constants, que l'on peut donc résoudre par transformée de Fourier. D'après la théorie de Fourier, toute solution est combinaison linéaire de

$$p_{k, \omega}(x, t) = A e^{i(k \cdot x + \omega t)} \tag{1.3.12}$$



appelée **onde plane** (ou **mode de Fourier**) avec  $\omega \in \mathbb{R}$  **pulsation** (ou **fréquence temporelle**) et  $k \in \mathbb{R}^3$  **vecteur d'onde** (ou **fréquence spatiale**) et une amplitude  $A \in \mathbb{C}$ . La fonction **phase** est  $\varphi(x, t) := k \cdot x + \omega t + \alpha \bmod 2\pi$ . Les **lignes de phases** sont les lignes de niveaux de cette fonction phase. Ce sont des hyperplans dans  $(x, t) \in \mathbb{R}^{3+1}$  aussi appelé **fronts d'ondes**.

**Proposition 1.3.32.** *Sur le domaine  $\mathbb{R}^3$ , une **onde plane**  $p(x, t) = Ae^{i(k \cdot x + \omega t)}$  est solution de (1.3.11),  $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ , si*

$$\omega = \pm c |k|.$$

Alors la **densité de courant d'énergie**  $j = pv$ , obtenue en (1.2.12), est de module (en  $W/m^2$ )

$$|j| = \frac{c}{\gamma p_0} |p|^2 \quad (1.3.13)$$

**Exemple 1.3.33.** Par exemple si  $|p| = 1Pa$  et  $c = 343m/s$ ,  $p_0 = 10^5 Pa$ ,  $\gamma = \frac{7}{5}$ , on obtient  $|j| = 2.5 \cdot 10^{-3} W/m^2$ .

*Démonstration.* Si on remplace  $p$  par  $Ae^{i(k \cdot x + \omega t)}$  dans (1.3.11) on obtient la condition

$$(i\omega)^2 - c^2 (ik) \cdot (ik) = 0 \quad (1.3.14)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \pm c |k| \quad (1.3.15)$$

D'après (1.2.10),  $p = -\rho_0 \partial_t \phi$  on obtient le potentiel des vitesses

$$\phi(x, t) = -\frac{A}{\rho_0 i \omega} e^{i(k \cdot x + \omega t)}$$

et (1.2.9),  $v = \text{grad}(\phi)$  donne le champ de vitesses

$$v = -\frac{Ak}{\rho_0 \omega} e^{i(k \cdot x + \omega t)} \quad (1.3.16)$$

$$= -\frac{Ac^2 k}{\gamma p_0 \omega} e^{i(k \cdot x + \omega t)} \quad (1.3.17)$$

donc

$$j = pv = -\frac{A^2 c^2 k}{\gamma p_0 \omega} e^{2i(k \cdot x + \omega t)}$$

$$|j| = \frac{|A|^2 c}{\gamma p_0} = \frac{c |p|^2}{\gamma p_0}.$$

□

### 1.3.6 Mesure de l'intensité en décibels

[video de cette section](#)

On a vu en (1.2.12) que la densité de courant d'énergie est  $j = pv$  en  $W/m^2$  et que pour une onde plane  $|j| = \frac{c}{\gamma p_0} |p|^2$ , en (1.3.13).

La définition suivante donne une mesure équivalent de  $|j|$  mais sur une échelle logarithmique, plus appropriée à la perception humaine.

**Définition 1.3.34.** Pour une densité de courant d'énergie  $|j|$  on associe une "intensité"  $I$  en **déciBel** (dB) par

$$I = 10 \frac{1}{\ln 10} \ln \left( \frac{|j|}{j_0} \right)$$

avec  $j_0 = 10^{-12} W/m^2$ .

*Remarque 1.3.35.* D'après la définition,

- $|j| = j_0$  donne  $I = 0$  dB qui est, on verra en section 3.3.3, le seuil de la perception humaine vers  $\omega = 1000$  Hz. Cela justifie le choix de  $j_0$  dans la définition.
- Une augmentation +1dB correspond à  $|j'| = 10^{1/10} \times |j| = 1.26 |j|$ . C' est le minimum perceptible par un humain et cela justifie le choix du facteur  $10^{\frac{1}{\ln 10}}$  dans la définition.
- Une augmentation multiplicative  $|j'| = 10 \times |j|$  donne une augmentation additive de  $I' = I + 10$  dB soit de 10 dB = 1B est "1 Bel".
- On peut retenir que  $|j'| = 2 \times |j|$  donne une augmentation  $I' = I + \left(10 \frac{\ln 2}{\ln 10}\right) \sim I + 3$  dB.
- Si on double l'amplitude d'une onde sonore, i.e. une augmentation de la pression  $p' = 2 \times p$  mais aussi  $v' = 2 \times v$  pour la vitesse et donc  $|j'| = 4 \times |j|$ , cela donne une augmentation  $I' = I + \left(10 \frac{\ln 4}{\ln 10}\right) \sim I + 6$  dB.
- $I = 120$  dB est le seuil de douleur pour la perception humaine.

**Exemple 1.3.36.** Si  $|p| = 1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ Atmos}$ ,  $c = 343 \text{ m/s}$ ,  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\gamma = \frac{7}{5}$  donne

$$|j| = \frac{c}{\gamma p_0} |p|^2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m^2}$$

$$I = 10 \frac{\ln(2,5 \cdot 10^9)}{\ln 10} = 93 \text{ dB}$$

qui est un son très fort pour la perception humaine.

**Exemple 1.3.37.** Si  $|p| = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} = 10^{-10} \text{ Atmos}$ , donne

$$|j| = \frac{c}{\gamma p_0} |p|^2 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

$$I = 10 \frac{\ln(|j|/j_0)}{\ln 10} = 0 \text{ dB}$$

qui est un son à la limite du perceptible humainement.

**Exemple 1.3.38.** Si on considère une source ponctuelle et on note  $|j(d)|$  la densité de courant d'énergie mesurée à la distance  $d$  et  $S(d) = 4\pi d^2$  est la surface de la sphère de rayon  $d$  alors  $S(d)|j(d)| = \text{cste}$  et le flux total d'énergie et ne dépend pas de  $d$ . Par conséquence si on double la distance,

$$d' = 2 \times d$$

alors  $S' = 4 \times S$  donc  $|j'| = \frac{1}{4} |j|$  et

$$I' = I + \left( 10 \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln 10} \right) = I - 2 \left( 10 \frac{\ln 2}{\ln 10} \right) \sim I - 6 \text{ dB}$$

### 1.3.7 Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur le rectangle $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$

On peut généraliser le résultat présent et considérer une cavité rectangulaire en utilisant la séparation des variables.

**Proposition 1.3.39.** Dans une “cavité rectangulaire”, à deux dimensions  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$ , avec les conditions aux bords  $v(x, t) = 0$  si  $x \in \partial\Omega$ , une solution générale de l'équation d'onde

$$\partial_t^2 v - c^2 \Delta v = 0$$

est une superposition de **modes stationnaires** (ou **modes propres**) :

$$v(x, t) = \sum_{n=(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2} V_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_{n_1} x_1) \sin(k_{n_2} x_2) \quad (1.3.18)$$

avec les vecteurs d'ondes  $k_n = (k_{n_1}, k_{n_2}) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant

$$k_{n_j} = n_j \frac{\pi}{L_j}, \quad j = 1, 2,$$

( $k_n$  appartient à un réseau) et le **spectre de fréquences**

$$\omega_n = c |k_n|, \quad (1.3.19)$$

avec  $|k_n| = (k_{n_1}^2 + k_{n_2}^2)^{1/2}$ , l'amplitude  $V_n > 0$ , et phase  $\varphi_n \in \mathbb{R}$ . Le spectre “n'est pas harmonique”, et on a la **loi de Weyl** : le nombre de fréquences propres  $\omega_n$  dans l'intervalle  $[0, \omega]$  est

$$\mathcal{N}(\omega) := \#\{\omega_n \leq \omega\} = \frac{\omega^2}{4\pi c^2} L_1 L_2 + o(\omega^2) \quad (1.3.20)$$

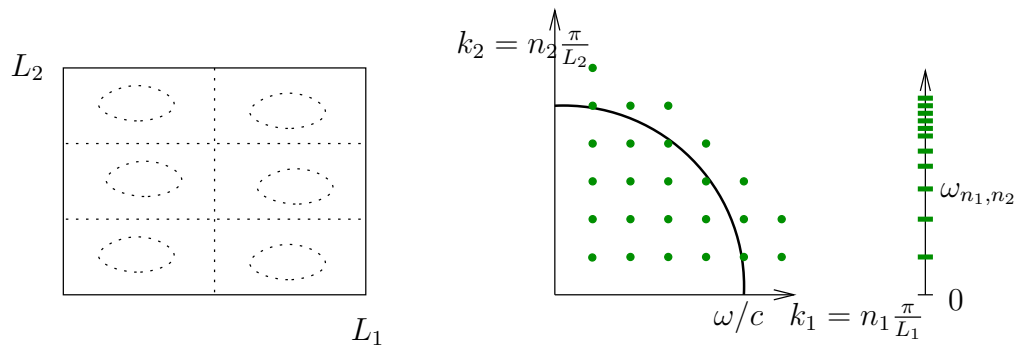


FIGURE 1.3.3 – (a) Enveloppe d'un mode propre (1.3.18), ici  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ . (b) Plan du vecteur d'onde  $k = (k_1, k_2)$ . Le spectre est la condition  $\omega = c|k|$  (c) Spectre (non harmonique).

**Exercice 1.3.40.** Ecrire la preuve de la proposition 1.3.39. Aide : L'équation à résoudre est

$$\partial_t^2 v - c^2 \Delta v = 0$$

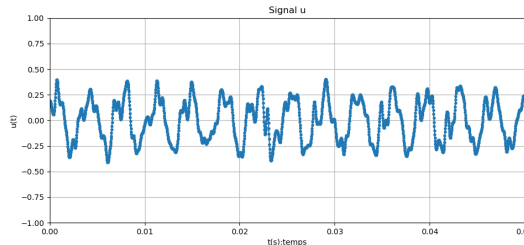
avec  $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$ . Une première étape est de résoudre  $(-\Delta)u = k^2 u$  c'est à dire trouver les fonctions propres  $u(x)$  satisfaisant les conditions aux limites et les valeurs propres  $k^2 > 0$  de l'opérateur  $(-\Delta)$ . Ensuite on vérifiera que  $v(x, t) = e^{i\omega t}u(x)$  est solution de l'équation d'onde avec  $\omega = ck$ . Grâce à la forme rectangulaire il y a "séparation des variables"  $x_1, x_2$  c'est à dire que on cherche la solution sous la forme  $u(x_1, x_2) = u_1(x_1)u_2(x_2)$  ce qui ramène à résoudre  $-\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} = k_j^2 u_j$  pour  $j = 1, 2$ .

*Remarque 1.3.41.* La solution à ce problème paraît très simple, pourtant il est très difficile de préciser la correction à la loi de Weyl dans (1.3.20). Voir [Problème du cercle de Gauss](#).

*Remarque 1.3.42.* Voici le signal mesuré en un point de la plaque et le son produit [audio\\_2D.wav](#) avec une fondamentale à  $f_0 = 440\text{Hz}$ , par ce programme [sinus\\_sum\\_general.py](#). Il s'agit précisément de la fonction

$$u(t) = \sum_{n_1, n_2=1}^{10} A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

avec l'amplitude  $A_n = 1/(n_1^2 + n_2^2)$ , des fréquences  $f_n = (n_1^2 + n_2^2)^{1/2} f_0$  et des phases  $\varphi_n$  aléatoires. On le perçoit comme non harmonieux, car le signal est non périodique, le spectre est non harmonique.



Il serait intéressant d'étudier le "pitch" perçu.

### 1.3.8 Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur le disque $\Omega = \mathbb{D}(R)$

On peut aussi résoudre l'équation d'onde sur le disque en utilisant la symétrie de rotation et se ramener à une équation différentielle ordinaire radiale dont les solutions sont les [fonctions de Bessel](#).

### 1.3.9 Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur un domaine compact $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

On va considérer une généralisation des résultats précédents.

On utilisera un résultat important.

**Théorème 1.3.43.** *Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est un domaine compact, alors l'opérateur  $\Delta$  sur  $\Omega$  avec les conditions au bord de Dirichlet a du spectre discret, i.e.*

$$(-\Delta) v_j = \omega_j^2 v_j$$

avec les conditions au bord

$$v|_{\partial\Omega} = 0$$

a des valeurs propres  $0 < \omega_0^2 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \dots$  avec des fonctions propres  $u_j \in L^2(\Omega)$ .  
On a la loi de Weyl

$$\mathcal{N}(\omega) := \#\{\omega_n \leq \omega\} = \frac{\omega^d}{4\pi} |\Omega| + o(\omega^d) \quad (1.3.21)$$

où  $|\Omega|$  est le volume de  $\Omega$ .

Ensuite posons  $u_j(x, t) = A e^{i\omega_j t} v_j(x)$  avec  $A = |A| e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ . Alors  $\partial_t^2 u_j = -A \omega_j^2 e^{i\omega_j t} v_j = A e^{i\omega_j t} \Delta v_j = \Delta u_j$ . Donc  $u_j$  est solution de l'équation des ondes et vérifie la condition au bord  $u_j|_{\partial\Omega} = 0$ . De même pour

$$\operatorname{Re}(u_j(x, t)) = |A| \cos(\omega_j t + \alpha) v_j(x)$$

qui est la forme générale d'une solution réelle de l'équation d'onde.

### 1.3.10 Equation avec amortissement $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p + a \partial_t p = 0$ sur $\Omega = \mathbb{R}^3$

On suppose ici une fonction amortissement constante  $a(x, t) = a \geq 0$ .

**Proposition 1.3.44.** *Sur le domaine  $\Omega = \mathbb{R}^3$ , une onde plane  $p(x, t) = A e^{i(k \cdot x + \omega t)}$  est solution de  $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p + a \partial_t p = 0$  si*

$$\omega = \pm c |k| \left( 1 - \left( \frac{a}{2c |k|} \right)^2 \right)^{1/2} + i \frac{a}{2}.$$

La partie imaginaire implique un amortissement temporel avec un temps caractéristique  $\tau = \frac{2}{a}$  :

$$e^{i\omega t} = e^{-\frac{a}{2} t} e^{i \operatorname{Re}(\omega) t}$$

*Démonstration.* Si on suppose  $p(x, t) = A e^{i(k \cdot x + \omega t)}$  alors l'équation  $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p + a \partial_t p = 0$  donne

$$\begin{aligned} -\omega^2 p + c^2 |k|^2 p + i a \omega p &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega^2 - i a \omega - c^2 |k|^2 &= 0 \end{aligned}$$

#### 1.4. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION D'ONDES SUR UN DOMAINE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ COMPACT

donc avec  $\Delta := -a^2 + 4c^2 |k|^2$ , les solutions de cette équation du second degré sont

$$\omega = \frac{ia \pm \sqrt{\Delta}}{2} = i\frac{a}{2} \pm c|k| \left( 1 - \left( \frac{a}{2c|k|} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

□

### 1.4 Résolution numérique de l'équation d'ondes sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ compact

Résultats attendus.

### 1.5 Analyse micro-locale (semi-classique) de l'équation des ondes

*Remarque 1.5.1.* Dans cette section on va utiliser des notions un peu plus élaborées d'analyses comme la transformée de Fourier en dimensions 2, 3. On peut découvrir ces notions et développer une certaine compréhension en lisant d'abord le chapitre 2 et revenir ensuite ici.

**“Approximation semi-classique” :** On va montrer que dans la **limite des petites longueurs d'ondes**, une onde sonore se comporte comme une superposition de particules régies par l'équation de mouvement de Hamilton (1834).

En fait cela est général aux équations ondulatoires. Par exemple dans cette approximation,

- Une onde lumineuse (Hamilton 1834) peut être considérée comme une superposition de rayons lumineux.
- Une onde quantique de matière (Schrödinger 1920), peut être considérée comme une superposition de particules décrites par l'équation de mouvement de Newton.

Cette approximation n'est pas exacte, elle est valable si  $\epsilon = \frac{\lambda}{L} \ll 1$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $L$  la longueur de variation du domaine ou des paramètres. Mais l'erreur peut être de l'ordre de  $C_N \epsilon^N$  avec  $N \gg 1$  arbitraire ou même  $C e^{-C/\epsilon}$  avec  $C > 0$  donc une erreur très petite en pratique.

On obtiendra deux formulations équivalentes de ce résultat :

1. Formulation par paquets d'ondes, donnant une correspondance directe onde-particules.
2. Formulation par variétés Lagrangiennes aussi appelée “Théorie W.K.B.” ou “Théorie de Hamilton-Jacobi”.

Il faut donc retenir que l'analyse microlocale qui donne une dynamique Hamiltonienne effective est très pertinente dans le régime des petites longueurs d'ondes  $\epsilon = \frac{\lambda}{L} \ll 1$ . Par

contre si ce n'est pas le cas, il faut résoudre l'équation des ondes par d'autres moyens. Ainsi les modèles solubles du paragraphe précédents sont importants, ainsi que les méthodes numériques.

### 1.5.1 De l'équation des ondes du 2nd ordre en $t$ à l'équation de Schrödinger du 1er ordre

La première étape dans notre étude de l'équation d'onde est de la remplacer par une équation équivalente mais du premier ordre en temps. En effet, afin d'étudier l'évolution temporelle partant de conditions initiales, il est naturel en science de reformuler une équation différentielle d'ordre  $n \geq 2$  en temps comme un système d'équations d'ordre 1, car ainsi une condition initiale détermine une trajectoire, on obtient un **groupe d'évolution**.

**Lemme 1.5.2.** *L'équation d'onde du deuxième ordre  $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p + a \partial_t p = s$  avec des fonctions  $c(x, t)$ ,  $a(x, t)$ ,  $s(x, t)$  s'écrit comme une équation du premier ordre*

$$\partial_t X = AX + B \quad (1.5.1)$$

avec la fonction à valeur dans  $\mathbb{R}^2$  (appelé champ vectoriel)

$$X(x, t) = \begin{pmatrix} p(x, t) \\ (\partial_t p)(x, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

et les fonctions matricielles et vectorielles

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 \Delta & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$$

*Démonstration.* L'équation d'onde devient

$$\partial_t X = \begin{pmatrix} \partial_t p \\ \partial_t^2 p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t p \\ c^2 \Delta p - a \partial_t p + s \end{pmatrix} = AX + B$$

□

On peut résoudre l'équation (1.5.1). Pour cela il faut diagonaliser la matrice  $A$  afin de séparer cette équation vectorielle en deux équations indépendantes.

Par simplicité on va considérer un exemple plus simple sans amortissement ni source, i.e.  $a = 0$ ,  $s = 0$  mais avec une fonction  $c(x, t)$  variable, appelé **indice du milieu**. Introduisons avant cela l'opérateur  $\sqrt{-\Delta}$  sur  $\mathbb{R}^3$  par son action sur un mode de Fourier (1.3.12),  $p_k(x) = e^{ik \cdot x}$  avec  $k \in \mathbb{R}^3$ . On observe que  $-\Delta p_k = |k|^2 p_k$ , donc on définit l'opérateur  $\sqrt{-\Delta}$  par son action sur les modes de Fourier :

$$\sqrt{-\Delta} p_k = |k| p_k$$



de sorte que  $(\sqrt{-\Delta})^2 = -\Delta$ .

**Théorème 1.5.3.** “*Formulation de l'équation d'onde par deux équations du premier ordre*”. L'équation d'onde (1.3.1)  $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$  du 2nd ordre en  $t$  avec la fonction  $c(x, t)$ , est équivalente aux deux équations de type Schrödinger suivantes

$$i \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t} = \mp \hat{\Omega} \psi_{\pm}, \quad (1.5.2)$$

avec

$$\psi_{\pm} = p \pm \frac{i}{\sqrt{-\Delta}} \partial_t p$$

et l'opérateur

$$\hat{\Omega} = c\sqrt{-\Delta}. \quad (1.5.3)$$

*Démonstration.* Comme ci-dessus, posons  $X = \begin{pmatrix} p \\ \partial_t p \end{pmatrix}$ . Alors

$$\partial_t X = \begin{pmatrix} \partial_t p \\ \partial_t^2 p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t p \\ c^2 \Delta p \end{pmatrix} = AX$$

avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 \Delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2(-\Delta) & 0 \end{pmatrix}$  que l'on diagonalise

$$A = PDP^{-1},$$

avec une matrice de passage  $P$  et une matrice diagonale  $D$ . La solution<sup>2</sup> est

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ic\sqrt{-\Delta} & -ic\sqrt{-\Delta} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} ic\sqrt{-\Delta} & 0 \\ 0 & -ic\sqrt{-\Delta} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{\sqrt{-\Delta}} \\ 1 & \frac{-i}{\sqrt{-\Delta}} \end{pmatrix}.$$

On pose  $\psi = P^{-1}X = \begin{pmatrix} p + \frac{i}{\sqrt{-\Delta}} \partial_t p \\ p - \frac{i}{\sqrt{-\Delta}} \partial_t p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ , alors

$$\partial_t \psi = P^{-1} \partial_t X = P^{-1} AX = P^{-1} AP \psi = D \psi$$

C'est à dire

$$\partial_t \psi_{\pm} = \pm ic\sqrt{-\Delta} \psi_{\pm} \Leftrightarrow i \partial_t \psi_{\pm} = \mp c\sqrt{-\Delta} \psi_{\pm}$$

□

2. par exemple on peut utiliser [xcas en ligne](#), et écrire :

## 1.5.2 L'équation de Schrödinger

### 1.5.2.1 Équation d'évolution de Schrödinger

Dans la suite du chapitre, on va s'intéresser à une équation d'évolution comme celle obtenue en (1.5.2), appelée **équation de Schrödinger**

$$i\partial_t u_t = \hat{\Omega} u_t \quad (1.5.4)$$

où  $u_t : x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow u_t(x) \in \mathbb{C}$  est une fonction et  $\hat{\Omega}$  un opérateur différentiel que l'on définit en toute généralité ci-dessous. Attention, on va s'intéresser à cette équation dans le cadre de l'acoustique (elle apparaît dans tous les domaines de la physique ondulatoire : acoustique, optique, électromagnétisme, ondes sismique etc, pas seulement avec la mécanique quantique).

Dans cette Section on fait quelques remarques générales qu'il est important de connaître.

*Remarque 1.5.4.*  $\hat{\Omega}$  a l'unité de l'inverse de  $t$ , c'est donc une **fréquence**. Dans certains cas, par exemple (1.5.3), l'opérateur  $\hat{\Omega}$  est auto-adjoint, c'est à dire  $\hat{\Omega}^\dagger = \hat{\Omega}$ . D'après la proposition B.3.3, cela implique que ses valeurs propres sont réelles que l'on notera donc  $(\omega_j)_j$  et que les espaces propres sont orthogonaux entre eux.

*Remarque 1.5.5.* La présence du facteur  $i$  dans (1.5.4) est une convention. Il serait peut être plus simple d'écrire  $\partial_t u_t = \hat{\Omega}' u_t$  avec  $\hat{\Omega}' = -i\hat{\Omega}$  qui est anti auto-adjoint, i.e.  $\hat{\Omega}'^\dagger = -\hat{\Omega}'$  donc avec des valeurs propres imaginaires pures que l'on noterait  $(-i\omega_j)_j$  et on retrouve le facteur  $i$ .

### 1.5.2.2 Équation stationnaire de Schrödinger

Supposons que l'opérateur  $\hat{\Omega}$  dans (1.5.4) est auto-adjoint et que  $\hat{\Omega}u = \omega u$  où  $u$  est un vecteur propre et  $\omega$  une valeur propre.

**Proposition 1.5.6.** *Si  $\hat{\Omega}u = \omega u$  avec une fonction propre  $u : x \rightarrow u(x)$  et valeur propre  $\omega$ , alors la fonction*

$$v_t(x) = e^{-i\omega t} u(x)$$

*est solution de l'équation d'évolution (1.5.4), appelée **solution stationnaire** car le module  $|v_t(x)| = |u(x)|$  est indépendant du temps.*

*Démonstration.* On calcule  $i\partial_t v_t = i(-i\omega)v_t = \omega v_t$  et  $\hat{\Omega}v_t = e^{-i\omega t}\hat{\Omega}u = \omega e^{-i\omega t}u = \omega v_t$  donc on a bien  $i\partial_t v_t = \hat{\Omega}v_t$ .  $\square$

*Remarque 1.5.7.* Les vecteur propres d'un opérateur sont en général impossible à calculer. On sait parfois montrer leur existence seulement. Expérimentalement, on les observe en régime stationnaire, c'est à dire en alimentant le système par un signal d'amplitude temporelle  $e^{-i\omega t}$  appelé signal monochromatique.

### 1.5.2.3 Opérateur différentiel

On définit l'**opérateur Nabla** :

$$\nabla := (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$$

et pour des entiers  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$  on note

$$(-i\nabla)^\alpha := (-i\partial_{x_1})^{\alpha_1} (-i\partial_{x_2})^{\alpha_2} (-i\partial_{x_3})^{\alpha_3}$$

qui est un opérateur différentiel d'ordre  $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ . Le facteur  $(-i)$  est utile pour la suite car  $(-i\partial_{x_j})(e^{ikx}) = k_j e^{ikx}$ . Avec cette convention, on peut écrire par exemple

$$-c^2 \Delta = c^2 \left( (-i\partial_{x_1})^2 + (-i\partial_{x_2})^2 + (-i\partial_{x_3})^2 \right) = c^2 \left( (-i\nabla)^{(2,0,0)} + (-i\nabla)^{(0,2,0)} + (-i\nabla)^{(0,0,2)} \right)$$

qui est un opérateur différentiel d'ordre  $|\alpha| = 2$ .

**Définition 1.5.8.** Un **opérateur différentiel** d'ordre  $m \in \mathbb{N}$  est un opérateur de la forme

$$\hat{\Omega} = \Omega(x, -i\nabla, t) = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq m} \Omega_\alpha(x, t) (-i\nabla)^\alpha \quad (1.5.5)$$

avec des fonctions  $\Omega_\alpha(x, t)$ . On associe la fonction

$$\Omega(x, k, t) = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq m} \Omega_\alpha(x, t) k^\alpha$$

de la position  $x \in \mathbb{R}^3$ , du vecteur d'onde  $k \in \mathbb{R}^3$  et du temps (polynôme de degré  $m$  en  $k$ ) appelée **symbole**, où on a remplacé  $-i\nabla$  par  $k$  d'après le **principe de correspondance**.

*Remarque 1.5.9.* L'opérateur ainsi défini  $\hat{\Omega}$  servira de générateur pour l'équation d'évolution  $i\partial_t u = \hat{\Omega}u$  étudiée plus bas en (1.5.4). On a remarqué en 1.5.4 que  $\Omega$  a l'unité d'une fréquence. La fonction

$$(x, k, t) \rightarrow \Omega(x, k, t)$$

est aussi appelée **relation de dispersion** (car voir ci-dessous, elle expliquera la dispersion spatiale des paquets d'ondes).

**Exemple 1.5.10.** En mécanique quantique, l'équation de Schrödinger s'écrit

$$i\hbar\partial_t u_t = \hat{H}u_t$$

avec la constante de Planck  $\hbar$  en  $J.s$  et l'**opérateur de Schrödinger**  $\hat{H}$  décrivant une particule de masse  $m$  dans un champ de forces décrit par l'énergie potentielle  $U(x)$  est

l'opérateur différentiel d'ordre 2 suivant

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( (-i\partial_{x_1})^2 + (-i\partial_{x_2})^2 + (-i\partial_{x_3})^2 \right) + U(x) = H(x, -i\nabla)\end{aligned}$$

Remarquons que l'équation de Schrödinger peut s'écrire  $i\partial_t u_t = \hat{\Omega} u_t$  avec  $\hat{H} = \hbar\hat{\Omega}$ . Ainsi  $\hat{H}$  a l'unité de

$$E := \hbar\omega$$

qui est une énergie en Joules. Le symbole de  $\hat{H}$  appelé **Hamiltonien classique** est

$$H(x, k) = \frac{\hbar^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)}{2m} + U(x) = \frac{|\hbar k|^2}{2m} + U(x) = \frac{|p|^2}{2m} + U(x) \quad (1.5.6)$$

où l'on a défini le vecteur **impulsion**

$$p := \hbar k \in \mathbb{R}^3.$$

**Exemple 1.5.11.** Pour l'équation des ondes reformulée comme (1.5.2), en supposant que  $c(x)$  peut dépendre de  $x$ , on a d'après (1.5.3)

$$\hat{\Omega} = c(x) \sqrt{-\Delta} = c(x) \sqrt{(-i\nabla)^2} = \Omega(x, -i\nabla)$$

avec le symbole

$$\Omega(x, k) = c(x) \sqrt{|k|^2} = c(x) |k| \quad (1.5.7)$$

### 1.5.3 Limite semi-classique de l'équation de Schrödinger

**Définition 1.5.12.** Pour une position  $x \in \mathbb{R}^3$  et un vecteur d'onde  $k \in \mathbb{R}^3$  donnés on associe un **paquet d'onde** de largeur  $\sigma > 0$  fixée qui est la fonction

$$\varphi_{x,k}(x') = a e^{ikx'} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\|x' - x\|}{\sigma} \right)^2},$$

avec  $a > 0$  de sorte que  $\|\varphi_{x,k}\|_{L^2} = 1$ .

Sa transformée de Fourier définie en (B.5.1) est donnée par (voir (B.6.1))

$$(\mathcal{F}\varphi_{x,k})(k') = a' e^{ixk'} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\|k' - k\|}{(1/\sigma)} \right)^2}$$

Les formules précédentes montrent que le module  $x' \rightarrow |\varphi_{x,k}(x')|$  est une fonction Gaussienne de largeur  $\Delta x = \sigma$  centrée en  $x$ . Le module de la transformée de Fourier  $k' \rightarrow$

$|(\mathcal{F}\varphi_{x,k})(k')|$  est une fonction Gaussienne de largeur  $\Delta k = 1/\sigma$  centrée en  $k$ . Remarquer que

$$\Delta x \Delta k = 1 \tag{1.5.8}$$

appelé **principe d'incertitude**. On introduit  $\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$  qui est la longueur d'onde des oscillations de la fonction  $\varphi_{x,k}(x')$ . On supposera

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|} \ll \Delta x = \sigma \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad |k| \gg \frac{1}{\sigma}$$

on a le schéma suivant montrant que le paquet d'onde occupe une petite place de surface  $\Delta x \Delta k = 1$  dans l'espace des phases  $(x, k)$ . On dit qu'il est **microlocalisé** dans l'espace des phases.

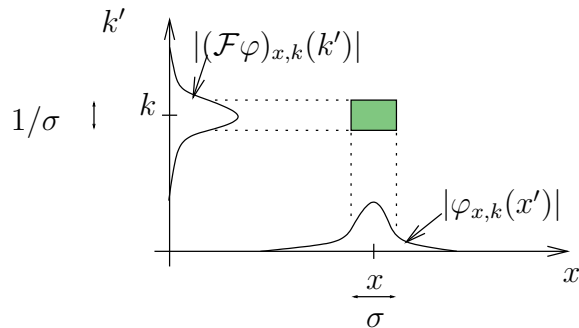


FIGURE 1.5.1 – Paquet d'onde

Le théorème suivant montre que les paquets d'ondes forment une base de l'espace des fonctions au sens où toute fonction se décompose (et se recompose) comme superposition de paquet d'ondes.

**Théorème 1.5.13. “Décomposition en paquets d'ondes”.** Toute fonction (ou distribution)  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  s'écrit

$$u(x') = \int (Tu)(x, k) \varphi_{x,k}(x') \frac{dx dk}{(2\pi)^3}$$

avec les composantes

$$(Tu)(x, k) = \langle \varphi_{x,k} | u \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\varphi_{x,k}(x')} u(x') dx'$$

appelée **transformée par paquet d'ondes** de  $u$ .

*Remarque 1.5.14.* La transformée par paquet d'ondes  $T$  généralise la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$ . En effet en prenant  $\sigma \rightarrow \infty$ , on a  $\varphi_{x,k}$  qui converge vers le mode de Fourier  $e^{ikx'}$  et

$Tu \rightarrow \mathcal{F}u$ . Au contraire pour  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $Tu \rightarrow u$ . La transformée par paquet d'onde se généralise et est utile dans beaucoup de domaines : de la théorie du signal (transformée par ondelettes pour la compression mp3, mp4), à la physique (transformée de Bargmann en mécanique quantique) à la géométrie algébrique (plongement de Kodaira).

Le résultat suivant est remarquable et est à la base de l'émergence de la dynamique Hamiltonienne (i.e. optique géométrique, mécanique de Hamilton et de Newton etc) dans la physique. Avant cela précisons une définition utile.

**Définition 1.5.15.** Une fonction (ou distribution)  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  est **microlocalisée au point  $(x, k)$  de l'espace des phases**, si pour tout point  $(x', k')$  loin de  $(x, k)$  pour la distance  $d_\sigma^2 = \left(\frac{x'-x}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{|k'-k|}{1/\sigma}\right)^2$ , alors  $|\langle \varphi_{x',k'} | u \rangle| \ll 1$  est négligeable, dans la limite  $d_\sigma^2 \rightarrow \infty$ .

**Exemple 1.5.16.** un paquet d'onde  $\varphi_{x,k}$  est microlocalisé au point  $(x, k)$ , d'après la formule explicite

$$|\langle \varphi_{x',k'} | \varphi_{x,k} \rangle| = \exp(-d_\sigma^2)$$

avec  $d_\sigma^2 = \left(\frac{x'-x}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{|k'-k|}{1/\sigma}\right)^2$ .

*Remarque 1.5.17.* De façon intuitive,  $u$  est microlocalisé au point  $(x, k)$  signifie que toute son énergie (ou sa norme) est contenue dans un voisinage du point  $(x, k)$ .

**Théorème 1.5.18.** “*Emergence de la dynamique Hamiltonienne, évolution d'un paquet d'onde*”.

Soit  $\hat{\Omega} = \Omega(x, -i\nabla)$  un opérateur quelconque obtenu à partir d'un symbole  $\Omega(x, k)$  comme dans (1.5.5). Supposons que  $u(0) = \varphi_{x,k}$  est un paquet d'onde qui évolue selon l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t u_t = \hat{\Omega} u_t \tag{1.5.9}$$

Alors pour tout  $t$  et  $\lambda = \frac{2\pi}{k} \ll \sigma \ll 1$  assez petits, la solution  $\psi_t$  est microlocalisée sur la **trajectoire classique**  $x(t), k(t)$  solution des **équations du mouvement de Hamilton**

$$\begin{aligned} \partial_t x_j &= \partial_{k_j} \Omega, & j &= 1, 2, 3, \\ \partial_t k_j &= -\partial_{x_j} \Omega, \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

La vitesse du paquet d'onde  $v = (\partial_t x_j)_j$  s'appelle aussi **vitesse de groupe** et l'équation  $\Omega(x, k) = \omega$  s'appelle aussi **relation de dispersion**.

**Exemple 1.5.19.** Voici deux exemples très simple (à la base de la preuve du Théorème 1.5.18).

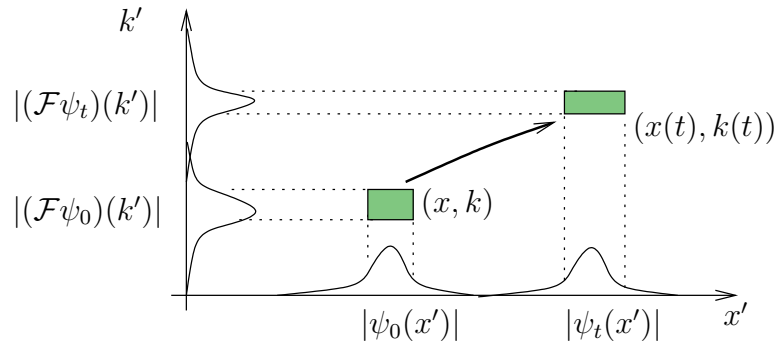


FIGURE 1.5.2 – Evolution d'un paquet d'onde

1. Si on considère  $x, k \in \mathbb{R}$  et le cas particulier  $\Omega(x, k) = \alpha k$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  constante, alors  $\hat{\Omega} = -i\alpha\partial_x$  et on vérifie que  $u_t(x) = u_0(x - \alpha t)$  vérifie l'équation de Schrödinger  $i\partial_t u = -i\alpha\partial_x u = \hat{\Omega}u$ . On observe que cette solution  $u_t(x)$  se déplace à la vitesse  $\alpha$ . Par ailleurs les équations de mouvement de Hamilton donnent  $\partial_t x = \partial_k \Omega = \alpha$  et  $\partial_t k = -\partial_x \Omega = 0$ , qui est aussi une translation en  $x$  à la vitesse  $\alpha$ .
2. Si on considère  $x, k \in \mathbb{R}$  et le cas particulier  $\Omega(x, k) = -\beta x$  avec  $\beta \in \mathbb{R}$  constante, alors  $\hat{\Omega} = -\beta x$  et on vérifie que  $u_t(x) = e^{i\beta x t} u_0(x)$  vérifie l'équation de Schrödinger  $i\partial_t u = -\beta x u = \hat{\Omega}u$ . On observe la transformée de Fourier en  $x$  de  $u_t$  est  $(\mathcal{F}u_t)(k) = (\mathcal{F}u_0)(k - \beta t)$  et se déplace à la vitesse  $\beta$  selon  $k$ . Par ailleurs les équations de mouvement de Hamilton donnent  $\partial_t x = \partial_k \Omega = 0$  et  $\partial_t k = -\partial_x \Omega = \beta$ , qui est aussi une translation en  $k$  à la vitesse  $\beta$ .

*Démonstration.* Près d'un point  $(x, k)$  de l'espace des phases, on approxime  $\Omega(x, k)$  par son développement à l'ordre 1 en  $(x, k)$  :

$$\Omega(x, k) = -\beta x + \alpha k$$

et pour ce modèle (voir détails de calcul [ici](#) p.17, [Faure \(2014\)](#)) on a d'une part  $\partial_t x = \partial_k \Omega = \alpha$ ,  $\partial_t k = -\partial_x \Omega = \beta$  donc un flot de translation à la vitesse  $(\alpha, \beta)$  dans l'espace des phases  $(x, k)$ . D'autre part on peut résoudre exactement l'équation de Schrödinger  $i\partial_t u = \hat{\Omega}u$  avec  $\hat{\Omega} = -\beta x + \alpha(-i\nabla)$  montrant que  $u(x)$  se translate à la vitesse  $\alpha$  et sa transformée de Fourier  $(\mathcal{F}u)(k)$  se translate à la vitesse  $\beta$ . Ainsi le Théorème est exact dans ce cas.  $\square$

*Remarque 1.5.20.* Le principe d'incertitude est que la taille d'un paquet d'onde vérifie  $\Delta x \Delta k = 1$  est "incompressible" dans l'espace des phases. La conséquence est qu'un paquet d'onde est supporté par plusieurs trajectoires classiques  $x(t), k(t)$  et si celles ci se dispersent alors l'onde  $\psi_t$  se disperse en  $x$  et  $k$ . Pour cette raison la fonction  $\omega(x, k) = \Omega(x, k)$  est parfois appelée relation de dispersion.

### 1.5.4 Propriétés générales

On rappelle quelques propriétés générales des trajectoires classiques Hamiltoniennes.

## — Conservation de la fréquence (ou énergie)

$$\omega = \Omega(x(t), k(t)) \quad : \text{constante} \quad (1.5.11)$$

*Démonstration.*  $\partial_t \omega = \partial_t (\Omega(x(t), k(t))) = (\partial_x \Omega)(\partial_t x) + (\partial_k \Omega)(\partial_t k) = (\partial_x \Omega)(\partial_k \Omega) + (\partial_k \Omega)(-\partial_x \Omega) = 0.$   $\square$

— Conservation du volume  $\mu = dxdk$  dans l'espace des phase (théorème de Liouville).

*Démonstration.* Le flot est généré par le champ de vecteur  $X = (\partial_t x, \partial_t k) = (\partial_k \Omega, -\partial_x \Omega)$ . Sa divergence est  $\operatorname{div} X = \partial_x X_x + \partial_k X_k = \partial_{x,k}^2 \Omega - \partial_{k,x}^2 \Omega = 0.$   $\square$

## 1.5.5 Exemples

Commençons par l'exemple le plus connu, pourtant tardif dans l'histoire, qui est l'équation de Schrödinger.

**Exemple 1.5.21.** Pour l'équation de Schrödinger  $i\hbar \partial_t u = \hat{H}u$ , on a vu en (1.5.6) que la Hamiltonien classique est

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x),$$

avec le changement d'échelle  $p = \hbar k$  et  $E = \hbar \omega$  qui fait que les équations de mouvement (1.5.10) s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial k} = \frac{\partial \hbar \Omega}{\partial \hbar k} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \frac{dp}{dt} = \hbar \frac{dk}{dt} = -\hbar \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\partial_x U = -\operatorname{grad} U = F(x) \quad : \text{force} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = m \frac{dx}{dt} \quad : \text{impulsion} = \text{quantité de mouvement} \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = F(x) \quad : \text{équation de Newton (1685)} \end{cases}$$

Rappelons que historiquement Newton a ainsi expliqué pourquoi la lune subissant une force dirigée vers la terre, tourne autour de la Terre.

Passons maintenant à l'équation des ondes qui concerne plus ce cours et qui historiquement a été étudiée de ce point de vue microlocal par Hamilton en 1834.

**Exemple 1.5.22.** Pour l'équation d'onde sonore avec  $c$  constant, on a vu en (1.5.7) que  $\Omega(x, k) = c|k|$ , supposant  $c$  constant. Alors d'après les équations de mouvement (1.5.10) on a  $\partial_t k = -\partial_x \Omega = 0$  donc  $k \in \mathbb{R}^3$  est constant et

$$\partial_t x_j = \partial_{k_j} \Omega = c \partial_{k_j} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2} = c \frac{2k_j}{2|k|} = c \frac{k_j}{|k|},$$



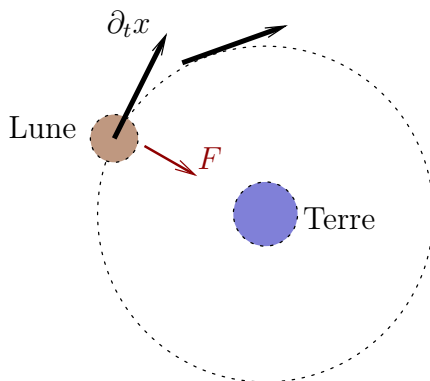


FIGURE 1.5.3 – Newton (et Hooke, voir [Arnold \(1990\)](#)) ont découvert que la lune subit une force  $F$  dirigée vers la Terre qui modifie infinitésimalement la vitesse de la lune d'après l'équation  $m\partial_t(\partial_t x) = F$ . Par conséquent, la lune tourne autour de la Terre (et ne tombe pas sur elle).

donc

$$\partial_t x = c \frac{k}{|k|} \quad (1.5.12)$$

qui est un vecteur colinéaire à  $k$  et de norme  $c$ . Autrement dit le paquet d'onde sonore  $\varphi_{x(t),k}$  se déplace en ligne droite à la vitesse  $c$  dans la direction de  $k$  qui est constant.

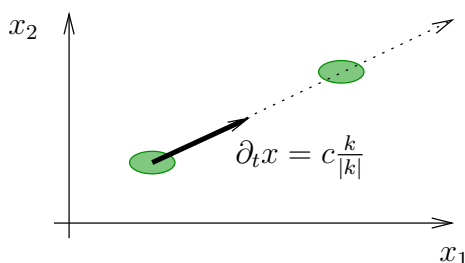


FIGURE 1.5.4 – Si  $c(x) = c$  est constant, un paquet d'onde se déplace en  $(x_1, x_2)$  rectilignement à vitesse constante  $c$ .

**Exemple 1.5.23.** Pour l'équation d'onde sonore avec  $c(x)$  variable, on a vu en (1.5.7) que  $\Omega(x, k) = c(x)|k|$ . Alors d'après les équations de mouvement (1.5.10) un paquet d'onde évolue selon

$$\partial_t k_j = -\partial_x \Omega = -|k| \operatorname{grad}(c)$$

qui n'est pas nul donc  $k(t)$  peut varier dans la direction opposée  $\operatorname{grad}(c)$  qui agit comme une "force", et

$$\partial_t x = \partial_k \Omega = c \frac{k}{|k|}$$

comme en (1.5.12) montrant que la vitesse est colinéaire à  $k(t)$  et de norme

$$\|\partial_t x\| = c(x)$$

qui dépend du point. Ces équations du premier ordre en  $t$  déterminent la trajectoire. Voir figure.

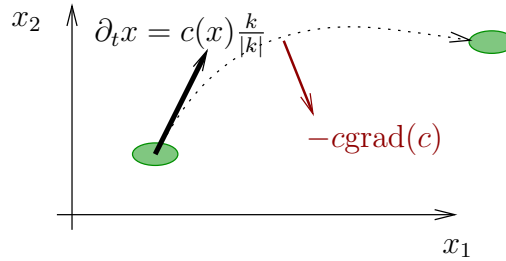


FIGURE 1.5.5 – Si  $c(x)$  est variable, un paquet d’onde se déplace en  $(x_1, x_2)$  à vitesse constante  $|\partial_t x| = c$  colinéaire à  $k$  mais subit une force  $F = -|k| \text{grad}(c)$  dirigée vers les plus faibles valeurs de  $c$ .

**Exercice 1.5.24. Réfraction : Loi de Snell (1621)-Descartes (1637) (trouvée avant par Ibn Sahl (983) à Bagdad).** Supposons que dans l’espace  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , il y a une interface en  $x_1 = 0$ , de sorte que pour  $x_1 < 0$  on a  $c(x) = c$  et pour  $x_1 > 0$  on a  $c(x) = c'$  avec  $c' < c$ . Dédurre de (1.5.7), de l’équation de mouvement de Hamilton (1.5.10) et de la conservation de l’énergie (1.5.11) que : dans chaque domaine un rayon (lumineux ou sonore) se déplace en ligne droite et à l’interface on a

$$\frac{1}{c} \sin \theta = \frac{1}{c'} \sin \theta' \quad (1.5.13)$$

où  $\theta$  (respect.  $\theta'$ ) est l’angle du rayon avec la normale de l’interface. Voir schéma.

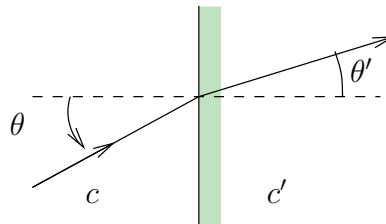


FIGURE 1.5.6 – Si  $c(x) = c, c'$  prend deux valeurs différentes de part et d’autre d’une interface alors la rayon est dévié d’après la loi de Snell-Descartes (1.5.13).

*Remarque 1.5.25.* En optique, on définit l’indice du milieu par  $n(x) = \frac{c_{\text{vide}}}{c(x)}$  où  $c_{\text{vide}}$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

**Solution :** L'énergie est  $\Omega(x) = c(x_1) |k|$  est indépendante de  $x_2$ . L'équation de mouvement (1.5.10) donne  $\partial_t k_2 = -\partial_{x_2} \Omega = 0$  donc  $k'_2 = k_2$  à l'interface. La conservation de l'énergie à l'interface donne

$$c \|k\| = c' \|k'\|$$

On a

$$\sin \theta = \frac{k_2}{\|k\|}, \quad \sin \theta' = \frac{k'_2}{\|k'\|}.$$

On déduit

$$\sin \theta' = \frac{k'_2}{\|k'\|} = \frac{k_2}{\frac{c}{c'} \|k\|} = \frac{c'}{c} \sin \theta$$

et donc (1.5.13).

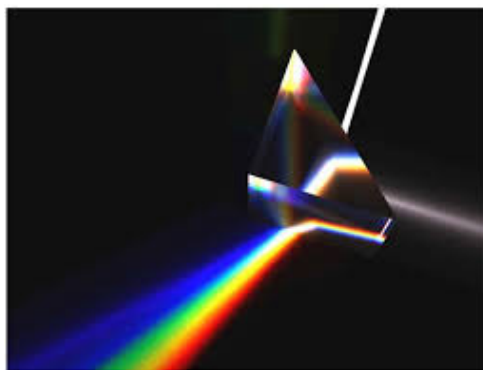
**Exemple 1.5.26.** Pour l'équation des ondes lumineuses en milieu dispersif, on a

$$\Omega(x, k) = cf(k)$$

avec la fonction  $f(k)$  non linéaire mais proche de  $|k|$ . Un développement limité donne

$$f(k) = |k| (1 + B |k|^2 + C |k|^4 + \dots)$$

appelé **loi de Cauchy** en optique. Par exemple  $B = 4,5 \cdot 10^{-10} \text{nm}^2$  dans le verre. La conséquence est que d'après les équations de mouvement de Hamilton (1.5.10), la trajectoire dépend de  $|k|$  et donc de l'énergie  $E = cf(k)$  qui correspond à la fréquence  $\omega$  d'après l'équation de Schrödinger (1.5.2). Cela implique que des rayons de fréquences  $\omega$  différentes ont des trajectoires différentes, phénomène appelé **dispersion**, comme dans le phénomène d'**arc en ciel**, ou de la dispersion de la lumière observée dans un prisme. Noter que la présentation que nous donnons ici diffère des présentations habituelle par le fait que nous ne considérons pas des ondes planes monochromatique, mais seulement le phénomène de dispersion comme une conséquence des équations de Hamilton. Cela nous semble plus naturel.



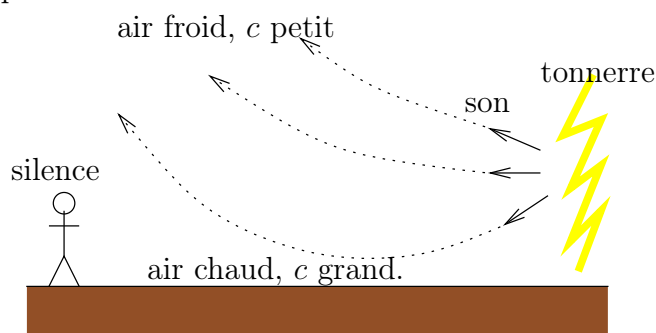
**Exemple 1.5.27. “Mirage acoustique”**

Référence : [Pour la science n298 \(2002\) Courty-Kierlyk](#).

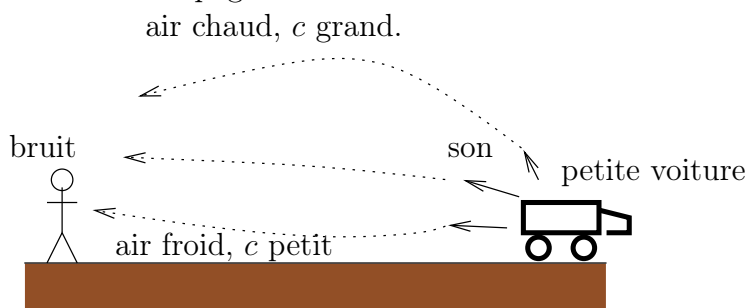
L'équation (??) a montré que si la vitesse du son  $c(x)$  dépend du point  $x$  alors le rayon sonore subit une accélération normale selon la direction de  $-\text{grad}(c)$ .

Cela se manifeste par les effets suivants :

- En été, le soir, l'air est plus chaud au sol que en altitude et donc  $c(x)$  décroît aussi avec l'altitude (d'après (1.2.8), à pression fixée). Les trajectoires sont donc déviées vers le haut. Il est possible d'observer des orages aux loin, mais de ne pas entendre de tonnerre. On parle “d'éclairs de chaleur”.

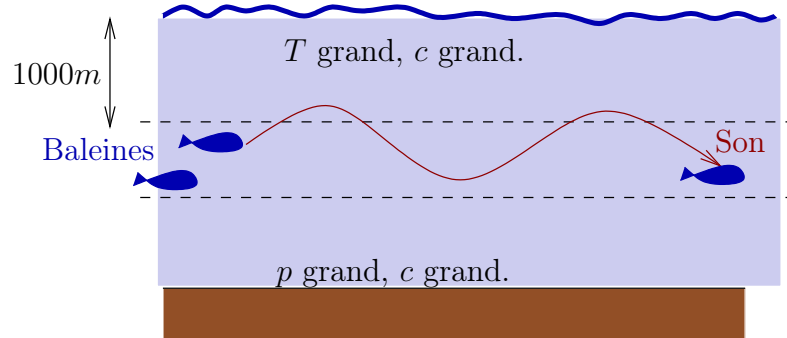


- En hiver, parfois (situation d'inversion de température), l'air est plus froid au sol que en altitude et donc  $c(x)$  croît aussi avec l'altitude. Les trajectoires sont donc déviées vers le bas. Il est possible d'entendre assez fortement une voiture qui passe pourtant loin dans une campagne calme.



- De même dans l'océan si la surface est plus chaude, les sons sous marins n'atteignent pas la surface. Cet effet a été observé sans être compris en 1941, lorsque les américains écoutaient les sous marins depuis la surface et que l'après midi (lorsque la surface est plus chaude) le son des sous marins éloignés ne leur parvenait plus. Ce fut appelé “l'effet de l'après midi”, rapidement expliqué par des physiciens.
- Si  $c(x)$  varie avec l'altitude mais est minimum dans une strate intermédiaire alors cette strate va agir comme un **canal conducteur** ou “puits de potentiel”.
  - L'histoire raconte que les coups de canons pour l'enterrement de la reine victoria le 22/01/1901 n'ont pas été entendus en Angleterre mais en écosses à 400km de distance.
  - Dans l'océan, vers une profondeur de 1000m, la valeur de  $c(z)$  est minimale,

ainsi les rayons sonores sont capturés dans ce canal appelé **canal SOFAR** et découvert en 1943. Les **baleines communiquent** entre elles à longues distances (1000 km) en se plaçant à cette profondeur. De plus elle envoient des sons qui font échos sur des montagnes sous-marines et leur permette de se localiser dans l'océan. Il semble en effet qu'elles mémorise les positions des ces montagnes dans l'océan. **Vidéo, chant des baleines à bosse.**



## Vidéos

- Cette vidéo est une simulation numérique d'un **paquet d'onde dans le stade.**
- **Retournement temporel d'une onde de surface.**
- Ondes (solutions numériques) et représentation dans l'espace des phases. **Correspondance classique-ondulatoire. Ondes quantique.**

## 1.5.6 Formule de Weyl semi-classique

Considérons un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  quelconque. On s'intéresse au spectre  $(\omega_n^2)_n$  de l'opérateur Laplacien  $\Delta$  dans ce domaine ou tout autre opérateur différentiel. On a été capable de calculer ce spectre dans des cas particuliers, par exemple en (1.3.10) ou (1.3.19), mais dans un cas général cela est impossible (ou seulement numériquement avec une précision donnée). Il y a cependant une formule approximative et très simple qui peut être très utile, appelée formule de Weyl ou formule du comptage d'états ondulatoires. Elle est associée au spectre d'une famille opérateur (pseudo-)différentiel  $\hat{\Omega} = \Omega(x, -i\nabla)$  comme en (1.5.5).

Voici l'énoncé dans le cas général.

**Théorème 1.5.28. “Loi de Weyl”.** *Considérons le spectre  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots$  d’un opérateur  $\hat{\Omega} = \Omega(x, -i\nabla)$  auto-adjoint défini par un symbole  $\Omega(x, k)$ , avec  $x, k \in \mathbb{R}^d$ , c’est à dire*

$$\hat{\Omega}u_n = \omega_n u_n.$$

*Pour un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , le nombre de valeurs propres dans cet intervalle est dans la limite  $b \rightarrow \infty$ ,*

$$\#\{\omega_n \in [a, b]\} \sim \frac{\text{Vol}(\Omega^{-1}([a, b]))}{(2\pi)^d}$$

*où  $\Omega^{-1}([a, b]) = \{(x, k) \text{ t.q. } \Omega(x, k) \in [a, b]\}$  est l’ensemble des points de l’espace des phases dont l’énergie est dans l’intervalle  $[a, b]$ .*

*Remarque 1.5.29.* L’interprétation de cette formule est que un “état ondulatoire” élémentaire (ou quanta) occupe un volume  $(2\pi)^d$  dans l’espace des phases  $(x, k)$ . C’est directement relié au **principe d’incertitude** (1.5.8).

Appliquons cette formule à des cas simples déjà étudiés pour vérifier son efficacité.

**Exemple 1.5.30.** Pour l’équation d’onde dans un intervalle  $x \in [0, L]$  en dimension  $d = 1$ , on a  $\Omega(x, k) = c|k|$ , donc

$$n(\omega) = \#\{\omega_n \in [0, \omega]\} \sim \frac{\text{Vol}(\Omega^{-1}([0, \omega]))}{2\pi} = \frac{L(2k_{\max})}{2\pi}$$

avec  $k_{\max}c = \omega$  donc

$$n = \#\{\omega_n \in [0, \omega]\} \sim \frac{L\omega}{c\pi}$$

Inversement pour  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\omega_n \sim \frac{c\pi}{L}n$$

Étonnamment, on retrouve la formule exacte du spectre de (1.3.10).

**Exemple 1.5.31.** Pour l’équation d’onde dans un rectangle  $x \in [0, L_1] \times [0, L_2]$  en dimension  $d = 2$ , on a  $\Omega(x, k) = c|k|$ , donc  $\Omega(x, k) \in [0, \omega] \Leftrightarrow |k| \leq \frac{\omega}{c}$

$$\begin{aligned} n(\omega) &= \#\{\omega_n \in [0, \omega]\} \sim \frac{\text{Vol}(\Omega^{-1}([0, \omega]))}{(2\pi)^2} = \frac{L_1 L_2 \left(\pi \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)}{(2\pi)^2} \\ &= \frac{L_1 L_2 \omega^2}{4\pi c^2} \end{aligned}$$

et on retrouve la formule (1.3.20).

## 1.6 Micros, enregistrements et haut parleurs

Dans cette section on décrit le “passage” entre une onde sonore et un signal.

Pour décrire le fonctionnement d’un micro ou haut parleur il faut décrire le couplage mécanique entre les ondes sonores et les matériaux du micro ou haut parleur.

**Microphones** Voir [microphones sur wikipedia](#).

Un microphone transforme le signal  $p(t) = p(x, t) \in \mathbb{R}$  des fluctuations de pression de l’air en un point donné, en un signal électrique  $s(t) \in \mathbb{R}$ .

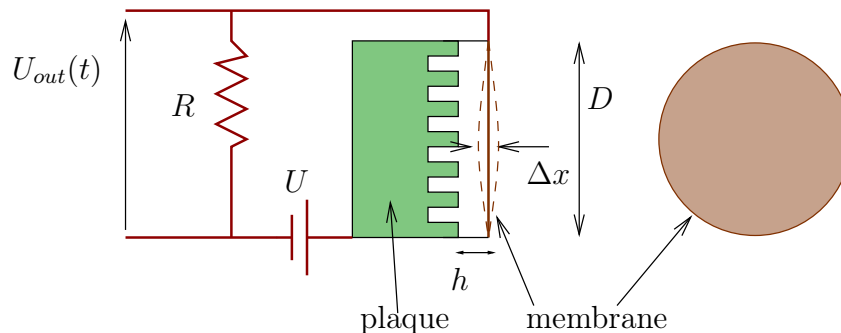
- Le **microphone dynamique** ne nécessite pas d’alimentation. C’est une membrane attachée à un bobinage placé dans un champ magnétique statique (créé par un aimant). Sous l’effet des fluctuations de pression  $p(t)$  de l’air, la membrane et donc le bobinage bougent, et par effet d’induction cela crée un courant induit  $s(t)$ .
- Le **microphone à condensateur** (ou électrostatique) est décrit plus bas. Il nécessite une alimentation.

### 1.6.1 Schéma de fonctionnement du microphone à condensateur

Inventé par Wente en 1917.

Références : [Schroeder et al. \(2007, chap24\)](#), [Eargle \(2012, chap3,p23\)](#).

Voici un modèle simplifié de microphone à condensateur.



- **Une membrane** en forme de disque de diamètre  $D \sim 12\text{mm}$ , recouverte d’une mince couche de métal (ex : or), est tendue. Sous l’effet de fluctuations de pression  $p(t)$ , son amplitude d’oscillation  $x(t)$  est donnée par le modèle

$$m\partial_t^2 x = -Kx - \gamma\partial_t x + p(t)$$

où  $m\partial_t^2 x$  est le terme d’inertie de la membrane,  $-Kx$  la force de rappel liée à la tension,  $-\gamma\partial_t x$  la force d’amortissement et  $p(t)$  la force de pression imposée par l’air. Si  $p(t) = p_0 e^{i\omega t}$  est monochromatique, la solution stationnaire de cette équation est  $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$  avec une amplitude donnée par (B.7.2) :

$$|x_0(\omega)| = \frac{|p_0|}{((K - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)^{1/2}}$$

avec une fréquence de résonance de l'ordre de  $\omega_0 \sim \sqrt{\frac{K}{m}} \sim 10\text{kHz}$ . Pour des amplitudes de pression  $|p_0| \sim 1\text{Pa}$  (soit 94dB), on a des amplitudes de déplacement de la membrane  $|x_0| \sim 10^{-2}\mu\text{m}$ .

- La membrane est posée à une distance  $h \sim 20\mu\text{m}$  d'une plaque et l'ensemble forme un **condensateur** électrique de surface  $S = \frac{\pi D^2}{4}$  épaisseur  $h$ . Pour amortir les vibrations mécaniques de la membrane (i.e. augmenter  $\gamma$ ), il y a des cavités d'air dans la plaque. Noter que  $h \gg |x_0|$ . La capacité au repos est

$$C_0 = \epsilon \frac{S}{h} = 5.10^{-11}\text{F}$$

avec  $\epsilon = 8.8 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$ . Si la membrane bouge,  $h(t) = h + x(t)$  et la capacité  $C(t) = \epsilon \frac{S}{h(t)}$  varie.

- Ce condensateur est relié en série à une source de tension  $U = 60\text{V}$ , une résistance  $R = 10^9\Omega$ . L'équation de ce circuit de ce circuit est

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{1}{R} \left( U - \frac{Q(t)}{C(t)} \right)$$

où  $Q(t)$  est la charge au borne du condensateur. Au final la tension au borne de la résistance est

$$U_{\text{out}}(t) = U \frac{C(t)}{C_0}$$

Le système total est entouré d'une grille formant une **cage de faraday**.