

Chapitre 4

Les instruments de musique

4.1 Introduction

On a vu en Définition 2.3.1 que de façon très schématique une “note musicale” est un signal périodique. Voir exemple ???. On a vu en Section 3.2 que la raison de s’intéresser aux signaux périodiques est que la voix humaine émet des signaux périodiques, or nous sommes sensible à la voix humaine.

L’objectif d’un “instrument de musique harmonique” est donc de produire de façon contrôlée des signaux périodiques. On parlera aussi des instruments de percussion (non harmoniques).

Une autre propriété pratique et importante d’un instrument est de transmettre l’énergie sonore à son environnement, on parle de “rayonnement ou diffusion des ondes”.

On suivra un classement des instruments basé sur le **mécanisme physique** de l’émission du son. On considérera ainsi différents cas d’instruments harmoniques :

1. L’objet se met en mouvement périodique car attiré par un **cycle limite**. Il émet donc une note musicale. C’est le cas par exemple de la flûte ou du violon.
2. L’objet **oscille selon ses modes propres** qui peuvent être presque harmoniques dans certains cas, par exemple si l’objet est proche du modèle idéal d’une onde 1 Dim sur $x \in [0, L]$ étudié en Section 1.3.4. C’est le cas par exemple du piano ou de la guitare.
3. Synthèse de signal périodique par un ordinateur.

4.1.1 Classement de Sach-Hornbostel 1914

Il existe un classement “officiel” des instruments, appelé **classement de Sach-Hornbostel 1914**, plus basé sur “l’apparence de l’instrument”, et que l’on ne suivra donc pas **Benson (n.d., p.83)**.

1. **Idiophones** : Ce sont les instruments où un objet autre qu’une membrane vibre. Exemples : **xylophone, cymbales, mbira, bol chantant**.

2. **Membranophones** : Ce sont les instruments où une membrane vibre. Exemple : drums, **friction drums**, **kazoo**, **mirliton**.
3. **Cordophones** : Ce sont les instruments à corde vibrante. Exemple : violon, guitare, piano, clavecin, guitare électrique.
4. **Aérophones** : Ce sont les instruments où l'air est en vibration. Exemples : flûtes, clarinette, saxophone, trompette, ocarina, accordéon.
5. **Electrophones** : Ce sont les instruments qui utilisent un appareil électrique ou ordinateur. Exemple : synthétiseurs.

4.2 Instruments harmoniques par cycles limites

4.2.1 Introduction

L'objectif d'un instrument de musique est de **produire des notes**, qui sont des **signaux périodique** en temps. Pour ce faire, un instrument acoustique (non électronique) devra donc mettre un objet en **mouvement périodique** à des fréquences dans l'intervalle musical [20Hz, 5000 Hz]. Comment faire ? Une partie des instruments fonctionnent selon le principe de l'apparition d'un cycle limite, que l'on va décrire en commençant par des exemples.

4.2.1.1 Apparition spontanée d'oscillations par relaxation

Exemple 4.2.1. Faites l'expérience suivante. On pose une règle sur nos deux doigts écartés. On rapproche les doigts en exerçant une force constante. On observe que la règle glisse sur l'un puis l'autre doigt en alternance et reste toujours en équilibre. A la fin les doigts se retrouve sous le centre de gravité G de la règle. effectuer l'expérience vous même.



Observer la **vidéo** de cette expérience. Voici une autre vidéo avec **un balai**.

Question 4.2.2. *que se passe t-il si une fois que les deux doigts se trouve sous le centre de gravité G , on écarte les doigts ? retrouve t-on la situation initiale ? y a t-il des oscillations ?*

4.2.1.2 Modélisation

Essayons de modéliser l'expérience précédente afin d'expliquer le mécanisme. Pour cela on utilise le **modèle de Coulomb des frottements** statiques et dynamiques qui suppose que l'on du contact entre le doigt et la règle la force exercée par le doigt sur la règle est

$$F = F_x + F_z$$

où F_x est la composante tangente au contact et F_z la composante normale au contact.

- Si le contact est **statique**, c'est à dire sans glissement, $v_x = 0$, $v_x \in \mathbb{R}$ étant la vitesse tangentielle de la règle par rapport au doigt, alors

$$\|F_x\| \leq \mu_S \|F_z\|$$

avec un paramètre $\mu_S > 0$ qui dépend de la nature des surfaces.

- Si le contact est **dynamique**, c'est à dire avec glissement, $v_x \neq 0$, alors

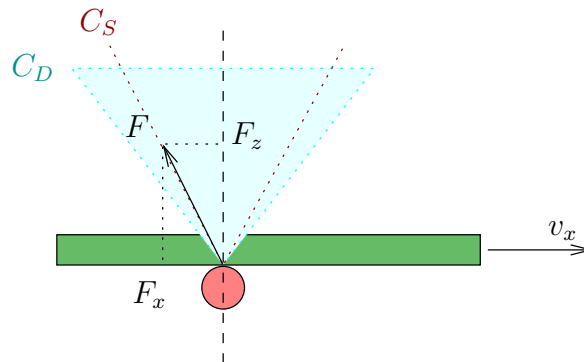
$$\|F_x\| = \mu_D \|F_z\|$$

avec

$$0 < \mu_D < \mu_S.$$

De plus la force F_x est opposée à v_x .

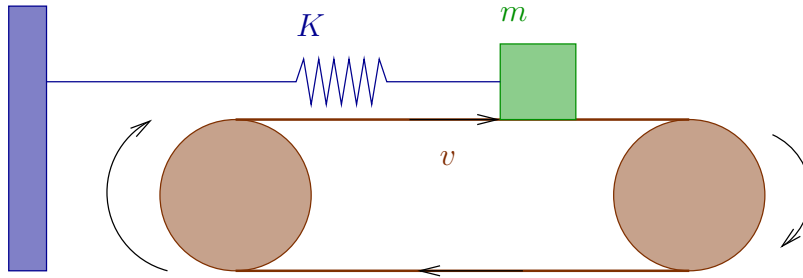
- Le passage du cas dynamique au cas statique se fait si $v_x = 0$ et du cas statique au cas dynamique si $v_x \neq 0$.



Observer que graphiquement, dans le cas statique, la force F se trouve à l'intérieur d'un cône C_S autour de la verticale et dans le cas dynamique, F se trouve sur un cône C_S inclus dans C_D .

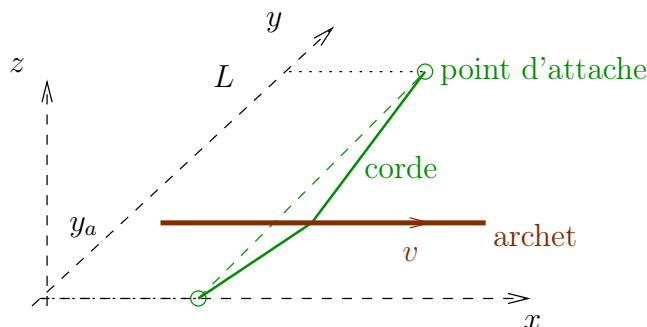
Exercice 4.2.3. Modéliser la règle posée sur deux doigts, exemple 4.2.1, où le mouvement des deux doigts est imposé à $x_{\pm}(t) = \mp L \pm vt$, $t \in [0, L/v]$. Initialement la position du centre de gravité de la règle est $x_G(0) = 0$. Prédire la position du centre de gravité de la règle $x_G(t)$ pour $t \in [0, L/v]$ et observer les oscillations.

Exemple 4.2.4. Voici une autre expérience d'une situation simple. Voir figure. Une masse m est attachée à ressort horizontal de raideur K et posée sur un tapis roulant qui avance à une vitesse constante horizontale $v > 0$. Il y a un contact avec frottements entre la masse et le tapis. On imagine que la masse va être entraînée sans glissement vers la droite, jusqu'au moment où il y a glissement à cause de la force de rappel du ressort. Elle va revenir vers la gauche avant d'être à nouveau immobile par rapport au tapis et repartir. Il va donc s'établir un mouvement périodique.



Exercice 4.2.5. Modéliser l'expérience précédente et prédire la position $x(t)$ de la masse et le **timbre** (i.e. l'intensité des coefficients de Fourier $|\hat{u}_n|_{n \in \mathbb{Z}}$). Déduire la **fréquence** $f = 1/T$ des oscillations. Comment produire une note A_5 de fréquence $f = 440\text{Hz}$ à partir de ce modèle ?

Exemple 4.2.6. On modifie le modèle précédente, en remplaçant le tapis par un archet de violon et la masse par une corde de violon transverse à l'archet, i.e. selon l'axe y . Voir figure. Une corde de violon de longueur L est attachée à deux extrémités parallèle à l'axe y et a une certaine tension interne T . Un archet parallèle à l'axe x et en $y = y_a$ avec $0 < y_a < L$ est posé sur la corde. L'archet exerce une force verticale F_z selon z sur la corde (c'est le rôle du violoniste de bien doser cette force F_z). L'archet se déplace à la vitesse constante $v > 0$ selon x .



On modélise la position de la corde par une fonction $u_x(y)$ qui donne Modéliser cette expérience et prédire la position $x(t)$ de la masse.

Le violoniste choisit la vitesse v de l'archet et la force verticale F_z exercée sur la corde. Expliquer pourquoi la vitesse détermine l'intensité du son produit et la force F_z doit être

bien dosée. Si $F_z < F_{\min}$ est trop faible, le son produit semble filandreux, aéré, on dit “en dehors”. Si $F_z > F_{\max}$ est trop fort, le son “craquouille” on dit que le son est “arraché”. Tracer l’intervalle $[F_{\min}(v), F_{\max}(v)]$ pour avoir un son correct, en fonction de v .

- Observer l’amplitude des cordes sur cette [vidéo](#). Attention les images sont capturée spatialement selon un certain ordre temporel qui dépend de la caméra, ainsi les oscillations spatiales observées ne sont sans doute pas réelles. Seule l’amplitude est correcte.

4.2.2 Oscillateurs de relaxation ou par cycle limite

On va présenter un modèle mathématique général en de systèmes dynamique modélise la production de notes musicales.

Considérons un système dynamique à temps continue, comme définit en B.9.1, c’est à dire une loi d’évolution :

$$\frac{dx}{dt} = V(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \quad (4.2.1)$$

déterminant une unique trajectoire dans l’espace des phases $x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ partant d’un point quelconque $x(0)$.

Définition 4.2.7. Un système dynamique comme (4.2.1) possède un **cycle limite** γ si

1. γ est une trajectoire périodique, i.e. si $x(0) \in \gamma$ alors $x(t) \in \gamma$ et

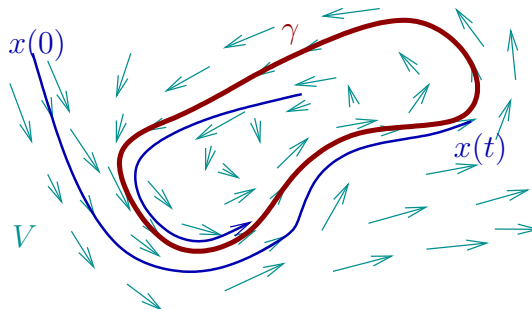
$$\exists T > 0, x(t+T) = x(t), \forall t.$$

On dit que T est la période du cycle γ .

2. Il existe un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, voisinage de γ , appelé **bassin d’attraction de** γ , tel que toute trajectoire partant de $x(0) \in \Omega$ est attirée exponentiellement vite vers γ , i.e. $\exists C > 0, \exists \lambda > 0, \forall x(0) \in \Omega$,

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq C e^{-\lambda t}$$

avec $\tilde{x}(t) \in \gamma$ autre trajectoire. $\tau = \frac{1}{\lambda}$ s’appelle le temps de relaxation.



Conséquence : Si

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow u(x) \end{cases}$$

est une fonction que l'on appelle "observable", alors comme $x(t)$ se rapproche d'un comportement périodique, $u(t) = u(x(t))$ va converger vers une fonction périodique et va donc donner un signal périodique ou **note de musique**.

4.2.2.1 Exemple, forme normale sur \mathbb{R}^2 .

On va étudier une famille d'exemples simples qui dépend d'un paramètre μ et présente un cycle limite si $\mu > 0$. On dit que en $\mu = 0$, il y a une "bifurcation de Hopf". Ce modèle est une "**forme normale**", c'est à dire que c'est un modèle universel.

Remarque 4.2.8. On peut imaginer que ce modèle décrive la production d'une note de musique par une flute et $\mu > 0$ est le seuil lorsque le flux d'air est assez fort pour créer la note. Pour un violon, $\mu > 0$ est le seuil de la force exercée par l'archet sur la corde pour produire une note.

Ref : [Arnold \(1974\)](#), Arnold, ODE, p.52.

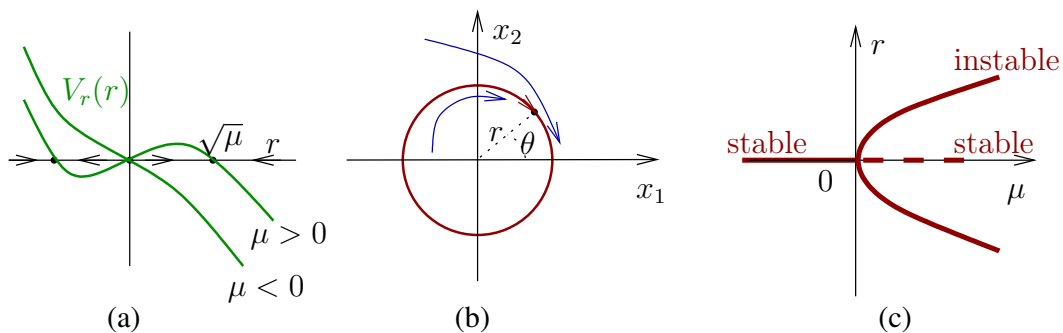


FIGURE 4.2.1 – (a) En vert, la fonction $V_r(r) = r(\mu - r^2)$ et le champ de vecteur $\frac{dr}{dt} = V_r(r)$. Pour $\mu > 0$ il y a un point fixe attracteur en $r = \sqrt{\mu}$.
 (b) Cas $\mu > 0$. Le champ de vecteur et le flot dans le plan (x_1, x_2) . Il y a un cycle limite, i.e. trajectoire stable sur le cercle de rayon $r = \sqrt{\mu}$. Le point $r = 0$ est instable.
 (c) Diagramme de bifurcation des points fixes et cycles limites stables/instables en fonction de μ .

Dans le plan $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on utilise les coordonnées polaires définies par

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Et le champ de vecteur V défini par des composantes $V_\theta = -1$, $V_r(r)$, c'est à dire les équation de mouvement

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -1, \quad \frac{dr}{dt} = V_r(r).}$$

Alors en coordonnées cartésiennes, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_r}{r} r \cos \theta + r \sin \theta \\ &= x_2 + x_1 \frac{V_r(r)}{r} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_r}{r} r \sin \theta - r \cos \theta \\ &= -x_1 + x_2 \frac{V_r(r)}{r} \end{aligned}$$

Si on choisit le paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et la fonction

$$\boxed{V_r(r) = r(\mu - r^2)}$$

cela donne

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

Conclusion 4.2.9. dans ce modèle simple qui est une “forme normale”, pour toute condition initiale donnée $x(0) \in \mathbb{R}^2$, si $\mu < 0$ la trajectoire converge exponentiellement vite vers le point fixe

$$x(t) \rightarrow 0.$$

Si $\mu > 0$, la trajectoire converge exponentiellement vite vers le cycle limite γ situé en $r = \sqrt{\mu}$, c'est à dire la trajectoire en coordonnées polaires :

$$\theta(t) = t + \theta(0), \quad r = \sqrt{\mu}$$

et en coordonnées cartésiennes :

$$x_1(t) = \sqrt{\mu} \cos(t + \theta(0)), \quad x_2(t) = \sqrt{\mu} \sin(t + \theta(0)),$$

formant **un cycle limite** qui est un cercle. Dans ce modèle très simple $\omega = 1$ donc la **fréquence** est $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$.

4.2.2.2 Exemples dans le modèle de Lorenz.

L'exemple précédent est le plus simple que l'on peut réaliser pour obtenir un cycle limite.

Voici un exemple un peu plus compliqué qui présente parfois un cycle limite et parfois un attracteur plus complexe, chaotique, appelé **attracteur étrange**. Ce modèle appelé **modèle de Lorenz** détermine les trajectoires d'un point $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ d'après :

$$\frac{dx_1}{dt} = \sigma(-x_1 + x_2), \quad (4.2.2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \quad (4.2.3)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - bx_3 \quad (4.2.4)$$

avec trois paramètres $\sigma, r, b > 0$ que l'on supposera positifs.

- Dans ce **chapitre**, extrait de ce **cours**, on présente une étude de ce système dynamique ainsi que des références.
- Voici une **simulation numérique** qui génère un signal sonore $u(t) = u(x(t))$. On entend bien une note timbrée lorsque l'attracteur est un cycle (car $u(t)$ est alors une fonction périodique) et un son plus dissonant lorsque l'attracteur est chaotique.
- Le même type de son se retrouve en pratique avec le basson, selon les doigtés, voir **Bassoon Multiphonics 01**. On pourrait supposer que il y a parfois un système dynamique chaotique avec attracteur étrange.

4.2.2.3 Equations de Kepler des orbites planétaires

4.2.3 Exemples d'instruments de musique

4.2.3.1 Caractéristiques importantes pour obtenir un cycle limite et des notes musicales

On a présenté des modèles mathématiques idéalisés présentant des cycles limites. Dans cette Section on discute de façon heuristique des caractéristiques physiques générales que doit posséder un système réel pour manifester un cycle limite. Il faut :

- **Système dynamique, degrés de liberté** : identifier les degrés de liberté physiques qui sont en mouvement. Ce peut être un fluide (air), un matériau (corde de violon, table d'harmonie du violon), une partie du corps humain (lèvres, cavité bucale, cordes vocales) ou tout cela couplés.
- **Instabilités** : il ne faut pas que toutes les trajectoires convergent vers un point fixe. Pour cela il faut qu'il y ait des "instabilités" dans le système physique.
- **Dissipation** : il faut qu'il puisse y avoir des attracteurs dans l'espace des phases. Pour cela dans le système physique, il doit y avoir des frottements, de la dissipation. Dans le modèle mathématique, il faut que le champ de vecteur ait la propriété d'être dissipatif : $\operatorname{div}V < 0$.

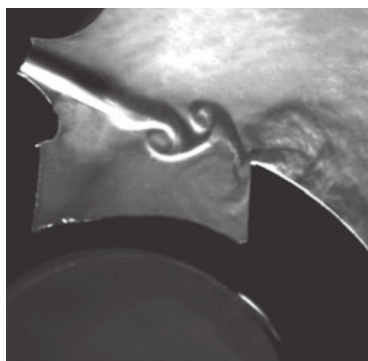
- **Source d'énergie** : sans source d'énergie, il y aurait un point fixe attracteur, le repos du système. On souhaite un cycle limite, il faut donc une source d'énergie pour contrecarrer la dissipation d'énergie.
- **Cycle limite** : finalement, on souhaite que l'attracteur ne soit pas un simple point fixe (cela ne génère pas de son), ni un attracteur étrange trop complexe (cela génère un son dissonant comme un "canard"), mais un cycle limite qui générerait donc un signal périodique, donc une note de musique.
- **Fréquence audible et ajustable à l'aide d'un résonateur** : finalement, si on a un cycle limite, on souhaite contrôler sa fréquence, et qu'elle soit dans le domaine musicale $f \in [50, 2000]$ Hz. Pour cela il peut être utile qu'il y ait la présence d'un "résonateur" dans le système physique, c'est à dire un système physique un spectre de fréquences propres ajustables.

4.2.3.2 Flûtes, Ocarina, Bouteille, trompette, sifflement, Voix, Clarinette, Saxophone etc



Référence : [Hirschberg et al. \(1996\)](#).

- **Système dynamique** : dans ces exemples, le système dynamique est essentiellement l'air, dans la bouche, dans l'instrument (ex dans la flute) couplé aux lèvres pour la trompette, aux anches pour le saxophone et clarinette, aux cordes vocales pour la voix.
- **Instabilité** : Ce sera le phénomène d'**instabilité de Bénard- Van Karman** (ou **Kelvin-Helmholtz**). Voir **Video de structures périodiques** de l'air dans une flute. Dans la flute, le flux d'air contre un biseau crée une instabilité et des tourbillons. Dans le sifflement, c'est à la sortie des lèvres. Dans la voix c'est au contact des cordes vocales. Dans la trompette, c'est au passage des lèvres.



- **Dissipation** : due au rayonnement du son, à la viscosité de l'air contre les parois, à la turbulence et la viscosité de l'air créant de la dissipation à petites échelles.
- **Source d'énergie** : le flux d'air des poumons.
- **Résonateur** : le tube de la flûte ou de la trompette, la cavité buccale pour la voix, le résonateur de Helmholtz, cf Appendice B.8, pour l'ocarina. Dans les instruments, on ajuste le résonateur par les clefs ou la position des trous.

Remarque 4.2.10. Il faut ajuster correctement tous ces paramètres pour faire apparaître un cycle limite comme souhaité :

1. Si il y a trop de dissipation, il n'y a pas de son. Exemple de la bouteille de plastique froissée.
2. Si il y a trop d'instabilité ou trop d'énergie, l'attracteur peut être plus compliqué qu'un simple cycle limite, e.g. attracteur chaotique. On observe cela avec le basson, selon les doigtés, voir [Bassoon Multiphonics 01](#), et voir "[The Not-Quite-Harmonic Overblowing of the Bassoon](#)", article de James B. Kopp.
3. Voir la [vidéo à 39'28](#) de Benoît Fabre qui concerne l'étude physique du jet d'une flûte.

Remarque 4.2.11. Le basson est un instrument réputé pour son son qui est “doux”, “non brillant”. Cela signifie que le module des harmoniques $|\hat{u}_n|_n$ décroît vite avec $n \geq 1$. La raison est que considéré comme un résonateur, son spectre naturel est non harmonique : ce sont les notes G_1, G_2, Eb_3, A_4 . On vérifie cela par les doigtés. Ce spectre est donc non excité par le forçage périodique du cycle limite.

- [Documentaire sur l'art du sifflement.](#)

Remarque 4.2.12.

- La physique des anches n'est pas bien comprise.
- Dans la nature, on observe souvent le **mouvement des herbes ou des feuilles dans le vent**, le **mouvement d'une branche qui trempe dans une rivière**. Tout cela correspond à des phénomènes similaire (bien que plus complexe).
- **Nage des poissons** : Ici le souffle continu d'air sur un biseau génère des tourbillons périodiques appelés [tourbillons de Karman](#). Il est intéressant de savoir que

le phénomène inverse est utilisé par les poissons pour se déplacer : ils imposent un mouvement périodique à leur nageoire caudale qui va générer des tourbillons périodiques qui à leur tour vont générer un déplacement continu du fluide qui va alors les propulser. Cela s'appelle l'allée inverse de Karman. [Référence](#), voir aussi [Thèse de Florine Paraz](#).

4.2.3.3 Violon, Verre frotté, Bol bouddhiste, tambour frotté



Vidéo de [verre frotté et résonances](#). Vidéo de [corde de violon au ralenti](#), [idem](#).

- **Système dynamique** : dans ces exemples, le système dynamique est essentiellement la corde du violon, le bois du violon, le matériau du verre, etc
- **Instabilité** : accrochage de la corde par l'archet et décrochage, grâce à la présence de colophane. Voir cette [vidéo](#). Accrochage du doigt sur le verre.
- **Dissipation** : frottements sur l'archet, dissipation des ondes dans le violon, rayonnement du son.
- **Source d'énergie** : mouvement continu de l'archet actionné par le bras.
- **Résonateur** : la corde du violon, la table d'harmonie du violon (le dessus), couplés par le chevalet.

Référence : [modèle des cordes avec archet](#). [Thèse sur la physique de l'archet](#). [Article de 1974](#) sur la physique du violon.

Question 4.2.13. *est-ce que le [Guiro](#) entre dans ce modèle, sa fréquence est supérieure à 20Hz ?*

4.2.3.4 Quelques modèles d'instruments

Il y a une grande variété d'instruments selon les cultures, les époques et les lieux. Voici quelques exemples remarquables

- Flûte de -35000 ans (trouvée près de Ulm en Allemagne). [Référence](#).



- Il est observé que dans certaines grottes (-40000,-30000 en Europe), l'emplacement des dessins muraux (ou taches) coïncident avec les lieux où l'écho et la résonance sont maximaux, Igor Reznikoff musicologue. Réf : émission arte "[Sapiens et la musique fut](#)", juin 2021.
- [Flûtes chinoises](#) de -9000 ans que l'on peut jouer.

4.2.3.5 La voix humaine comme instrument

Histoire de la voix (et de la musique) : d'après émission arte à 45' "[Sapiens et la musique fut](#)", juin 2021, chercheuse Anne MacLarnaune, London pense que la possibilité de chanter et vocaliser est liée au contrôle du diaphragme et pour cela il faut un diamètre du trou dans les os de la colonne vertébrale assez grand pour faire passer les nerfs (Moelle épinière). Cela remonte à -100 000 ans, et cela est commun chez Homo-sapiens et Neanderthal, mais pas présent chez homo erectus. Question ouverte : musique/langage sont apparus de façon simultanée ? Une hypothèse de certains chercheurs : la mélodie berceuse de la mère à son enfant pour le rassurer a pu faire naître la voix et le langage.

Voix de poitrine et de tête : Le passage de la voix de poitrine à la voix de tête est physiologique. Dans le chant lyrique, on apprend à effacer le passage (ne pas le percevoir). Dans le chant des pygmés aka, le passage est prononcé au contraire. Référence : [Conférence de Michele Castellengo sur le son](#) à 12'.

4.3 Instruments harmoniques par résonance

On présente ici un deuxième type d'instruments de musique, ou les notes musicales (i.e. signal périodique) et produit par la vibration naturel d'un objet. Pour que le signal produit soit (presque) périodique cela nécessite une géométrie particulière à l'objet.

4.3.1 Cordes excitées (pincées ou frappées)

Les vibrations linéaires d'un **objet idéal unidimensionnel** sont **périodiques**. C'est le modèle d'onde étudié en Section 1.3.4. Pour cette raison les instruments musicaux fonctionnant de la sorte utilisent des **cordes tendues**, que l'on excite pour les mettre en mouvement.

Ensuite pour transmettre la vibration sous forme d'onde sonore à l'environnement, la corde est couplée à une plaque appelée **table d'harmonie**.

Exemple : le piano, la guitare, la harpe, le clavecin, le cymbalum.

— ref : [Benson \(n.d.\)](#) benson p15 , benson p85, p89, p.91

Remarque 4.3.1.

- Comme le son n'est pas entretenu, et que la production du son ne fonctionne pas sur le principe d'un cycle limite, le signal ne sera pas parfaitement périodique. On peut l'observer en effet en étudiant le spectre du piano ou de la guitare. Par exemple le spectre du piano est plus écarté qu'un spectre harmonique, cf Proposition 1.3.29.
- De plus le signal varie avec le temps, car l'énergie se dissipe en général plus vite pour les fréquences élevées.
- Finalement, l'énergie dans chaque fréquence, i.e $|\hat{u}_n|$, dépend de la condition initiale, c'est à dire de la façon de frapper ou pincer la corde.

- **Vidéo**d'une corde frappée au ralenti. Observer que le mouvement est presque périodique en temps. Il y a un amortissement sur les temps longs.

Exercice 4.3.2. “Modèle de bend pour une guitare”. Considérons le modèle suivant très simple d'une corde de guitare ou piano. La corde est de longueur L et sa force de tension est noté F . On note μ la masse de la corde par unité de longueur.

1. En appliquant la loi de Newton de la mécanique, démontrer que l'amplitude de vibration de la corde $u(x, t)$ est solution de l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$$

avec $c^2 = \frac{F}{\mu}$. Aide : consulter ce **document** qui considère le cas d'une surface de tambour.

Solution 4.3.3. L'angle entre la tangente de la corde au point x et l'axe initial est noté $\alpha(x)$ et donné par $\tan \alpha(x) = \frac{du}{dx}(x)$. On supposera $|\alpha(x)| \ll 1$. On considère un petit segment de corde $[x, x + dx]$. Au point $x + dx$, ce segment subit une force de composante normale à l'axe

$$\begin{aligned} F \sin(\alpha(x + dx)) &\approx F\alpha(x + dx) \approx F\alpha(x) + (dx)F\alpha'(x) \\ &\approx F\alpha(x) + (dx)F \frac{d^2 u}{dx^2}(x) \end{aligned}$$

De même au point x , ce segment subit une force de composante normale $-F \sin(\alpha(x)) \approx -F\alpha(x)$. Donc au total la force normale est $F_{\text{tot}} = (dx)F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x)$. Par ailleurs la position normale est $u(x, t)$, donc l'accélération est $\partial_t^2 u(x, t)$ et la masse de l'intervalle est $dm = \mu dx$. L'équation de mouvement de Newton donne

$$\begin{aligned} (dm) \partial_t^2 u(x, t) &= F_{\text{tot}} \\ \Leftrightarrow \mu(dx) \partial_t^2 u(x, t) &= (dx)F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) \\ \Leftrightarrow \partial_t^2 u &= c^2 \partial_x^2 u \end{aligned}$$

avec $c^2 = \frac{F}{\mu}$.

2. En appliquant la solution de d'Alembert de l'équation d'onde (voir Section 1.3.4.1), montrer que la note émise est de fréquence $f = \frac{c}{2L}$.

Solution 4.3.4. D'après La proposition 1.3.21, la solution d'Alembert est

$$u(x, t) = R(x - ct) + R(-x - ct)$$

avec une fonction R arbitraire mais périodique : $R(x + 2L) = R(x)$. Cela implique que $u(x, t + T) = u(x, t)$ avec la période $T = \frac{2L}{c}$, donc fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{c}{2L}$.

3. La longueur de la corde tendue s'écrit $L = L_0 + x$ avec L_0 la longueur de la corde non tendue, x son élongation sous l'effet de la force de tension $F = Kx$ et K la constante de raideur de la corde. Montrer que si l'on effectue un "bend" de la corde, c'est à dire que l'on tire la corde sur une distance l en son milieu (en $L/2$) dans une direction orthogonale à la corde, et supposant $l \ll L$, alors la variation d'élongation est $dx = \frac{2l^2}{L}$. Montrer que la variation de fréquence df est donnée par

$$\frac{df}{f} = \frac{1}{2} \frac{dx}{x}.$$

Solution 4.3.5. D'après le théorème de Pythagore, la nouvelle longueur de corde est

$$\begin{aligned} L' &= 2\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + l^2} = L\sqrt{1 + \left(\frac{2l}{L}\right)^2} \\ &\approx L\left(1 + \frac{2l}{L}\right) = L + \frac{2l^2}{L} = L + dx \end{aligned}$$

avec une élongation

$$dx = \frac{2l^2}{L}.$$

D'après les questions précédentes $c^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{Kx}{\mu}$ et

$$f = \frac{c}{2L} = \sqrt{\frac{Kx}{\mu}} \frac{1}{2(L_0 + x)}$$

Donc

$$\ln f = \frac{1}{2} \ln x - \ln(L_0 + x) + C$$

avec C indépendant de x . Ainsi une variation de l'élongation x implique une variation de la fréquence f de la note d'après

$$\begin{aligned} \frac{df}{f} &= \frac{1}{2} \frac{dx}{x} - \frac{dx}{L_0 + x} = dx \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{L} \right) \\ &= dx \left(\frac{L - 2x}{2xL} \right) \end{aligned}$$

En général $L - 2x > 0$ donc $dx > 0$ implique $df > 0$, i.e. la fréquence de la note monte en tirant sur la corde.

4.3.2 Cloches

Les cloches sont construites pour avoir le bas du spectre presque harmonique.

4.3.3 Xylophones

Chaque lamelle a un spectre quasi harmonique.

Lithophone : pierre qui résonne. Utilisés à la préhistoire. Voir le film à 22' : “**Sapiens et la musique fut**”, juin 2021. Chaque pierre peut émettre deux notes différentes, selon le lieu d’impact.

4.4 Instruments percussifs

Beaucoup d’instruments percussif sont “timbrés”, c’est à dire qu’ils ont des fréquences propres quasi- harmoniques. Exemple : les congas, le tambour paroleur.

Exemple : Toma Gouband qui fait des **percussions sur pierres sonnantes**.

Remarque 4.4.1. la basse en reggae/funk a un rôle entre percussion et harmonie.

4.5 Musique assistée par ordinateur (MAO)

4.5.1 Traitement audio

4.5.2 Messages MIDI