

Annexe A

Logiciels pour l'acoustique musicale

A.1 Pour l'audio

Liste de logiciels pour l'audio

Applications Android gratuites conseillées pour ce cours :

- **sonomètre** : mesure l'intensité d'un son en décibels.
- **Lexis Audio Editor** : permet de visualiser le signal d'un son enregistré.
- **Spectroid** : permet de faire une transformée temps-fréquence d'un signal sonore en temps réel.

A.2 Audacity

Audacity permet l'enregistrement et l'analyse de sons.

- **TP**.
- Créer des **wave-form à la main**.
- Autre **TP** sur la transformée de Fourier avec Audacity.
- Créer des **scripts** sous audacity.

A.3 Autres

- **BaudLine** : Spectrogram
- **Sonic Visualiser**
- **FreeFem** : pour résoudre des EDP non linéaires.
- **Ecoute d'intervalles justes**
- **Analysis and creation of sounds**
- **Real-time analysis of sounds, Section 5**

Annexe A

Notions de base utiles en mathématiques

Dans ce cours on ne suppose aucune base en science. Cependant on aura besoin de quelques notions élémentaires qui sont expliquées dans cette section.

A.1 Les fractions et équations du premier degré

A.1.1 Additions et soustractions

On désigne par exemple une grandeur numérique recherchée par la lettre x . Par exemple x est le poids d'une pomme, et l'on sait que le poids du saladier est 0.8kg et on pèse au total 1kg pour le saladier qui contient la pomme. On écrit

$$x + 0.8 = 1$$

La solution est

$$x = 1 - 0.8 = 0.2 \text{ kg}$$

Plus généralement, si a, b, c sont des chiffres, on a l'équivalence suivante des équations :

$$\begin{aligned} a + b = c & \Leftrightarrow b = c - a & \Leftrightarrow a = c - b \\ \Leftrightarrow 0 = c - b - a & \Leftrightarrow 0 = a + b - c \end{aligned}$$

Exercice A.1.1. Vérifiez ces équations avec les valeurs $a = 3, b = 2, c = 5$.

A.1.2 Multiplication et divisions

On désigne par exemple une grandeur numérique recherchée par la lettre x . Par exemple x est le poids d'une pomme, et l'on sait que 10 pommes pèsent 2kg. On écrit

$$10 \times x = 2 \text{ ou } 10x = 2.$$

La solution est

$$x = \frac{2}{10} = 0.2 \text{ kg}$$

Plus généralement, si a, b, c sont des chiffres non nuls, on a l'équivalence suivante des équations :

$$ab = c \Leftrightarrow b = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{b} \Leftrightarrow 1 = \frac{c}{ab} \Leftrightarrow 1 = \frac{ab}{c}$$

Exercice A.1.2. Vérifiez ces équations avec les valeurs $a = 3, b = 2, c = 6$.

Notations de puissance :

$$x^2 = x \times x, \quad x^3 = x \times x \times x, \quad \text{etc}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{-2} = \frac{1}{x \times x} = \frac{1}{x^2}, \quad \text{etc}$$

Par commodité, $x^0 = 1$. Quand on écrit x^n , l'entier n s'appelle l'**exposant**.

A.2 Exposants, logarithme et décibels

On présente quels notions importantes pour la suite. Cela peut concerner toute sorte de grandeur physique.

Dans le tableau suivant on a écrit sur la première ligne différentes valeurs d'une grandeur x . Par exemple $x = 100$.

Sur la deuxième ligne, on écrit cette même valeur avec un **exposant**, par exemple $x = 10^2$. La troisième ligne donne la valeur de l'exposant, aussi appelé le **logarithme** de x et noté $\text{Log}_{10}(x)$. Par exemple $\text{Log}_{10}(100) = 2$. La dernière ligne est appelée décibels, c'est seulement l'exposant multiplié par 10, i.e.

$$\text{dB}(x) = 10 \times \text{Log}_{10}(x)$$

Par exemple $\text{dB}(100) = 20$.

Valeurs de x et opérations :	...	$\times 10$	0.1	$\times 10$	1	$\times 10$	10	$\times 10$	100	$\times 10$	1000	...
écriture de x avec l'exposant			$= 10^{-1}$		$= 10^0$		$= 10^1$		$= 10^2$		$= 10^3$	
$\text{Log}_{10}(x)$: exposant ou logarithme (en base 10)			-1		0		1		2		3	
$\text{dB}(x) = 10 \text{Log}_{10}(x)$: décibel			-10		0		10		20		30	

Remarque A.2.1. Sur la ligne de x on passe d'une colonne à la suivante de droite en multipliant par 10. Donc on passe à la colonne de gauche en divisant par 10. Alors dans sur la ligne des logarithme (et des décibels) on passe d'une colonne à la suivante de droite en ajoutant 1 (ou ajoutant 10 pour les décibels). Cette remarque montre que **la fonction logarithme transforme les opérations multiplication en addition**. C'est l'intérêt essentiel de cette fonction. Par exemple $3 = \text{Log}_{10}(100 \times 10) = \text{Log}_{10}(100) + \text{Log}_{10}(10) = 2 + 1$. On retiendra que pour tout nombre positif x, y ,

$$\text{Log}_{10}(x \times y) = \text{Log}_{10}(x) + \text{Log}_{10}(y).$$

Remarque A.2.2. Concernant le **cas particulier où on mesure une puissance sonore** p , le décibel est utilisé de sorte à ce que 0 décibels correspond à une puissance de référence, qui est la limite de l'in audible (i.e. très faible), et correspond à la valeur $p_0 = 10^{-12}W/m^2$. Pour une puissance sonore quelconque p on notera alors $x = \frac{p}{p_0}$ (sans unité) de sorte que $\text{dB}\left(\frac{p_0}{p_0}\right) = \text{dB}(1) = 0$. Ajouter +1dB correspond alors au seuil de perception du changement de puissance. Il apparaît que $\text{dB}(x) = 120\text{dB}$ est un son très (trop) fort au seuil de la douleur, qui est $p = 1W/m^2$.

Remarque A.2.3. Le tableau s'étend à droite et à gauche. Comme valeurs notables,

- il y a $x = 1000000 = 10^6$ appelé million, donnant $\text{Log}_{10}(x) = 6$ et $\text{dB}(x) = 60$.
- il y a $x = 1000\ 000\ 000 = 10^9$ appelé milliard, donnant $\text{Log}_{10}(x) = 9$ et $\text{dB}(x) = 90$.
- il y a $x = 0.000000001 = 10^{-9}$ appelé nano, donnant $\text{Log}_{10}(x) = -9$ et $\text{dB}(x) = -90$.
- Voici des noms couramment utilisés pour désigner ces exposants :

$x :$	10^{-9}	10^3	10^6	10^9	10^{12}
nom :	nano	kilo	Mega	Giga	Tera

Par exemple en informatique 2 10^9 octets se dit 2 Giga-octets (on verra une valeur plus précise plus loin).

Exercice A.2.4. Entre la puissance du son le plus fort (seuil de douleur) et le plus faible (perceptible) il y a une différence de 120dB. Quel est le rapport de puissance correspondant ?

Solution A.2.5. Le rapport est $10^{120/10} = 10^{12} = 1000$ milliard !

Exercice A.2.6. Compléter le tableau suivant

Instrument	trombone		clarinette		voix humaine		chanteur
	fortissimo		fortissimo		parlant		fortissimo
Puissance en W	5 W		0.05W		$5 \cdot 10^{-5} W$		0.05W
rapports de puissance		$\xleftarrow{\times?}$		$\xleftarrow{\times?}$		$\xrightarrow{\times?}$	
Puissance en dB	?		?		60		?

Solution A.2.7. Voici la solution :

Instrument	trombone		clarinette		voix humaine		chanteur
	fortissimo		fortissimo				fortissimo
Puissance en W	5 W		0.05W		$5 \cdot 10^{-5} W$		0.05W
rapports de puissance		$\xleftarrow{\times 100}$		$\xleftarrow{\times 1000}$		$\xrightarrow{\times 1000}$	
Puissance en dB	110		90		60		90

Remarque A.2.8. La fonction $x \rightarrow \text{Log}_{10}(x)$ n'est pas restreinte à $x = 1, 10, 100, \dots$ mais s'étend à toutes les valeurs intermédiaires. Par exemple $\text{Log}_{10}(2) = 0.301\dots$ Sur une calculatrice, c'est la touche **Log**. Dans le moteur de recherche google, écrire $\text{Log}(2)$ par

exemple. On définit toujours les décibels par $\text{dB}(x) = 10\text{Log}_{10}(x)$. Voici une table avec quelques valeurs intermédiaires.

x	1	2	3	5	10
$\text{Log}_{10}(x)$	0	0.30	0.47	0.70	1
$\text{dB}(x)$	0	3	4.7	7	10

Exercice A.2.9.

1. Une clarinette jouant fort émet un son à 90dB. Quel est le niveau sonore de 2 clarinettes (en dB) ?
2. Un trombone jouant fort est à 110dB. Combien faut-il de clarinettes jouant fort pour avoir la même puissance ?

Solution A.2.10.

1. Le niveau sonore de 2 clarinettes est $90 + \text{dB}(2) = 90 + 3 = 93\text{dB}$
2. On cherche le nombre n de clarinettes tel que

$$90 + \text{dB}(n) = 110 \Leftrightarrow \text{dB}(n) = 110 - 90 = 20$$

donc $n = 100$.

Remarque A.2.11. Quelques formules utiles à savoir sur la fonction $x \rightarrow \text{Log}(x)$. Pour $x, y > 0$, on a

$$\text{Log}(xy) = \text{Log}(x) + \text{Log}(y) \quad (\text{A.2.1})$$

$$\text{Log}(x^y) = y\text{Log}(x)$$

A.3 Le cercle, sinus et décomposition de Fourier

Bien que peu présent dans la nature, le **cercle** est un concept fondamental en science.

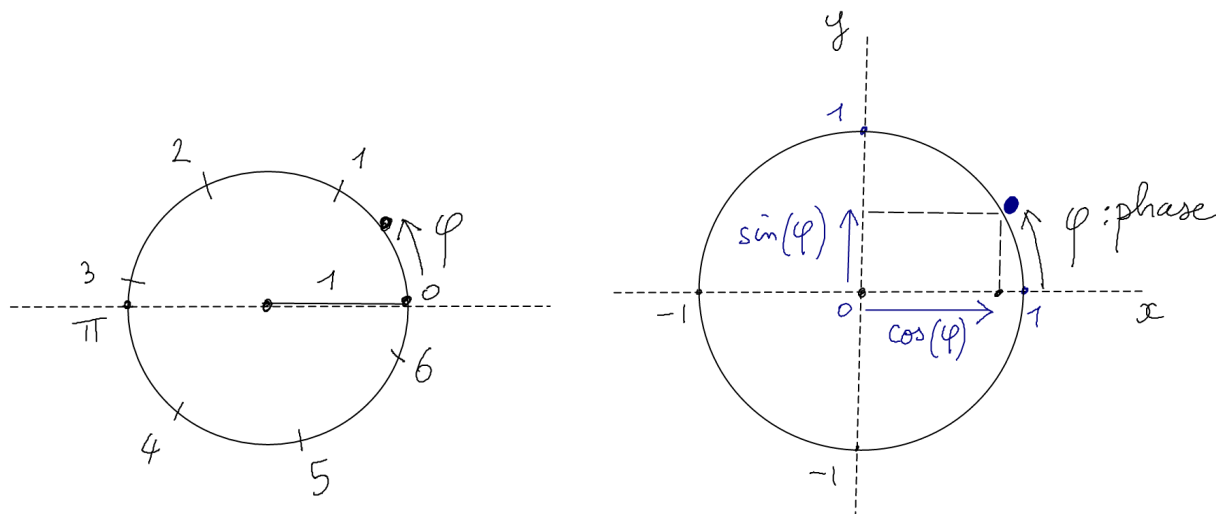
(Dans la nature, on observe rarement des formes quasiment circulaires : silhouette du soleil ou de la pleine lune, arc en ciel, ronds dans l'eau,... ?)

A.3.1 Phase, sinus, cosinus

Définition A.3.1. Sur un cercle, l'angle ou **phase** φ en **radian** est la longueur d'arc mesurée en unité de rayon. En particulier le nombre pi est

$$\pi := \frac{1}{2} \text{circonférence} \approx 3.14\dots$$

La projection sur l'axe x s'appelle $\cos \varphi$ (**cosinus** de φ) et la projection sur l'axe y s'appelle $\sin \varphi$ (**sinus** de φ).

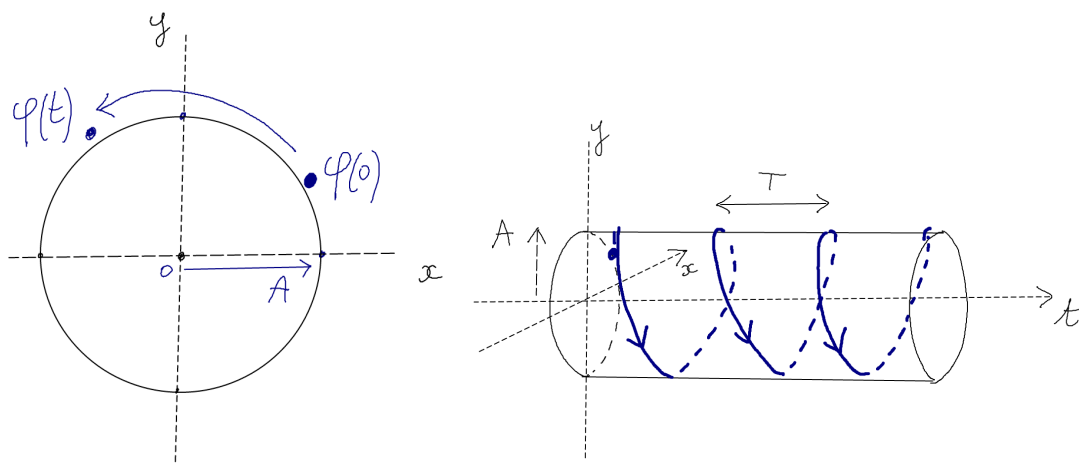


Exercice A.3.2. Donner les valeurs de $\cos(0)$, $\sin(0)$, $\cos(\pi/2)$, $\sin(\pi/2)$, $\cos(\pi)$, $\sin(\pi)$.

A.3.2 Mouvement circulaire

Définition A.3.3. Un **mouvement circulaire uniforme** est un point qui bouge sur un cercle à vitesse constante. Ce mouvement est caractérisé par :

- sa **période** T qui est le temps en sec. pour faire un tour ou la **fréquence** qui est $f = 1/T$, (nombre de tours par seconde en $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$). La **fréquence est positive** (respect. **négative**) si le mouvement est dans le sens direct, i.e. anti-horaire, (respect. indirect, i.e. sens horaire).
- l'**amplitude** $A > 0$ qui est le rayon du cercle.
- la **phase** φ_0 au départ (à la date $t = 0$).

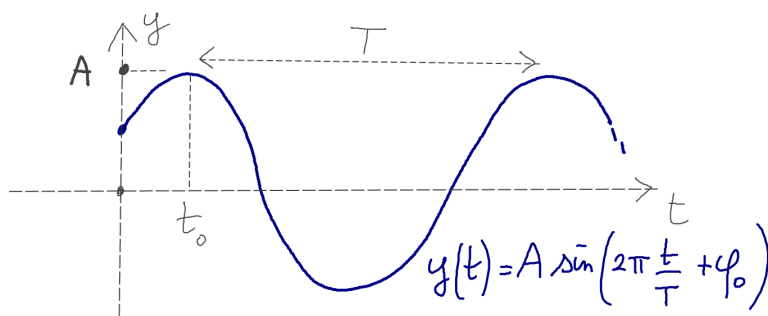


Remarque A.3.4. On note aussi $\omega = 2\pi f$ la vitesse angulaire (en radian par seconde).

Exemple A.3.5. Pour $f = 2\text{Hz}$, $T = \frac{1}{f} = 0.5\text{ s.}$, $\omega = 2\pi \times 2\text{Hz}$.

Exemple A.3.6. (Le diapason) Pour $f = 440\text{Hz}$, $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{440}\text{ s.} = 0.0022\text{ s.} = 2,2\text{ ms.}$ C'est "très rapide".

Proposition A.3.7. On déduit que la composante du mouvement circulaire ci-dessus sur l'axe y a une **forme sinusoidale** :



La formule précise est :

$$y(t) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right) = A \sin(2\pi ft + \varphi_0)$$

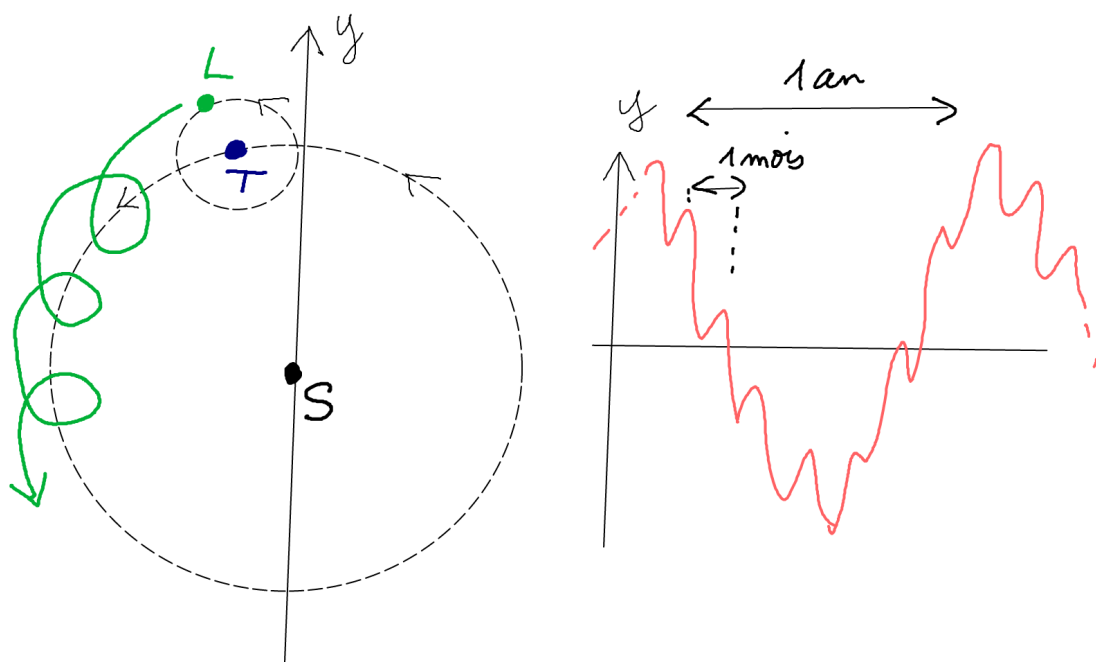
Remarque A.3.8. Pour se convaincre de la forme sinusoidale, observer un **tire-bouchon** de côté.

Remarque A.3.9. La phase φ_0 est reliée à la date t_0 du maximum par $\sin\left(2\pi \frac{t_0}{T} + \varphi_0\right) = \sin \frac{\pi}{2}$ donc $\varphi_0 = -2\pi \frac{t_0}{T} - \frac{\pi}{2}$.

A.3.3 Addition de mouvements circulaires, épicycles et décomposition de Fourier

Exemple A.3.10. la **Terre** a un **mouvement circulaire autour du soleil**, de période $T_1 = 365.25$ jours et rayon $A = 145 \cdot 10^6 \text{ km}$ et la **lune** a un **mouvement circulaire** autour du soleil, de période $T_2 = 27.3$ jours et rayon $A = 0.4 \cdot 10^6 \text{ km}$.

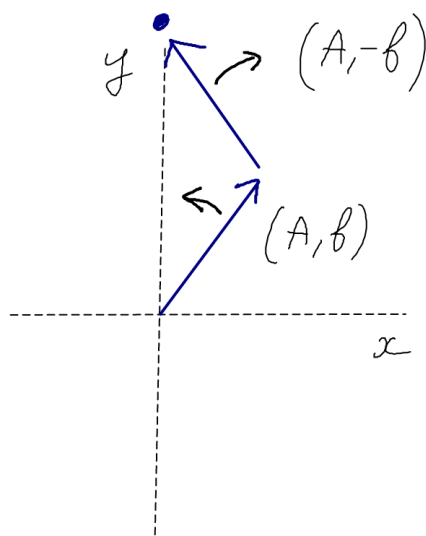
- On déduit que la trajectoire de la lune par rapport au soleil est la somme de ces deux mouvements circulaires et n'est pas périodique (car $\frac{T_1}{T_2} = 13.38\dots$ n'est pas un entier ni un rationnel). De là vient la difficulté des calendriers basés sur l'orbite terrestre soleil ou sur le mois lunaire (calendrier arabe) (Attention, le dessin n'est pas à l'échelle)



- Voir [cette animation de l'orbite lunaire](#)
- De la valeur $\frac{T_1}{T_2} - 1 = 12.38 \dots$ on déduit qu'il y a un peu plus de 12 pleines lunes par an, montrant l'importance du chiffre 12 dans l'histoire ancienne. (l'importance du chiffre 7 vient qu'il y a 7 astres non fixes dans le ciel : lune (lundi), mars (mardi), mercure (mercredi), jupiter (jeudi), venus (vendredi), saturne (samedi), soleil (dimanche, sunday).

Exercice A.3.11. (Difficile) A partir des périodes T_1, T_2 ci-dessus, déduire la période d'un mois synodique (par rapport au soleil) et le nombre de mois lunaires par an.

Exemple A.3.12. La superposition de deux mouvements circulaires de même amplitude A mais fréquences f et $-f$ (égales et opposée), (et phase à l'origine nulle, $\varphi_0 = 0$), est un mouvement selon l'axe y , sinusoïdale de fréquence f et amplitude $2A$.

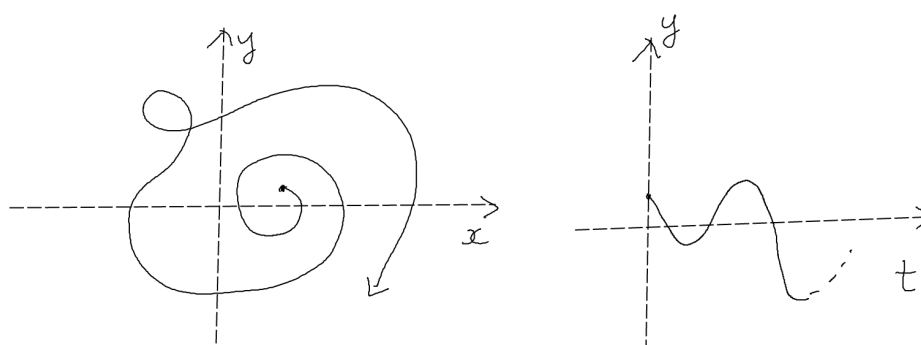


Exercice A.3.13. Faire l' [exercice](#) de ce lien.

Dans l'histoire des sciences il y a une longue histoire sur l'étude de l'addition des mouvements circulaires. On peut citer les études des [épicycles](#) par les grecs, les [Travaux de Al Din Al Touzi](#) au XIXème siècle en perse.

Une étape très importante est le [théorème de Fourier](#) obtenu par Joseph Fourier en 1811 à grenoble :

Théorème A.3.14. (Fourier 1811) *Tout mouvement $x(t), y(t)$ dans le plan se décompose de façon unique comme la superposition de mouvements circulaires, de différentes fréquences f , amplitudes A et phases à l'origine φ_0 .*



Voir ces [illustrations](#).

Remarque A.3.15. La [transformée de Fourier](#) fournit une formule pour obtenir cette décomposition en mouvements circulaires.

A.3.4 Cas particulier d'un mouvement périodique (série de Fourier)

En musique, on s'intéresse particulièrement aux **signaux périodiques**, car donnant un son "harmonieux" à la perception.

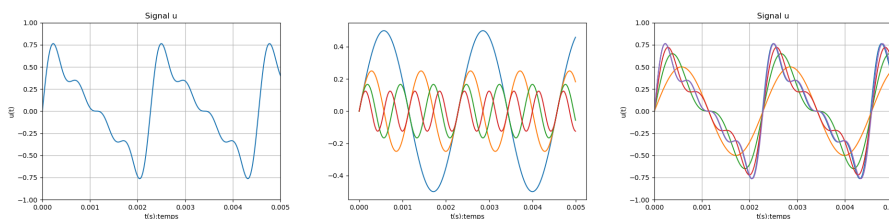
Remarque A.3.16. La justification du terme "harmonique" en musique est que l'on perçoit les signaux périodiques comme "harmonieux" et remonte peut être à l'ouvrage de Kepler **Harmonices Mundi** "L'Harmonie du monde" 1619 où il relie (sans trop de raison scientifique) musique et orbites planétaires.

Remarque qu'un mouvement circulaire de période T ou $\frac{1}{2}T$ ou $\frac{1}{3}T$ etc est à fortiori de période T .

Théorème A.3.17. Inversement d'après le Théorème de Fourier ci-dessus, tout signal périodique de période T se décompose de façon unique comme la superposition de mouvements circulaires de périodes $\frac{1}{n}T$ avec $n = 1, 2, 3, \dots$ appelé **numéro de l'harmonique**. En terme de fréquence, $f = \frac{1}{T}$ est la fréquence fondamentale du signal périodique et la **fréquence de l'harmonique** $n \geq 1$ est $\frac{n}{T} = nf$, donnant la suite :

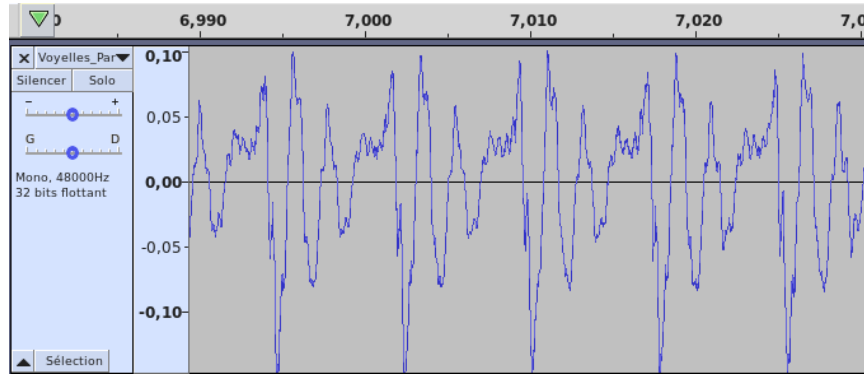
$$f, 2f, 3f, 4f, \dots$$

Exemple A.3.18. Sur la première figure, voici un signal $y(t)$ obtenu comme somme de quatre fonctions sinus $u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)$ de période respectives $T, \frac{1}{2}T, \frac{1}{3}T, \frac{1}{4}T$ avec $n = 1, 2, 3, 4$ représentées en couleur sur la 2eme figure. La 3eme figure montre les sommes partielles $u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, etc$ pour observer la reconstruction du signal. En rajoutant des harmoniques convenables $n = 5, 6, \dots$ etc on peut obtenir un signal en "**dent de scie**" à la limite.



Exemple A.3.19. Avec le **programme suivant en javascript**, vous pouvez changer de façon interactive les amplitudes A_n et phases φ_n et écouter le son résultant. Remarquer que si on change les phases, le signal change fortement, mais à l'écoute on ne perçoit aucun changement.

Exercice A.3.20. Voici un signal **Voyelles_Par_Malik.wav** qui est le son d'une voyelle "A". On mesure que la période est $T = 0.0625$. Quelles sont les fréquences des harmoniques ?



Solution A.3.21. La fréquence est $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.0625} = 160\text{Hz}$. Les fréquences des harmoniques sont alors :

$$f = 160\text{Hz}, \quad 2f = 320\text{Hz}, \quad 3f = 480\text{Hz}, \quad 4f = 640\text{Hz}, \quad \text{etc}$$

A.4 Codage des nombres en base 2 (binaire)

Voir [système binaire](#) sur wikipedia.

A.4.1 La base 10

On rappelle qu'en base 10, qui est la base usuelle, on a 10 symboles disponibles : 0, 1, 2, ..., 9 et que les nombres entiers écrits de la façon suivante :

$$0, 1, 2, \dots, 9, 10, 11, 12, \dots, 19, 20, 21, \dots$$

Exercice A.4.1. En base 10, combien d'entiers différents peut-on écrire avec $B = 3$ cases et un chiffre dans chaque case ?

Solution A.4.2. On peut écrire les entiers de $0 = 000$ à 999 , ce qui fait $1000 = 10^3$ entiers différents. Plus généralement avec B cases, on peut écrire 10^B entiers différents.

A.4.2 La base 2

De la même façon, en base 2 on a 2 symboles disponibles, par exemple 0, 1. Les nombres entiers sont écrits de la façon suivante :

$$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, \dots$$

Exercice A.4.3. En base 2, combien d'entiers différents peut-on écrire avec $B = 3$ cases et un chiffre dans chaque case ?

Solution A.4.4. On peut écrire les entiers de $0 = 000$ à 111 , ce qui fait $8 = 2^3$ entiers différents. Plus généralement avec B cases, appelé **nombre de bits**, on peut écrire 2^B entiers différents.

Remarque A.4.5. On rappelle qu'un **octet** correspond à 8 bits (i.e. 8 cases).

A.4.3 Le complément à 2

En base 2, avec un certain nombre de cases B fixé (nombre de bits), si on souhaite aussi **écrire des entiers négatifs**, on convient d'utiliser la première case pour le signe : 0 signifie positif et 1 signifie négatif. Par exemple avec $B = 3$ cases : on aura

entier	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
code en base 2	100	101	110	111	000	001	010	011

- Remarquer que pour obtenir la deuxième ligne, on part de 0 et on remplit le tableau de façon croissante et circulaire.
- Plus généralement, avec B cases, on code les entiers de $-\frac{2^B}{2} = -2^{B-1}$ à $\frac{2^B}{2} - 1 = 2^{B-1} - 1$.
- L'avantage de cette convention est que l'opération d'addition est inchangée, par exemple pour calculer $+3 - 2$ on effectue en base 2 : $011 + 110$ ce qui donne 1001 , mais en fait 001 car on a que $B = 3$ cases. Le résultat est donc $+1$.

Annexe B

Formulaire

B.1 Arithmétique

B.1.1 Théorème fondamentale de l'arithmétique

Théorème B.1.1 (**Théorème fondamentale de l'arithmétique**(Euclide, livre VII).).
Tout *entier* $a \in \mathbb{N}$ se décompose de façon unique

$$a = 2^{n_2} 3^{n_3} 5^{n_5} 7^{n_7} \dots = P^n$$

avec $P = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite des nombre premiers et $n = (n_2, n_3, n_5, \dots) \in \mathbb{N}^P$ des exposants entiers, i.e. $n_p \geq 0$ pour $p \in P$.

Tout **nombre rationnel positif** $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ se décompose de façon unique

$$r = 2^{n_2} 3^{n_3} 5^{n_5} 7^{n_7} \dots = P^n$$

avec $n = (n_2, n_3, n_5, \dots) \in \mathbb{Z}^P$ des exposants entiers relatifs, i.e. $n_p \in \mathbb{Z}$ pour $p \in P$.

Par exemple

$$12 = 2^2 3^1 5^0 7^0 \dots = P^n, \quad n = (2, 1, 0, \dots) \in \mathbb{N}^P$$

$$\frac{6}{5} = 2^1 3^1 5^{-1} 7^0 \dots = P^n, \quad n = (1, 1, -1, 0 \dots) \in \mathbb{Z}^P$$

B.1.2 Représentations géométriques des fractions irréductibles

Dans cette Section, on propose différentes façons de représenter une fraction rationnelle $a/b \in \mathbb{Q}$. Chacune peut avoir son intérêt en musique.

B.1.2.1 Verger d'Euclide

On peut construire les fractions irréductible $a/b \in \mathbb{Q}$ de la façon suivante, appelée **verger d'Euclide**.

Il est naturel de représenter un nombre rationnel positif a/b par un point (a, b) sur le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. La valeur numérique $a/b \in \mathbb{R}$ correspond à la pente de la droite passant par (a, b) . Partant de l'origine, le premier couple¹ (a, b) que cette droite correspond à une **fraction irréductible**. Voir figure B.1.1.

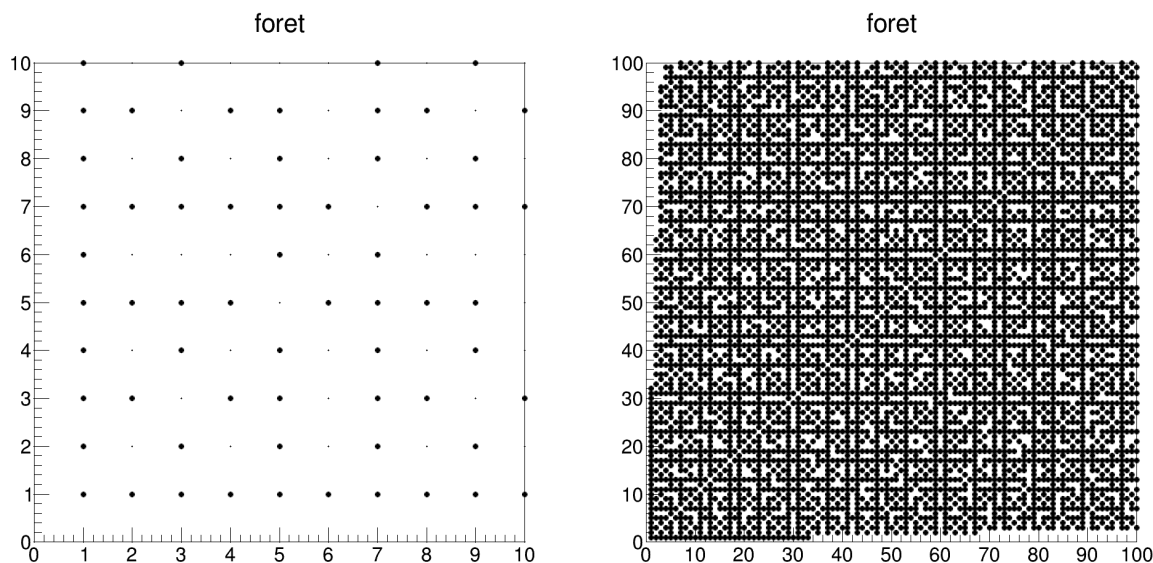


FIGURE B.1.1 – (a) Le verger d'Euclide. En termes imagés, considérons un verger où tous les arbres sont plantés alignés sur un réseau infini. On repère chaque arbre par ses coordonnées (a, b) par rapport à un arbre (arbitraire) d'origine $(0, 0)$. Supposons que l'on se place en $(0, 0)$ à la place de l'origine et que l'on observe les autres arbres autour de nous. On en voit une infinité, mais certains arbres (les gros points) en cachent d'autres (les petits points). Les gros points correspondent aux « fractions irréductibles » a/b et cachent les petits points qui correspondent aux “fractions réductibles”. Par exemple $(1, 1)$ cache $(2, 2)$ et $(3, 3)$ etc. De même $(2, 1)$ cache $(4, 2)$ et $(3, 2)$ cache $(6, 4)$. Dans la littérature, cette forêt s'appelle le **verger d'Euclide**.

(b) : même image à plus grande échelle.

B.1.2.2 La fractale de Farey, de Thomae

Le schéma suivant montre des traits rouges, qui en abscisse, sont les **rapports de fréquences** $\frac{f_2}{f_1} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ dans l'intervalle $[1, 2]$, et en ordonnée leur “résonance” $R(a/b) :=$

1. Remarquer que si la droite passe par (a, b) et si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est un entier, alors $\frac{na}{nb} = \frac{a}{b}$ donc la droite passe aussi par (na, nb) .

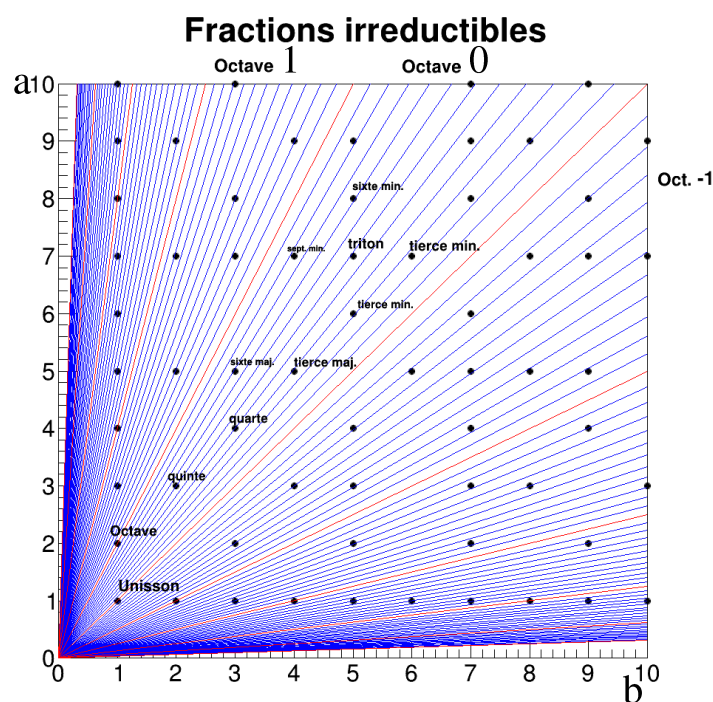


FIGURE B.1.2 – Les points noirs aux coordonnées (a, b) entières correspondent aux fractions a/b irréductibles. Les traits rouges sont les droites de pente 2^k avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela correspond aux intervalles d’octave. Les traits bleus sont les droites de pente $2^{k/12}$, correspondant aux intervalles de $1/2$ ton. On a associé un nom aux fractions les plus simples et situées dans la première octave : $1/1$ (unisson) $2/1$ octave, $3/2$ quinte, $4/3$ quarte, $5/3$ sixte, $5/4$ tierce majeure, etc

– $\log(a.b)$. On représente aussi en bleu la **gamme tempérée** ou **tempérament égal**, (utilisée pour les instruments occidentaux) :

Cela forme une **fractale** (appelée fractale de Farey ou de Thomae).

Cercles d’Appolonius On peut représenter les fractions $a/b \in \mathbb{Q}$ de la façon suivante appelée cercles d’appolonius :



FIGURE B.1.3 – Plafond de l’aéroport de Shanghai (juin 2019). Les tiges blanches sont placées sur un réseau carré régulier. En perspective, on observe les mêmes alignements que dans le verger d’Euclide ou dans la fractale de Thomae des fractions irréductibles. Deuxième figures : ceps, plans de vignes à Kerdonis (Belle île en mer).

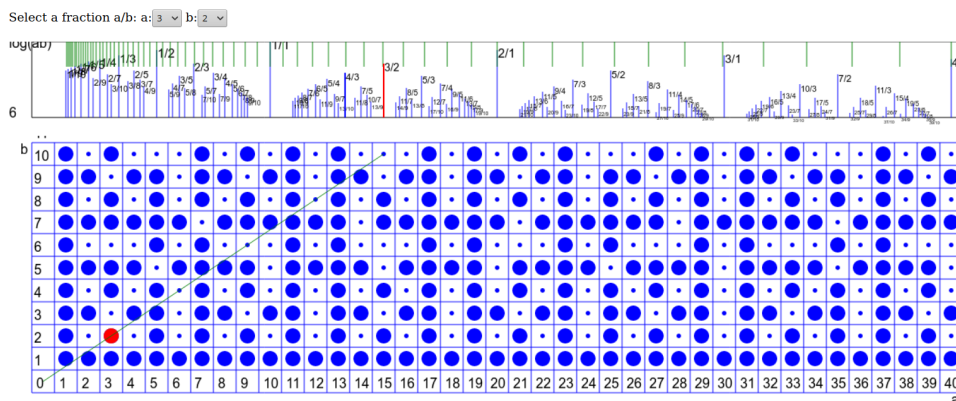
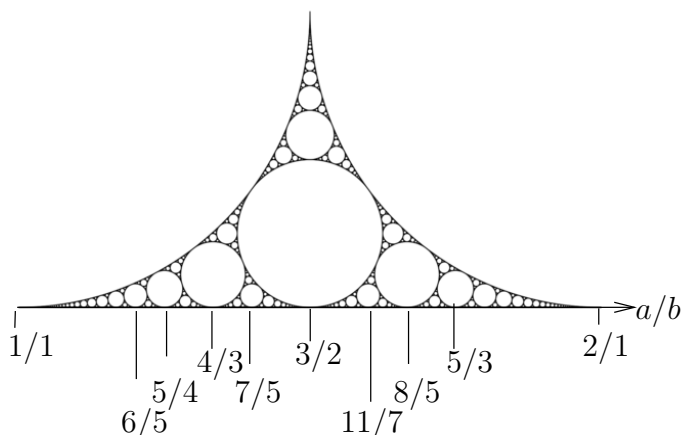


FIGURE B.1.4 – Relation entre le **verger d’Euclide** et la **fractale de Farey** : dans le plan inférieur, on relie par une droite (en vert) l’origine (0, 0) à un point (a, b) (ici (3, 2) en rouge). On associe un trait (en rouge) sur l’axe supérieur, à l’abscisse $x = \frac{a}{b}$ et de hauteur $-\log(ab)$ si $\frac{a}{b}$ est irréductible. Cela donne l’apparence de la forêt d’Euclide perçue depuis le point origine.



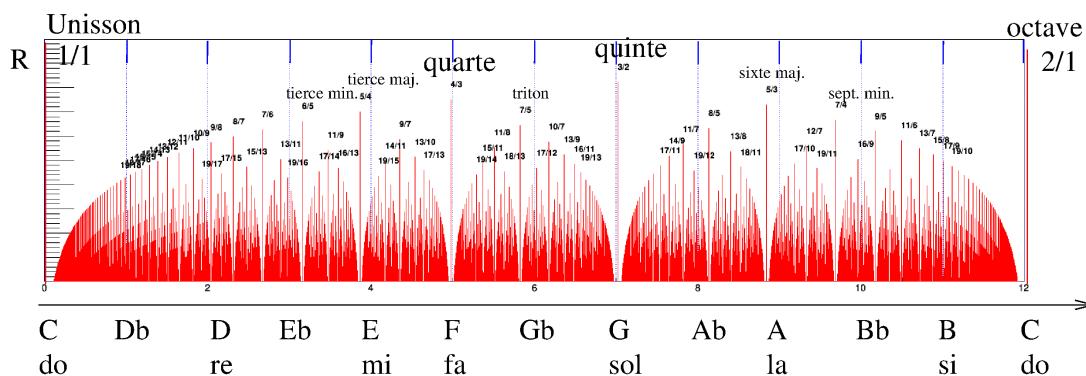
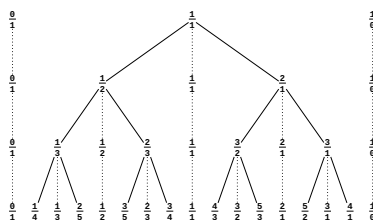


FIGURE B.1.5 – Fractale de Farey (ou Thomae) des nombres rationnels $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (irréductibles). On a $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ en abscisse et la **résonance** $R := -\ln(ab)$ en ordonnée.

Arbre de Stern Brocot On peut construire les fractions $a/b \in \mathbb{Q}$ de la façon suivante, appelée **arbre de Stern Brocot**.



On part des fractions $\frac{a}{b} = 0/1 = 0$ et $\frac{a'}{b'} = 0/1 = \infty$. A l'étape suivante, on insère entre elle la fraction $\frac{a+a'}{b+b'} = \frac{1}{1}$. Et on répète le processus.

Les propriétés sont que à chaque étape,

1. Si $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ sont deux fractions consécutives alors
 - (a) $a'b - ab' = 1$
 - (b) On a $\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}$ et les trois fractions sont irréductibles.
2. On obtient ainsi toutes les fractions irréductibles.

B.1.3 Réseau \mathbb{Z}^P et le réseau tonnetz

D'après le théorème B.1.1, tout nombre rationnel $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ se représente de façon unique par un point $n \in \mathbb{Z}^P$, c'est à dire que

$$n = (n_2, n_3, n_5, \dots) \in \mathbb{Z}^P$$

sont les exposants dans l'écriture $r = \frac{a}{b} = 2^{n_2} 3^{n_3} 5^{n_5} 7^{n_7} \dots = P^n$.

B.2 Rappels d'algèbre linéaire

Afin d'analyser les signaux ou fonctions $u(t)$ il est utile de considérer l'espace des fonctions comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Ce point de vue est un peu abstrait mais permet d'obtenir une bonne compréhension des phénomènes ondulatoires en général. Il est à la base de l'analyse de Fourier.

B.2.1 Vecteurs et produit scalaire

Dans l'espace \mathbb{R}^N , considérons deux vecteurs $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ et $v = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$. Ce sont par exemple des signaux échantillonnés. Voici les deux opérations élémentaires qui définissent l'espace comme un **espace vectoriel**. La **somme** est

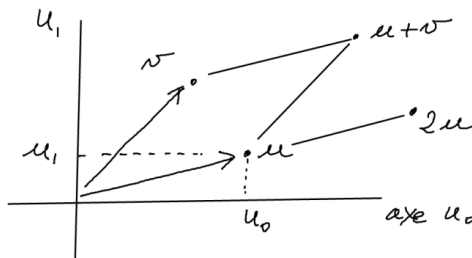
$$u + v = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \dots).$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre alors le **produit extérieur** est

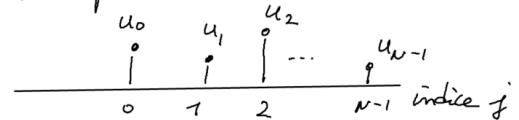
$$\lambda u = (\lambda u_0, \lambda u_1, \dots, \lambda u_{N-1}).$$

Remarquer que la représentation graphique des vecteurs est facile seulement en dimensions $N = 1, 2, 3$. Au delà, on peut représenter un vecteur comme une fonction (ou signal).

• en dimension $N=2$, dans \mathbb{R}^2 :



• autre représentation :



Ensuite, le **produit scalaire Euclidien** entre u et v est

$$\langle u|v \rangle := \bar{u}_0 v_0 + \bar{u}_1 v_1 + \dots + \bar{u}_{N-1} v_{N-1} \quad (\text{B.2.1})$$

où \bar{u}_j est le complexe conjugué si le signal est à valeur complexes².

Rappelons que la **norme** $\|u\|$ d'un vecteur u est définie par

$$\|u\|^2 = |u_0|^2 + |u_1|^2 + \dots + |u_{N-1}|^2 = \langle u|u \rangle$$

2. Même si les signaux physiques sont réels, il est pratique d'utiliser de manipuler des signaux à valeurs complexes pour la raison que les valeurs propres d'une matrice réelle sont parfois complexes. Voir section **B.3.0.1**.

et l'angle $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entre deux vecteurs u, v est défini par

$$\cos \alpha = \frac{|\langle u|v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \quad (\text{B.2.2})$$

Pour des fonctions (ex : signaux à temps continu) $t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \in \mathbb{C}$, on remplace la somme par une intégrale pour définir le produit scalaire, appelé **produit scalaire** L^2 :

$$\langle u|v \rangle := \int \overline{u(t)} v(t) dt \quad (\text{B.2.3})$$

Ainsi la **norme** L^2 est

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt$$

et s'interprète comme l'**énergie totale** du signal (donc $|u(t)|^2$ est la densité d'énergie en temps ou la **puissance**).

Remarque B.2.1. Si on considère une fonction $t \in [0, D] \rightarrow u(t)$ échantillonnée avec un pas de temps $\delta > 0$, cela donne un vecteur avec $N = \frac{D}{\delta}$ valeurs (u_0, u_1, \dots, u_N) . Alors à la limite $N \rightarrow \infty$ (ou $\delta \rightarrow 0$), le produit scalaire (B.2.1) tend vers (B.2.3), à condition de rajouter le facteur δ :

$$\langle u|v \rangle_{\delta} := \delta (\overline{u_0} v_0 + \overline{u_1} v_1 + \dots + \overline{u_{N-1}} v_{N-1}) \quad (\text{B.2.4})$$

Exercice B.2.2. Soient $u = (1, -1)$, $v = (1, 1)$ dans \mathbb{R}^2 . Calculer $\|u\|$, $\|v\|$, $\langle u|v \rangle$ et l'angle α entre u et v . De même pour $u = (1, -1, 0, 0)$ et $v = (0, 0, 1, 1)$ dans \mathbb{R}^4 .

Remarque B.2.3. Avec l'exercice précédent, remarquer que si les vecteurs u, v ont des supports différents, cad que pour tout j , $u_j = 0$ ou $v_j = 0$ alors de façon évidente $\langle u|v \rangle = 0$. Mais on peut avoir $\langle u|v \rangle$ comme dans le premier exemple, si u, v oscillent de façons différentes. Cela est fondamentale dans l'analyse de Fourier, ou dans l'analyse des fonctions par paquets d'ondes (ou par ondelettes),

B.2.2 Interprétation et utilité du produit scalaire

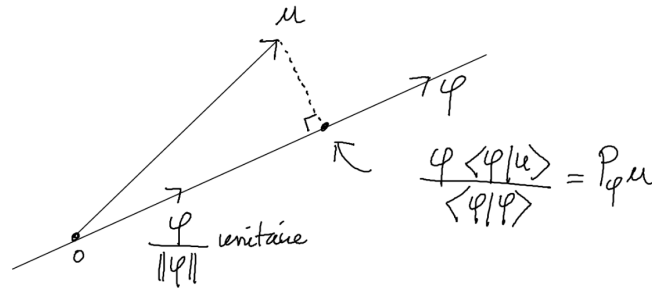
Le sens pratique et physique du produit scalaire est donc de pouvoir comparer les fonctions (ex : signaux) entre elles :

- Si l'angle est très petit $\alpha \approx 0$, cela signifie que les deux signaux sont presque colinéaires donc presque semblables.
- Au contraire si $\alpha \approx \frac{\pi}{2}$, les deux signaux sont orthogonaux, autrement dit très différents.

On peut utiliser le produit scalaire pour approximer un vecteur u à partir de vecteurs $(\varphi_j)_j$ connus. C'est ce que l'on fait en théorie du signal (et plus généralement en analyse fonctionnelle). Voici une formule très utile.

Proposition B.2.4. Si φ est un vecteur donné quelconque et non nul et u un autre vecteur, montrer que la **projection orthogonale de u sur l'axe de φ** notée $P_\varphi u$ est obtenue par l'opérateur

$$P_\varphi : u \rightarrow P_\varphi u = \frac{\langle \varphi | u \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} \varphi \quad (\text{B.2.5})$$



Démonstration. Posons $v = \frac{\langle \varphi | u \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} \varphi$. Ce vecteur est bien colinéaire à u . De plus pour vérifier que c'est la projection orthogonale, on vérifie que la projection de la différence $u - v$ est nulle :

$$\begin{aligned} \langle u - v | v \rangle &= \langle u | v \rangle - \langle v | v \rangle \\ &= \frac{\langle \varphi | u \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle} \langle u | \varphi \rangle - \frac{\langle u | \varphi \rangle \langle \varphi | u \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle \langle \varphi | \varphi \rangle} \langle \varphi | \varphi \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Remarque B.2.5. Si le vecteur φ est unitaire, i.e. $\|\varphi\| = 1$, $\langle \varphi | \varphi \rangle = 1$ alors on a l'expression un peu plus simple $P_\varphi u = \varphi \langle \varphi | u \rangle$. En physique quantique, on utilise la **notation de Dirac** $|\varphi\rangle = \varphi$. Le résultat précédent s'écrit $P_\varphi u = \frac{|\varphi\rangle \langle \varphi | u \rangle}{\langle \varphi | \varphi \rangle}$ ou $P_\varphi = \frac{|\varphi\rangle \langle \varphi |}{\langle \varphi | \varphi \rangle}$.

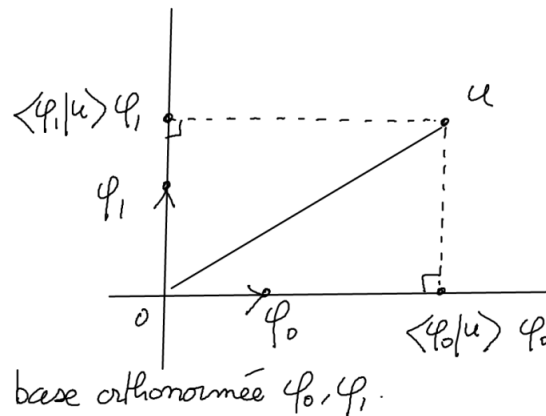
B.2.3 Décomposition dans une base orthogonale

Exercice B.2.6. En dimension finie, si $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$ forme un ensemble de vecteurs orthogonaux (donc axes orthogonaux) montrer que tout vecteur u se décompose comme superposition de ses projections sur chaque axe :

$$u = \sum_{j=0}^{N-1} P_{\varphi_j} u$$

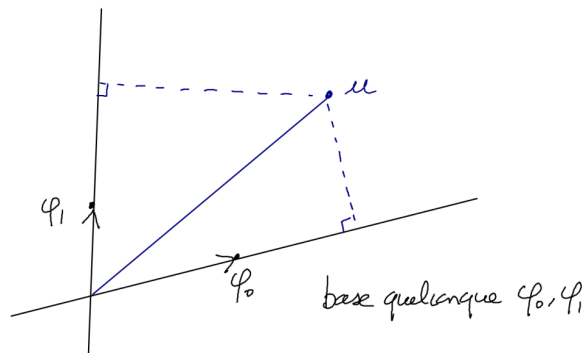
avec $P_{\varphi_j} u = \frac{\varphi_j \langle \varphi_j | u \rangle}{\langle \varphi_j | \varphi_j \rangle}$. En particulier si les vecteurs $(\varphi_j)_j$ sont orthonormés alors

$$u = \sum_{j=0}^{N-1} \langle \varphi_j | u \rangle \varphi_j \quad (\text{B.2.6})$$



B.2.4 Décomposition dans une base non orthogonale

En théorie du signal il est très utile de pouvoir exprimer un vecteur u à partir de ses composantes $\langle \varphi_j | u \rangle$ même si les vecteurs $(\varphi_j)_j$ ne sont pas orthogonaux entre eux. Par exemple on a vu dans l'exercice ?? que les paquets d'ondes ne sont pas orthogonaux entre eux (ils le deviennent si les paramètres sont très différents). Il y a une formule simple qui généralise (B.2.6).



Théorème B.2.7. Si $(\varphi_j)_{j=0 \rightarrow N-1}$ est une base de vecteurs quelconque, on définit la matrice $B = (B_{j,k})_{j,k}$ appelée matrice de Graham avec

$$B_{j,k} := \langle \varphi_j | \varphi_k \rangle.$$

Alors tout vecteur u s'écrit

$$u = \sum_{j,k=0}^{N-1} (B^{-1})_{k,j} \langle \varphi_j | u \rangle \varphi_k \tag{B.2.7}$$

où B^{-1} est la *matrice inverse*.

Démonstration. Considérons le cas $u = \varphi_l$ et posons $v := \sum_{j,k=0}^{N-1} \langle \varphi_j | u \rangle (B^{-1})_{j,k} \varphi_k$. On a $B_{j,l} = \overline{B_{l,j}}$ et $\sum_j B_{l,j} C_{j,k} = \delta_{l=k}$ donc pour tout m

$$\langle \varphi_m | v \rangle = \sum_{j,k=0}^{N-1} (B^{-1})_{k,j} \langle \varphi_j | \varphi_l \rangle \langle \varphi_m | \varphi_k \rangle = \sum_{j,k} (B^{-1})_{k,j} B_{j,l} B_{m,k} = \sum_k \delta_{k=l} B_{m,k} = B_{m,l} = \langle \varphi_m | \varphi_l \rangle$$

On déduit que $v = \varphi_l = u$. Par linéarité cela est vrai pour tout vecteur. Cela démontre (B.2.7). \square

Exemple B.2.8. Si la base est orthonormée alors $B_{j,k} = \delta_{j=k}$, $(B^{-1})_{j,k} = \delta_{j=k}$ et donc $u = \sum_j \langle \varphi_j | u \rangle \varphi_j$, on retrouve (B.2.6).

B.3 Analyse de fonctions

L'analyse de fonctions s'appelle l'**analyse fonctionnelle**.

B.3.0.1 Fonctions à valeur complexes

Bien que les signaux physiques soient à valeurs réelles i.e. $u : t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}$, il sera nécessaire de les considérer comme des **signaux à valeur complexe** $u(t) \in \mathbb{C}$ pour la raison suivante.

En analyse fonctionnelle, on considère des opérateurs linéaires qui transforment les signaux et agissent de manière équivalente à une matrice. Il sera utile de considérer les vecteurs propres de ces opérateurs, qui représentent des signaux invariants par la transformation. Or il est connu qu'une matrice réelle peut avoir des valeurs propres et vecteurs propres complexes, par exemple la matrice J suivante qui possède les valeurs propres $i, -i$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Ju_+ = iu_+, \quad Ju_- = -iu_-,$$

avec les vecteurs propres

$$u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad u_- = \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix},$$

Et dans la base de ces deux vecteurs propres, un vecteur réel comme $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ par exemple, se décompose avec des composantes complexes :

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = iu_+ - iu_-.$$

B.3.1 Fonctions régulières de Schwartz

Une fonction est une application $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$. C'est un espace vectoriel de dimension infinie. Pour l'étudier on introduit tout d'abord un produit scalaire et une norme qui permette de comparer différentes fonctions, mesurer leur distance, etc... Pour définir ces opérations il est commode de le faire sur un sous espace de fonctions très régulières. Par exemple l'espace de Schwartz définit ci-dessous qui est l'espace de fonctions u lisses (C^∞) et à décroissance rapide, c'est à dire qui tendent vers 0 à l'infini plus vite que tout polynome $\frac{1}{x^\alpha}$, et de même pour ses dérivées $\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}$.

Définition B.3.1. L'espace de Schwartz ou espace des fonctions lisses à décroissance rapide est :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha, \beta} > 0, \forall x, \quad \left| \left(x^\alpha \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} \right) (x) \right| < C_{\alpha, \beta} \right\} \quad (\text{B.3.1})$$

B.3.2 Distributions

B.3.3 Produit scalaire entre les fonctions

Pour évaluer "l'information" que contient une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ il faut utiliser une distance entre les fonctions qui permet ainsi de discriminer différentes fonctions. Il y a plusieurs possibilités. On peut utiliser la "norme L^2 " qui provient d'un produit scalaire entre fonctions appelé "produit scalaire L^2 ".

Définition B.3.2. Si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on note

$$\langle u|v \rangle_{L^2} := \int \bar{u}(x) v(x) dx$$

appelé **produit scalaire L^2 ou $L^2(\mathbb{R}^n; dx)$** . En particulier

$$\|u\|_{L^2} := \sqrt{\langle u|u \rangle}$$

est la **norme L^2** de u .

Ce produit scalaire peut être étendu à d'autres fonctions lorsqu'il est toujours défini par exemple, ci-dessous pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ donné, on considère la fonction

$$\varphi_\xi : x \rightarrow e^{i\xi x} \in \mathbb{C}$$

appelée "**mode de Fourier**" ou "**onde plane**". Clairement $\varphi_\xi \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car elle ne décroît pas, mais pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle \varphi_\xi|u \rangle_{L^2} \in \mathbb{C}$ est bien défini car l'intégrale est convergente.

On appelle $\xi \in \mathbb{R}^n$ le **vecteur d'onde** ou **vecteur fréquence**.

B.3.4 Bases orthonormées

Comme en géométrie Euclidienne, il est utile d'utiliser des fonctions formant des bases orthonormées dans l'espace des fonctions.

En analyse fonctionnelle (analyse de fonction), il y a de nombreux choix intéressants de bases orthonormées de fonctions. Parmi les plus connues, dans le cas des fonctions périodiques ou définies sur un intervalle $[0, T]$, il y a la base de Fourier utilisée pour la transformée de Fourier.

B.3.5 Opérateurs auto-adjoints

Si $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur dans un espace de Hilbert \mathcal{H} , son **adjoint** $H^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est l'opérateur défini par

$$\langle u | H^\dagger v \rangle = \langle Hu | v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

On dit que H est autoadjoint si $H^\dagger = H$.

Proposition B.3.3. *Si $H^\dagger = H$ alors les valeurs propres de H sont réelles et les espaces propres sont orthogonaux entre eux, i.e. si $Hu_1 = \omega_1 u_1$ et $Hu_2 = \omega_2 u_2$ avec $u_1, u_2 \neq 0$ alors $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ et si $\omega_1 \neq \omega_2$ alors $\langle u_1 | u_2 \rangle = 0$.*

Démonstration. On écrit

$$\langle u_1 | Hu_1 \rangle = \omega_1 \langle u_1 | u_1 \rangle = \langle Hu_1 | u_1 \rangle = \overline{\omega_1} \langle u_1 | u_1 \rangle$$

donc $\omega_1 = \overline{\omega_1}$ donc $\omega_1 \in \mathbb{R}$. De plus

$$\langle u_2 | Hu_1 \rangle = \omega_1 \langle u_2 | u_1 \rangle = \langle Hu_2 | u_1 \rangle = \omega_2 \langle u_2 | u_1 \rangle$$

donc $(\omega_2 - \omega_1) \langle u_2 | u_1 \rangle = 0$ donc $\langle u_2 | u_1 \rangle = 0$ si $\omega_2 \neq \omega_1$. □

B.4 Transformée de Fourier sur \mathbb{R}

B.4.1 Transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse

Pour plus de détails, voir le cours [Faure \(2010\)](#).

La fonction suivante qui dépend du paramètre fréquence $f \in \mathbb{R}$, est appelée **mode de Fourier** ou **onde plane** :

$$\varphi_f(t) = e^{i2\pi ft}. \tag{B.4.1}$$

Remarque B.4.1. “**Motivations pour l'analyse de Fourier**”. Voici des arguments qui justifient l'utilisation des modes de Fourier (B.4.1). La fonction $t \rightarrow e^{i2\pi ft}$ est plus naturelle et utile que $t \rightarrow \cos(2\pi ft)$ pour la simple raison que

$$\frac{d}{dt} (e^{i2\pi ft}) = (i2\pi f) e^{i2\pi ft},$$

autrement dit cette fonction est un **vecteur propre** de l'opérateur dérivée avec la **valeur propre** $i2\pi f$. Or l'opérateur dérivée intervient dans la plupart des équations de la physique (EDP). La théorie de Fourier, expliquée plus loin, consiste justement à faire un changement de base dans l'espace vectoriel des fonctions, et à utiliser la base des vecteurs propres de l'opérateur dérivée que sont les modes de Fourier.

Définition B.4.2. (Joseph Fourier 1822 à Grenoble) La **transformée de Fourier** d'un signal $u : t \rightarrow u(t)$ est la fonction

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{F}u)(f) := \langle \varphi_f | u \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi ft} u(t) dt \quad (\text{B.4.2})$$

Remarque B.4.3. $(\mathcal{F}u)(f) = \langle \varphi_f | u \rangle$ mesure la présence du mode de Fourier φ_f dans le signal u .

Théorème B.4.4. *Inversement, à partir de la fonction transformée de Fourier $f \rightarrow v(f) = (\mathcal{F}u)(f)$ on peut reconstruire le signal par la formule appelée **transformée de Fourier inverse** :*

$$u(t) = (\mathcal{F}^{-1}v)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi ft} v(f) df \quad (\text{B.4.3})$$

qui s'interprète comme une superposition des modes de Fourier (similaire à (B.2.6)).

Démonstration. On va utiliser la formule importante (au sens des distributions)

$$\int e^{i2\pi f(t-t')} df = \delta(t-t'). \quad (\text{B.4.4})$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi ft} (\mathcal{F}u)(f) df \stackrel{(\text{B.4.2})}{=} \int \int e^{i2\pi f(t-t')} u(t') dt' df = \int \int \delta(t-t') u(t') dt' = u(t).$$

□

Remarque B.4.5. La formule de \mathcal{F}^{-1} est similaire à la formule de \mathcal{F} : $(\mathcal{F}^{-1}v)(t) = (\mathcal{F}v)(-t)$. Plus précisément on a $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^\dagger$, i.e. \mathcal{F} est un **opérateur unitaire**.

Proposition B.4.6. “Formule de Parseval”. Pour toute fonction u , on a

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$$

*autrement dit la transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est un **opérateur unitaire**.*

Démonstration. On écrit

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2}^2 = \int e^{i2\pi ft'} \overline{u(t')} e^{-i2\pi ft} u(t) dt' dt df \stackrel{(B.4.4)}{=} \int \overline{u(t')} u(t) dt = \|u\|_{L^2}^2.$$

□

B.4.2 Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

Si $u = (\dots u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est une suite infinie de données représentant un signal échantillonné avec un pas de temps δ , on peut l'écrire comme une série de distributions de Dirac aux instants $t_j = \delta j$, appelé aussi **peigne de Dirac** :

$$u(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j \delta_{\delta j}(t) \quad (B.4.5)$$

Alors sa transformée de Fourier est pour $f \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{F}u)(f) \stackrel{(B.4.2)}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi ft_j} u_j \quad (B.4.6)$$

Voici un résultat très important en théorie du signal

Théorème B.4.7. *La transformée de Fourier $(\mathcal{F}u)(f)$ d'un **peigne de Dirac** (B.4.5) de pas de temps δ est **périodique en fréquence** de période $\Delta f = \frac{1}{\delta}$, i.e.*

$$(\mathcal{F}u)(f) = (\mathcal{F}u)\left(f + \frac{1}{\delta}\right)$$

et la transformée de Fourier inverse donne pour $j \in \mathbb{Z}$,

$$u_j = \delta \int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{i2\pi ft_j} (\mathcal{F}u)(f) df. \quad (B.4.7)$$

Démonstration. On calcule

$$(\mathcal{F}u)\left(f + \frac{1}{\delta}\right) \stackrel{(B.4.6)}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi(f+\frac{1}{\delta})t_j} u_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi ft_j} e^{-i2\pi j} u_j = (\mathcal{F}u)(f)$$

car $e^{-i2\pi j} = 1$. Ensuite

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{i2\pi ft_j} (\mathcal{F}u)(f) df &\stackrel{(B.4.6)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{i2\pi ft_j} e^{-i2\pi ft_k} df \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{i2\pi f \delta(j-k)} df \end{aligned}$$

or

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{i2\pi f\delta(j-k)} df = \begin{cases} \frac{1}{\delta} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

On déduit (B.4.7). □

Remarque B.4.8. La propriété B.4.7 est appelée en théorie du signal le « **repliement de spectre** » ou « **aliasing** ». Cf Mallat (1999, p.61). Une période en fréquence est $-\frac{1}{2}\Delta f \leq f \leq \frac{1}{2}\Delta f$ et la borne $\frac{1}{2}\Delta f = \frac{1}{2\delta}$ est appelée **fréquence de Nyquist**.

Remarque B.4.9. Dans la relation : pas de temps $\delta \Leftrightarrow$ période en fréquence $\frac{1}{\delta}$, on retrouve une manifestation du principe d'incertitude (2.2.3).

B.4.3 Série de Fourier d'un signal périodique

Le théorème B.4.7 nous dit que la transformée inverse d'un signal périodique est un peigne de Dirac. Or la transformée de Fourier inverse est similaire à la transformée de Fourier elle-même d'après la formule (B.4.3). On déduit des formules précédentes (B.4.6) et (B.4.7) :

Théorème B.4.10. *La transformée de Fourier d'un **signal périodique** u de période T est un **peigne de Dirac** de pas de fréquence $\frac{1}{T}$ donnée par*

$$(\mathcal{F}u)(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}_n \delta_{\frac{1}{T}n}(f)$$

avec des **coefficients de Fourier** (ou **harmoniques**) $\hat{u}_n \in \mathbb{C}$ donnés par

$$\hat{u}_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-i2\pi n \frac{t}{T}} dt. \quad (\text{B.4.8})$$

Le signal se décompose en **série de Fourier**

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}_n e^{i2\pi n \frac{t}{T}}$$

Formule de Parseval est $\|u\|_{L^2(0,T)} = \|\hat{u}\|_{l^2(\mathbb{Z})}$ c'est à dire

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n|^2.$$

Exercice B.4.11. Calculer les coefficients de Fourier des fonctions périodiques suivantes : **sinus**, **signal carré**, **triangle**, **fonction scie**.

Exercice B.4.12. Montrer que si le signal est réel alors $\hat{u}_{-n} = -\overline{\hat{u}_n}$, $\forall n$ et que l'on peut écrire (2.3.1) :

$$u(t) = \sum_{n \geq 0} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$

avec $\hat{u}_n = A_n e^{i\varphi_n}$ et la fréquence $f = \frac{1}{T}$.

B.4.4 Transformée de Fourier discrète

Combinant avec les Théorèmes B.4.10 et B.4.7 cela donne un résultat très utile concernant les signaux échantillonnés de pas de temps δ et périodique de période T :

Théorème B.4.13. « *Transformée de Fourier discrète, DFT* ». La transformée de Fourier d'un signal échantillonné de pas de temps δ et périodique de période T est un peigne de Dirac de pas de fréquence $\frac{1}{T}$ et périodique en fréquence de période $\frac{1}{\delta}$. On a les formules suivantes pour un signal $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$. Les coefficients de Fourier sont

$$\hat{u}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi j n/N} u_j \quad (\text{B.4.9})$$

et inversement

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi j n/N} \hat{u}_n$$

La formule de Parseval est

$$\sum_{j=0}^{N-1} |u_j|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{u}_n|^2.$$

Démonstration. On va démontrer directement ces formules. Montrons que la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi(j-j')n/N} = N\delta_{j=j' \bmod N} \quad (\text{B.4.10})$$

En effet posons $S := \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi(j-j')n/N}$, alors $e^{i2\pi(j-j')/N} S = \sum_{n=1}^N e^{i2\pi(j-j')n/N}$ et si $j \neq j' \bmod N$ alors $e^{i2\pi(j-j')/N} \neq 1$ et

$$e^{i2\pi(j-j')/N} S - S = e^{i2\pi(j-j')N/N} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = 0.$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi j n/N} \hat{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi(j-j')n/N} u_{j'} = \frac{1}{N} \sum_{j'=0}^{N-1} N\delta_{j=j' \bmod N} u_{j'} = u_j.$$

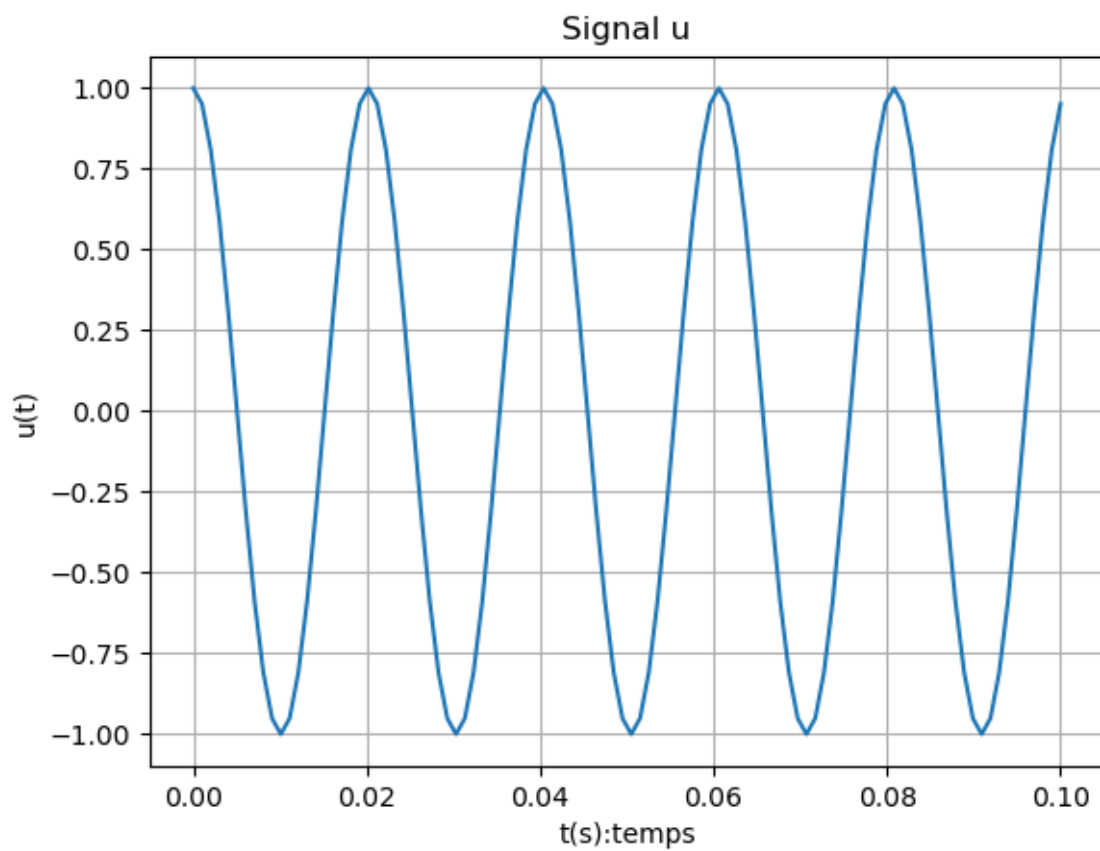
De même

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{u}_n|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j'=0}^{N-1} e^{i2\pi j'n/N} \overline{u_{j'}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi jn/N} u_j \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j,j'=0}^{N-1} \left(e^{i2\pi(j'-j)n/N} \right) \overline{u_{j'}} u_j \stackrel{(B.4.10)}{=} \frac{1}{N} \sum_{j,j'=0}^{N-1} N \delta_{j=j' \bmod N} \overline{u_{j'}} u_j \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} |u_j|^2.
 \end{aligned}$$

□

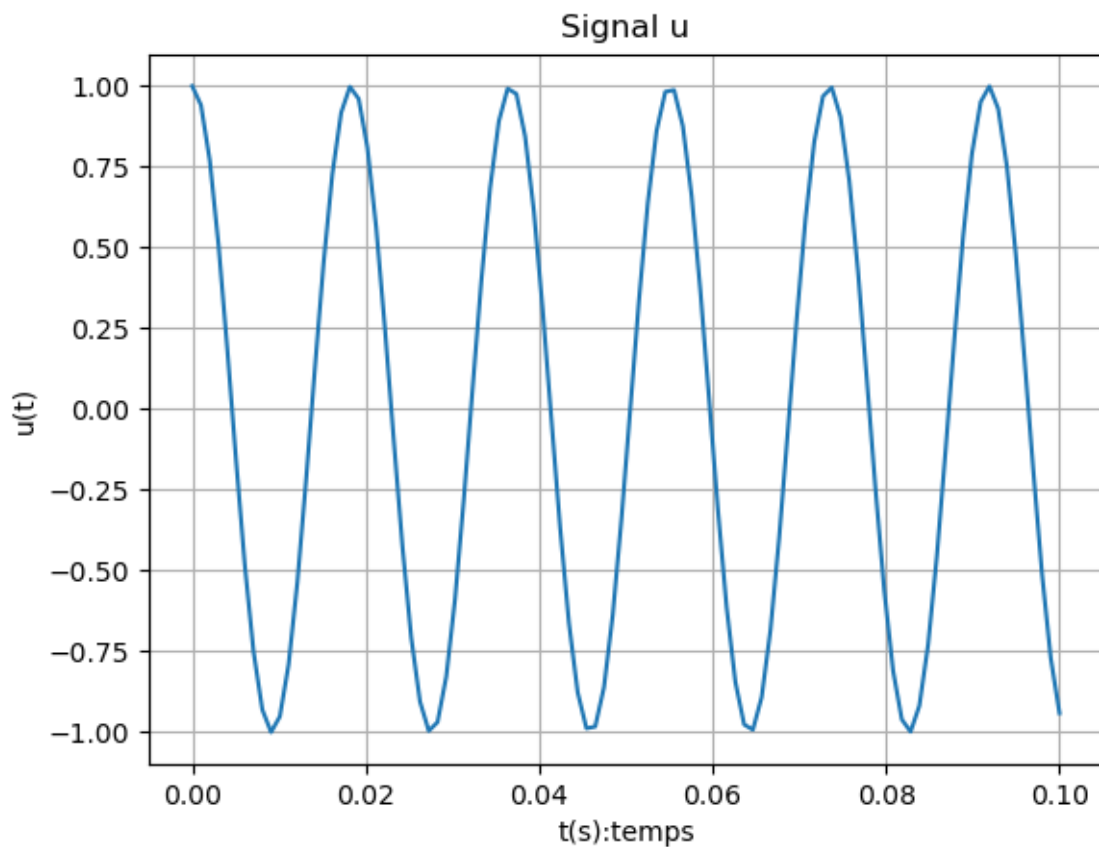
Remarque B.4.14. dans le cas des valeurs particulières du nombre d'échantillons $N = 2^M$, il y a une formule récursive appelée **transformée de Fourier rapide** qui permet de calculer \hat{u}_n à partir des (u_j) avec un nombre $\sim N \ln N$ d'opérations au lieu de $\sim N^2$. Cet algorithme est très utilisé en pratique.

Exemple B.4.15. Ce programme en python `DFT_of_array.py` utilise directement la formule (B.4.9) et calcule la transformée de Fourier discrète du signal u suivant, avec $N = 100$ points, et ici un signal de fréquence $f_0 = 50\text{Hz}$. Il utilise aussi la **bibliothèque scipy** pour un algorithme plus rapide. Lire le code pour comprendre les changements d'échelle en particulier.



Exercice B.4.16. Dans le programme précédent essayer avec un signal de fréquence $f_0 = 55\text{Hz}$. Qu'observez vous ?

Solution B.4.17. On obtient



B.5 Transformée de Fourier sur \mathbb{R}^n

Pour plus de détails, voir le cours [Faure \(2010\)](#).

Définition B.5.1. Pour une fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de Fourier est $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}u)(\xi) &:= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \langle \varphi_\xi | u \rangle_{L^2} \end{aligned} \quad (\text{B.5.1})$$

avec $\varphi_\xi(x) := e^{i\xi x}$ appelé “mode de Fourier”.

Ainsi \mathcal{F} est un **opérateur linéaire**

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

On définit son opérateur adjoint \mathcal{F}^\dagger par

$$\langle u | \mathcal{F}^\dagger v \rangle := \langle \mathcal{F}u | v \rangle, \forall u, v.$$

On a les propriétés suivantes

Proposition B.5.2. *L'opérateur adjoint \mathcal{F}^\dagger est donné par*

$$(\mathcal{F}^\dagger v)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{i\xi \cdot x} v(\xi) d\xi \quad (\text{B.5.2})$$

et vérifie la “formule d'inversion de Fourier”

$$\mathcal{F}^\dagger \mathcal{F} = \text{Id} \quad (\text{B.5.3})$$

Remarque B.5.3. La formule (B.5.3) signifie que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur unitaire c'est à dire qui conserve le produit scalaire $\langle \mathcal{F}u | \mathcal{F}v \rangle = \langle u | v \rangle$. La conséquence est que $\mathcal{F}^\dagger = \mathcal{F}^{-1}$ est son inverse, c'est à dire si $v = \mathcal{F}u$ alors

$$u = \mathcal{F}^{-1}v = \mathcal{F}^\dagger v$$

B.6 Transformée par paquets d'ondes

L'inconvénient de la transformée de Fourier est que partant d'une fonction $u(x)$ on obtient une fonction $(\mathcal{F}u)(\xi)$ qui ne dépend plus de x et donc on a l'impression d'avoir perdu l'information sur la localisation de u dans l'espace des $x \in \mathbb{R}^n$. En fait, l'information n'est pas perdue car $\mathcal{F}^\dagger \mathcal{F}u = u$, mais elle n'est plus “visible”.

On peut généraliser la notion de transformée de Fourier et rendre visible à la fois l'information de la localisation de u en x et ξ dans l'espace des phases.

B.6.1 Paquets d'ondes Gaussiens

On notera, pour $x, x' \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x - x'\|^2 := \sum_{j=1}^n (x_j - x'_j)^2$$

qui mesure la distance dans \mathbb{R}^n .

Définition B.6.1. Soit $\sigma > 0$. Pour une position $x \in \mathbb{R}^n$ et une fréquence $\xi \in \mathbb{R}^n$ données, on associe un **paquet d'onde** de largeur σ qui est la fonction

$$\varphi_{x,\xi}(x') = a e^{i\xi x'} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\|x' - x\|}{\sigma} \right)^2}$$

avec $a = (\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{4}}$ de sorte que $\|\varphi_{x,\xi}\|_{L^2} = 1$.

Sa transformée de Fourier est

$$(\mathcal{F}\varphi_{x,\xi})(\xi') = a' e^{ix\xi'} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\|\xi' - \xi\|}{(1/\sigma)} \right)^2} \quad (\text{B.6.1})$$

Les formules précédentes montrent que $|\varphi_{x,\xi}(x')|$ est une Gaussienne de largeur $\Delta x = \sigma$ centrée en x et $|(\mathcal{F}\varphi_{x,\xi})(\xi')|$ est une Gaussienne de largeur $\Delta \xi = 1/\sigma$ centrée en ξ .

Proposition B.6.2. “*Produit scalaire entre deux paquets d'ondes*”. On a

$$|\langle \varphi_{x',\xi'} | \varphi_{x,\xi} \rangle| = \exp(-d^2)$$

avec

$$d^2 = \left(\frac{|x' - x|}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{|\xi' - \xi|}{1/\sigma} \right)^2,$$

ainsi d est la distance entre les points (x', ξ') et (x, ξ) mesurée avec la métrique $g = \left(\frac{dx}{\delta} \right)^2 + \left(\frac{d\xi}{1/\sigma} \right)^2$.

Démonstration. Le calcul utilise l'intégrale Gaussienne. □

B.6.2 Transformée par paquets d'ondes

Définition B.6.3. Pour une fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sa **transformée par paquets d'ondes** est $\mathcal{T}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$(\mathcal{T}u)(x, \xi) := \langle \varphi_{x,\xi} | u \rangle_{L^2}. \quad (\text{B.6.2})$$

Ainsi \mathcal{T} est un **opérateur linéaire**

$$\mathcal{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}).$$

On considère la mesure $\frac{dx d\xi}{(2\pi)^n}$ sur \mathbb{R}^{2n} pour définir l'espace $L^2\left(\mathbb{R}^{2n}; \frac{dx d\xi}{(2\pi)^n}\right)$ et on définit son opérateur adjoint \mathcal{T}^\dagger par

$$\langle u | \mathcal{T}^\dagger v \rangle := \langle \mathcal{T}u | v \rangle, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}).$$

On a les propriétés suivantes

Proposition B.6.4. *L'opérateur adjoint \mathcal{T}^\dagger est donné par*

$$(\mathcal{T}^\dagger v)(x') := \int v(x, \xi) \varphi_{x, \xi}(x') \frac{dx d\xi}{(2\pi)^n}$$

et vérifie

$$\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} = \text{Id} \tag{B.6.3}$$

Remarque B.6.5. La formule (B.6.3) signifie que $\mathcal{T} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2n})$ est une isométrie c'est à dire qui conserve le produit scalaire $\langle \mathcal{T}u | \mathcal{T}v \rangle = \langle u | v \rangle$. Mais comme l'espace d'arrivée est différent de l'espace de départ, cela n'implique pas que \mathcal{T} est inversible. En fait

$$\mathcal{P} := \mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger$$

est un projecteur orthogonal sur $\text{Im}(\mathcal{P}) = \text{Im}(\mathcal{T})$, en effet $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$. Ainsi $\mathcal{T} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Im}(\mathcal{T})$ est un opérateur unitaire (inversible), i.e. si $v = \mathcal{T}u$ alors $u = \mathcal{T}^{-1}v = \mathcal{T}^\dagger v$.

B.7 Modèle élémentaire du résonateur linéaire forcé

Référence : [Pottier \(2000, chap 12.A\)](#)

Considérons l'équation pour $x(t) \in \mathbb{R}$, dépendant de $t \in \mathbb{R}$

$$m\partial_t^2 x = -\gamma\partial_t x - Kx + p(t) \tag{B.7.1}$$

avec $m > 0$ associé au "terme d'inertie", $\gamma \geq 0$ associé au "terme de forçement", $K \geq 0$ associé au "terme de rappel" et $p(t)$ est une force extérieure.

B.7.1 Résolution générale

Référence [Taylor \(1996\)](#).

Posons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \partial_t x(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

alors l'équation (B.7.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t X &= \begin{pmatrix} \partial_t x \\ \partial_t^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & \gamma \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \end{pmatrix} \\ &= AX + f(t) \end{aligned}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & \gamma \end{pmatrix}$ et $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \end{pmatrix}$. La solution générale par la “formule de Duhamel” est

$$X(t) = e^{tA} X(0) + \int_0^t e^{(s-t)A} f(s) ds$$

B.7.2 Cas d’un signal périodique $p(t) = p(0) e^{i\omega t}$

Si $p(t) = p(0) e^{i\omega t}$ est un “signal monochromatique” de fréquence ω , alors une solution particulière de (B.7.1) est $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ avec

$$x_0 = \frac{p_0}{-m\omega^2 + i\gamma\omega + K}$$

de module

$$|x_0| = \frac{|p_0|}{((K - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)^{1/2}} \quad (\text{B.7.2})$$

qui est maximal en $\omega = \pm\omega_0$ avec

$$\omega_0 = \left(\frac{K}{m} \left(1 - \frac{\gamma^2}{2Km} \right) \right)^{1/2}$$

appelée **fréquence de résonance** et donnant une amplitude

$$|x_0(\omega_0)| = \frac{p_0}{\gamma} \left(\frac{K}{m} \right)^{-1/2}$$

Remarque B.7.1. Si les frottement sont très faibles, $\gamma \ll \sqrt{Km}$ alors $\omega_0 \sim \sqrt{\frac{K}{m}}$

Démonstration. On suppose $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$. Alors (B.7.1) donne

$$\begin{aligned} -mx_0\omega^2 + i\gamma x_0\omega + Kx_0 &= p_0 \\ \Leftrightarrow x_0 &= \frac{p_0}{-m\omega^2 + i\gamma\omega + K} \end{aligned}$$

donc

$$|x_0|^2 = \frac{|p_0|^2}{(K - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Le dénominateur $D(\omega) = (K - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2$ a un minimum en $\omega_0 \neq 0$ donné par

$$\begin{aligned} D'(\omega_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(K - m\omega_0^2)(-2m\omega_0) + \gamma^2 2\omega_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega_0^2 &= \frac{K}{m} - \frac{\gamma^2}{2m^2} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |x_0|^2 &= \frac{|p_0|^2}{(K - m\omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega_0^2} \\ &= \frac{|p_0|^2}{\left(\frac{\gamma^2}{2m}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{K}{m} - \frac{\gamma^2}{2m^2}\right)} = \frac{p_0^2 m}{\gamma^2 K} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \infty \end{aligned}$$

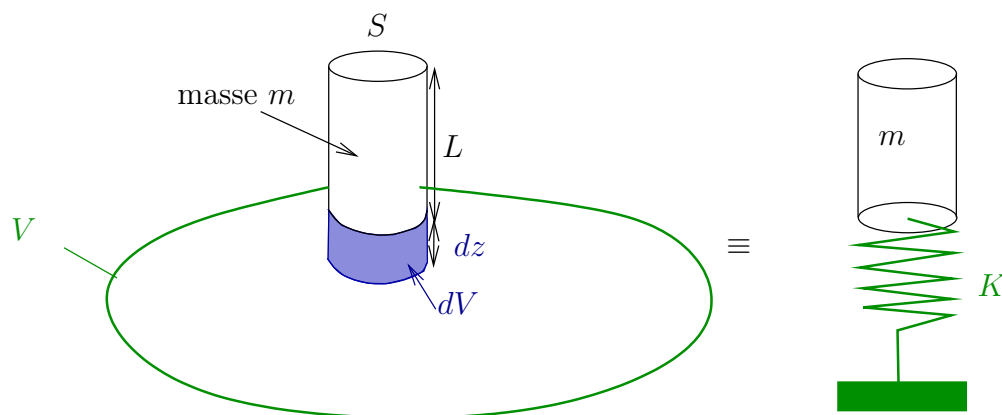
□

B.8 Résonateur de Helmholtz

Référence : [Schroeder et al. \(2007, p.94\)](#). [Resonateur de Helmholtz sur wikipedia](#), Elmore p.148.

Ce modèle est supposé représenter par exemple une bouteille avec un goulot, qui produit du son lorsque l'on souffle sur le goulot.

Considérons un volume V , en vert sur la figure, connecté à l'extérieur par un cylindre de surface S et longueur L . Dans le volume et le cylindre il y a de l'air de masse volumique ρ . On néglige le poids.



Supposons que le fluide dans le cylindre se déplace de façon rigide de la longueur dz . Cela induit une variation de volume dans la zone verte :

$$dV = Sdz.$$

L'air est compressible, mais cette variation de volume implique une variation de pression dP dans le volume obtenu de la façon suivante. Le changement est supposé adiabatique on a donc d'après la loi de Laplace $PV^\gamma = \text{cste}$,

$$\begin{aligned} \ln P + \gamma \ln V &= \ln(\text{cste}) \Leftrightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \\ \Leftrightarrow dP &= -\frac{\gamma P dV}{V} = -\frac{\gamma P S dz}{V} \end{aligned}$$

Du fait de cette variation de pression, le cylindre subit une force selon l'axe z :

$$dF = S dP = -\frac{\gamma P S^2 dz}{V} = -K dz$$

avec la "constante de raideur"

$$K = \frac{\gamma P S^2}{V}$$

Ainsi, si on note $m = \rho S L$ la masse du gaz dans le cylindre, le modèle est équivalent à une masse m attachée à un ressort de raideur K .

L'équation de mouvement de Newton donne pour la position $z(t)$ du cylindre :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -K z \Leftrightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$$

c'est un "mouvement harmonique" d'oscillation avec la fréquence

$$\omega = \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma P S}{V \rho L}\right)^{1/2} = c \left(\frac{S}{V L}\right)^{1/2}$$

où on a utilisé l'expression de la vitesse du son dans l'air donnée par

$$c = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Remarque B.8.1. Un modèle un peu amélioré propose de remplacer L par $L + \frac{1}{2}S^{1/2}$ dans l'expression finale.

Exemple B.8.2. Pour la bouteille, présentée en photo,



on mesure à peu près $V = 33\text{cl} = 0.33 \cdot 10^{-3}\text{m}^3$, $L = 2\text{cm} = 2 \cdot 10^{-2}\text{m}$, $S = 1\text{cm}^2 = 10^{-4}\text{m}^2$, $c = 343\text{m/s}$, donnant

$$f = \frac{1}{2\pi} c \left(\frac{S}{VL} \right)^{1/2} = 212\text{Hz}$$

ou

$$f = \frac{1}{2\pi} c \left(\frac{S}{V(L + \frac{1}{2}S^{1/2})} \right)^{1/2} = 190\text{Hz}$$

L'expérience **expérience** donne la note G_4 de fréquence $f = 202\text{Hz}$ en assez bon accord à ce modèle.

B.9 Systèmes dynamiques

Définition B.9.1. Un **système dynamique** à temps continue est une loi d'évolution pour un point $x(t) \in \mathbb{R}^n$ de la forme

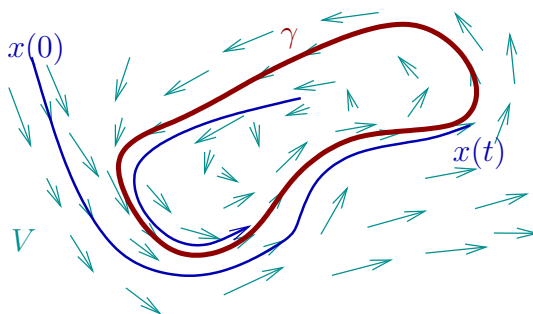
$$\frac{dx}{dt} = V(x(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{B.9.1})$$

où $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction au moins C^1 .

Interprétation géométrique : La fonction

$$V : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \rightarrow V(x) \end{cases}$$

est un champ de vecteur sur \mathbb{R}^n . Une solution $x(t)$ de l'équation (B.9.1) est une trajectoire, ou ligne de champ. Les vecteurs $V(x(t)) = \frac{dx}{dt}$ sont tangents à la trajectoire en tous points. Etant donné $x(0)$, il y a une unique solution $x(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ (ou du moins dans un voisinage de $t = 0$).



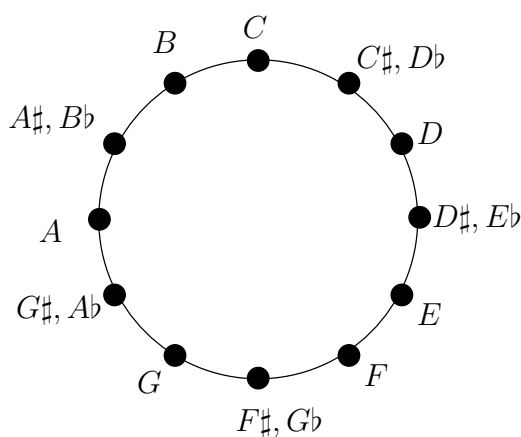
Annexe A

Notations musicales

Comme le tempérament égal est très utilisé, il y a beaucoup de conventions qui lui sont associées et on les rappelle ici.

A.1 Représentation des notes du tempérament égal

Cercle dodécaphonique : Les altérations **dièse** \sharp indique une note au dessus et **bémol** \flat indique une note en dessous. Modulo 12, on peut représenter les notes sur un cercle qui se lit dans le sens horaire.

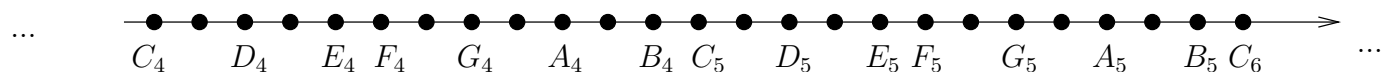


Un tour complet est une **octave**.

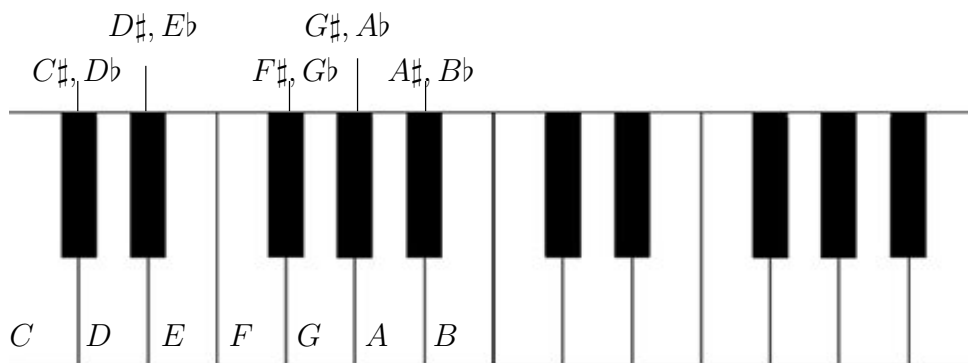
Noms français : En français on utilise les noms suivants

<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si

Les notes sur la droite \mathbb{Z} : Si on déroule le cercle on obtient la droite \mathbb{Z} des pitches du tempérament égal. On ajoute le numéro de l'octave aux symboles :



Les notes sur le clavier du piano :



C_5 est la touche « Do » près de la serrure du piano, appelé « do serrure ».

Les notes sur le manche de la guitare :

E_5	F_5	$F\sharp_5, G\flat_5$	G_5	$G\sharp_5, A\flat_5$	A_5	$A\sharp_5, B\flat_5$	B_5	C_6	$C\sharp_6, D\flat_6$	D_6	$D\sharp_6, E\flat_6$	E_6	F_6	$F\sharp_6, G\flat_6$
B_4	C_5	$C\sharp_5, D\flat_5$	D_5	$D\sharp_5, E\flat_5$	E_5	F_5	$F\sharp_5, G\flat_5$	G_5	$G\sharp_5, A\flat_5$	A_5	$A\sharp_5, B\flat_5$	B_5	C_6	$C\sharp_6, D\flat_6$
G_4	$G\sharp_4, A\flat_4$	A_4	$A\sharp_4, B\flat_4$	B_4	C_5	$C\sharp_5, D\flat_5$	D_5	$D\sharp_5, E\flat_5$	E_5	F_5	$F\sharp_5, G\flat_5$	G_5	$G\sharp_5, A\flat_5$	A_5
D_4	$D\sharp_4, E\flat_4$	E_4	F_4	$F\sharp_4, G\flat_4$	G_4	$G\sharp_4, A\flat_4$	A_4	$A\sharp_4, B\flat_4$	B_4	C_5	$C\sharp_5, D\flat_5$	D_5	$D\sharp_5, E\flat_5$	E_5
A_3	$A\sharp_3, B\flat_3$	B_3	C_4	$C\sharp_4, D\flat_4$	D_4	$D\sharp_4, E\flat_4$	E_4	F_4	$F\sharp_4, G\flat_4$	G_4	$G\sharp_4, A\flat_4$	A_4	$A\sharp_4, B\flat_4$	B_4
E_3	F_3	$F\sharp_3, G\flat_3$	G_3	$G\sharp_3, A\flat_3$	A_3	$A\sharp_3, B\flat_3$	B_3	C_4	$C\sharp_4, D\flat_4$	D_4	$D\sharp_4, E\flat_4$	E_4	F_4	$F\sharp_4, G\flat_4$
Fret :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	

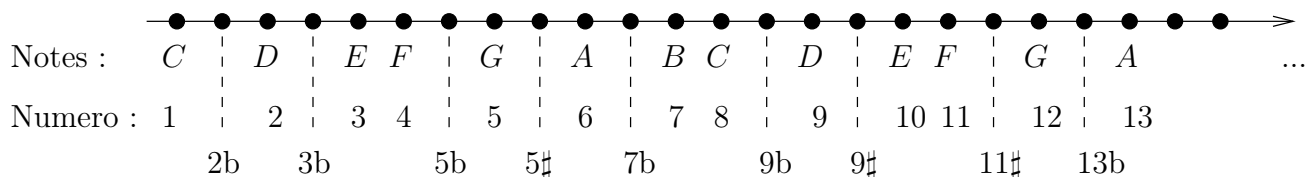
Les notes sur la portée musicale leur nom et leur pitch (code MIDI) :



A.2 Les intervalles

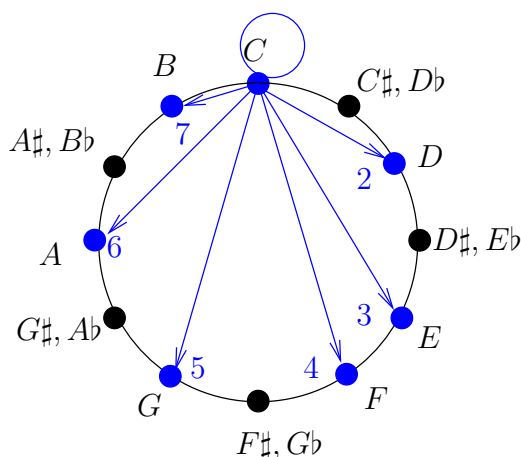
On prend l'exemple d'un intervalle entre C et une autre note supérieure. Les intervalles sont représentés par leur **degré** 1, 2, ... 7 correspondant aux intervalles de la gamme Majeure C, D, E, F, G, A, B .

Représentation des degrés des intervalles sur la droite \mathbb{Z} :



Remarque : dans cet exemple 5 \sharp est le $G\sharp$, c'est la même note (même fréquence) que 6 b qui est le $A\flat$.

Représentation des degrés de ces intervalles sur le cercle \mathbb{Z}_{12} :



Nom des intervalles : Ne pas confondre le degré et le nombre de demi-tons.

Degré	1	2 b	2	3 b
Demi-tons (pitch)	0	1	2	3
Nom	Unisson	Seconde mineure ou 1/2 ton	Seconde ou ton	Tierce mineure

Degré	3	4	5 b	5
Demi-tons (pitch)	4	5	6	7
Nom	Tierce majeure	quarte	quinte diminuée	quinte

Degré	5 \sharp	6	7 \flat	7
Demi-tons (pitch)	8	9	10	11
Nom	quinte augmentée	Sixte	Septième mineure	Septième Majeure

Degré	8	9 \flat	9	9 \sharp
Demi-tons (pitch)	12	13	14	15
Nom	Octave	Neuvième mineure	Neuvième Majeure	Neuvième augmentée

Degré	11	13
Demi-tons (pitch)	16	17
Nom	Onzième	Treizième Majeure

Index

E

équations du mouvement de Hamilton, 48

F

formule d'inversion de Fourier, 212

fréquence de résonance, 215

L

L'espace de Schwartz, 203

T

tempérament égal, 85

Théorie de Hamilton-Jacobi, 41

Théorie W.K.B., 41

transformée de Fourier, 211

Bibliographie

Arnold, V. 1974. *Equations différentielles ordinaires*.

Arnold, V.I. 1990. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*.

Benson, DJ. Music : a mathematical offering. [pdf version](#).

Castellengo, Michèle. 2015. *Ecoute musicale et acoustique : Avec 420 sons et leurs sonagrammes décryptés*. Eyrolles.

Dauzat, Pierre-Emmanuel, & Harari, Yuval Noah. 2015. *Sapiens : une brève histoire de l'humanité*. Albin Michel.

Dehaene, Stanislas. 2014. *Le Code de la conscience*. Odile Jacob.

Eargle, John. 2012. *The Microphone Book : From mono to stereo to surround-a guide to microphone design and application*. CRC Press.

Euler, L., Juskevic, A.P., & Taton, R. 1980. *Correspondance de Leonhard Euler Avec A. C. Clairaut, J. D'Alembert Et J. L. Lagrange*. *Commercium epistolicum*. Birkhäuser Basel.

Faure, F. 2010. *Cours de Mathématiques pour la physique. Niveau Master 1*. [link](#).

Faure, F. 2014. Introduction au chaos quantique. *In : journées X-UPS*. Éditions de l'école polytechnique [link](#).

Fletcher, Neville H, & Rossing, Thomas D. 2012. *The physics of musical instruments*. Springer Science & Business Media.

Hirschberg, Avraham, Pelorson, Xavier, & Gilbert, Joël. 1996. Aeroacoustics of Musical Instruments. *Meccanica*, **31**(04), 131–141.

Katznelson, Yitzhak. 2004. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge University Press.

Landau, Lev Davidovich, & Lifshitz, Evgenii Mikhailovich. 1987. *Fluid mechanics*.

Mallat, Stéphane. 1999. *A wavelet tour of signal processing*. Elsevier.

- Pham, F. 2003. Gammes naturelles et justesse expressive : l'exemple de la musique indienne. *PrÃ©publ. du laboratoire J.A. DieudonnÃ©*, 50.
- Pottier, Noelle. 2000. *Physique statistique hors d'Ã©quilibre*.
- Schnupp, Jan, Nelken, Israel, & King, Andrew. 2011. *Auditory neuroscience : Making sense of sound*. MIT Press, [webpage](#).
- Schroeder, Manfred, Rossing, Thomas D, Dunn, F, Hartmann, WM, Campbell, DM, & Fletcher, NH. 2007. Springer handbook of acoustics.
- Taylor, M. 1996. *Partial differential equations, Vol I*. Springer.

#script qui selectionne les chapitres pour faire des fichiers pdf individuels.

```
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 1-9 output cours_chap_table_matieres.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 11-58 output cours_chap_son.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 59-120 output cours_chap_signal.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 121-138 output cours_chap_perception.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 139-153 output cours_chap_instruments.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 154-177 output cours_chap_musique.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 178-end output cours_chap_annexes.pdf
```