
De l'acoustique à la musique

Frédéric Faure

Université Grenoble Alpes, France

frederic.faure@univ-grenoble-alpes.fr

pour Licence de Physique et Musicologie

(version : 14 mars 2024)

Introduction

Video de cette section.

Ce cours est destiné à des étudiants de musicologie et de physique, c'est à dire ayant des bases de musique, de physique et de mathématiques.

L'objectif du cours est de mettre en valeur les phénomènes physiques et mathématiques qui sont présents dans les pratiques musicales.

Dans la version électronique de ce document (pdf), les couleurs sur le texte sont souvent des liens vers des pages de **wikipedia** pour avoir plus d'informations ou vers d'autres documents ou vidéos.

Il existe une version de ce cours destinée aux étudiants de musicologie qui suit le même plan mais sans l'aspect scientifique, sans formule. Des concepts scientifiques incontournables, comme la décomposition de Fourier, y sont présentées de façon imagée. Ce document pourra être consulté en première lecture.

Chapitre 1 : Le son. Le son correspond aux vibrations de l'air dans un certain régime de fréquences et d'amplitudes. C'est le vecteur de l'information musicale. Dans ce chapitre on présente certaines des caractéristiques physiques essentielles du son qui interviennent en musique. On étudiera la propagation des ondes sonores dans l'espace. On étudiera comment un signal sonore (i.e. variations de pression) peut être capté et mesuré en un point donné de l'espace, par un microphone par exemple, pour en faire un signal.

Chapitre 2 : Les signaux sonores. Ce chapitre concerne l'étude des signaux sonores que l'on appelle la **théorie du signal**. On étudiera les signaux qui sont périodique en temps, qui ont de l'importance pour la suite et que l'on appellera "**note musicale**". Leur importance vient du fait qu'ils sont produits par des phénomènes périodiques comme dans la voix humaine, donc très présents en musique, mais aussi ils sont importants pour l'analyse mathématique, avec la transformée de Fourier par exemple.

Chapitre 3 : perception du son. La perception du son (par les humains) se fait grâce au **système auditif** qui comporte les oreilles mais aussi des circuits neuronaux spécifiques. L'analyse du son commence par l'oreille. Cette partie est bien étudiée et assez bien comprise : l'onde sonore est transmise dans la cochlée où il y a une membrane et des milliers de cils, chacun étant un résonateur sensible à une étroite plage de fréquence. Si un cil se met en vibration par résonance, il excite un **neurone**. L'information est ainsi transmise au

cerveau. Ensuite l'analyse est effectuée par le cerveau de façon inconsciente. Cette partie est encore très mal connue, voire **totalemment inconnue**. Par des expériences cognitives on peut cependant observer les caractéristiques du son que la conscience perçoit (i.e. le résultat des traitements inconscients). Pour les signaux périodiques, i.e. notes musicales, on a une perception particulière sous forme de **timbre**. Cela est mis en évidence par des expériences d'illusion auditives. De plus pour plusieurs notes musicales de fréquences différentes on ressent comme "consonant" des rapports entre ces fréquences qui sont des petits rationnels et qui correspondent aux intervalles de base de la musique (octaves, quintes, quarts, tierces etc). On parlera aussi de la perception du rythme.

Chapitre 4 : les instruments de musique. L'objectif d'un instrument de musique est de produire des "**notes musicales**" et du rythme. On adoptera une description des instruments d'après le phénomène physique de génération du son, en mettant en valeur différents cas :

- l'apparition d'**oscillations periodiques par relaxation** entretenue (ou **cycle limite**) chez certains instruments (violon, flûte, trompette etc..)
- ou la génération du son par une excitation initiale d'un objet "presque harmonique" (guitare, piano, xylophone), ou "non harmonique" (percussion).

Chapitre 5 : théories musicales. Ce chapitre concerne les **théories musicales**. Compte tenu des chapitres précédents, on va obtenir une description des sons et combinaisons de sons qui interviennent en musique à travers **différentes pratiques et cultures musicales**. Alors que les chapitres précédents sont plutôt "scientifiques" (i.e. décrivent des faits objectifs), ce chapitre décrit des choix culturels et artistiques. Il est souvent difficile de comprendre les origines d'un choix culturel.

Références et liens conseillées :

- Différents **Documents** liés au cours.
- Livre (**Benson, n.d.**, p.197), and its web site "**Music: a Mathematical Offering**",
- Livre **Schnupp et al. (2011)** "**{ } Auditory neuroscience: Making sense of sound**" and its web site **Auditoryneuroscience web site**
- Livre **Handbook of Acoustic**, (**Schroeder et al., 2007**).
- **Exposé "Voix mathématiques et musique"** du 11 septembre 2015 pour la journée de rentrée de l'institut Fourier.
- Page de **wikipedia sur l'acoustique musicale**

Table des matières

1	Le son	11
1.1	Les équations de Euler (non linéaires)	12
1.1.1	Ordre de grandeurs du modèle de gaz	12
1.1.2	Emergence d'un comportement collectif à l'échelle mésoscopique : le fluide.	13
1.1.3	Gaz à l'équilibre. Equation des gaz parfaits.	13
1.1.4	Gaz à l'équilibre local. Equation d'Euler. Turbulence.	13
1.1.5	Remarques sur l'historique des équations de la mécanique des fluides	15
1.2	Des équations de Navier-Stokes à l'équation d'onde	16
1.2.1	Gaz proche du repos. Ondes sonores.	16
1.2.2	Champ de vitesse et potentiel des vitesses	20
1.2.3	Conservation de l'énergie et densité d'énergie	21
1.3	Solutions particulières de l'équation des ondes	22
1.3.1	Variantes de l'équation d'onde	22
1.3.2	Trajectoire des ondes et importance en acoustique musicale	23
1.3.3	Equation des ondes $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$ sur \mathbb{R} (1 dim)	26
1.3.4	Equation $\partial_t^2 v - c^2 \partial_x^2 v = 0$ sur le segment $[0, L]$	30
1.3.5	Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur \mathbb{R}^3	34
1.3.6	Mesure de l'intensité en décibels	36
1.3.7	Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur le rectangle $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$	37
1.3.8	Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur le disque $\Omega = \mathbb{D}(R)$	39
1.3.9	Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur un domaine compact $\Omega \subset \mathbb{R}^2$	39
1.3.10	Equation avec amortissement $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p + a \partial_t p = 0$ sur $\Omega = \mathbb{R}^3$	40
1.4	Résolution numérique de l'équation d'ondes sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ compact	41
1.5	Analyse micro-locale (semi-classique) de l'équation des ondes	41
1.5.1	De l'équation des ondes du 2nd ordre en t à l'équation de Schrödinger du 1er ordre	42
1.5.2	L'équation de Schrödinger	44
1.5.3	Limite semi-classique de l'équation de Schrödinger	46
1.5.4	Propriétés générales	49
1.5.5	Exemples	50
1.5.6	Formule de Weyl semi-classique	55

1.6	Micros, enregistrements et haut parleurs	57
1.6.1	Schéma de fonctionnement du microphone à condensateur	57
2	Analyse des signaux sonores	59
2.1	Définitions d'un signal et échantillonnage	59
2.1.1	Signal sonore	59
2.1.2	Échantillonnage d'un signal	60
2.1.3	Mesure de l'intensité en décibels	62
2.1.4	Battements	64
2.2	Sonogramme, transformée par ondelette, transformée de Fourier	66
2.2.1	Signaux élémentaires : notes de musique, paquets d'ondes Gaussiens (ou ondelettes)	66
2.2.2	Sonogramme, transformée de Fourier fenêtrée ou transformée par ondelette	69
2.2.3	Transformée de Fourier d'un signal	73
2.3	Signaux périodiques, fréquences, notes musicales et pitch	74
2.3.1	Signaux périodiques, séries de Fourier	74
2.3.2	Pitch d'un signal périodique	82
2.3.3	Comparaison des harmoniques avec le tempérament égal	86
2.3.4	Exemple du chant diphonique	87
2.3.5	Intervalles justes	90
2.4	Le tonnetz et quelques tempéraments justes	93
2.4.1	Décomposition des intervalles justes en intervalles de base	93
2.4.2	Le tonnetz 2, 3, 5	94
2.4.3	Le tonnetz 2, 3, 5, 7, tonnetz général et recherche musicale	102
2.5	Échantillonnage d'un sinus, effet de repliement (ou effet stroboscopique), Aliasing	104
2.5.1	Rappels sur l'effet stroboscopique	104
2.5.2	Effet stroboscopique sur une fonction sinus ou cosinus échantillonnée	105
2.5.3	Effet stroboscopique (aliasing) sur un signal périodique quelconque	107
2.6	Traitements particuliers du son musical	108
2.6.1	Modification d'un son périodique	108
2.6.2	Détection du pitch d'un signal (presque) périodique	108
2.6.3	Filtres	111
3	Perception du son	123
3.1	Description du système auditif	124
3.1.1	Le pavillon de l'oreille	126
3.1.2	Cils	126
3.1.3	Physiologie du cerveau	127
3.2	La voix et les signaux périodiques	128
3.2.1	Observations générales sur la voix	129
3.3	Du signal sonore à la perception consciente	130

3.3.1	Définition de la perception sonore	130
3.3.2	Perception du temps	132
3.3.3	Perception de l'intensité	132
3.3.4	Perception du pitch des notes (fréquences)	134
3.3.5	Perception et principe d'incertitude en temps-fréquence	134
3.3.6	Non perception de la phase	135
3.3.7	Perception du timbre	136
3.4	Perceptions des intervalles justes et accords justes	140
3.4.1	Perception des intervalles justes	140
3.4.2	Perception des accords justes	140
4	Les instruments de musique	141
4.1	Introduction	141
4.1.1	Classement de Sach-Hornbostel 1914	141
4.2	Instruments harmoniques par cycles limites	142
4.2.1	Introduction	142
4.2.2	Oscillateurs de relaxation ou par cycle limite	145
4.2.3	Exemples d'instruments de musique	148
4.3	Instruments harmoniques par résonance	152
4.3.1	Cordes excitées (pincées ou frappées)	152
4.3.2	Cloches	154
4.3.3	Xylophones	155
4.4	Instruments percussifs	155
4.5	Musique assistée par ordinateur (MAO)	155
4.5.1	Traitement audio	155
4.5.2	Messages MIDI	155
5	Théories et pratiques de la musique	157
5.1	Introduction	157
5.1.1	Aspects culturels de la musique	157
5.1.2	La musique chez d'autres espèces ?	157
5.1.3	Aspects commerciaux de la musique	157
5.2	Harmoniques et intervalles justes en musique	157
5.2.1	Dissonance d'un intervalle juste	158
5.2.2	Fractale de Farey des nombres rationnels et intervalles justes	158
5.3	Accords justes	160
5.3.1	Chambre, basse virtuelle, sifflet et profondeur d'un accord juste	163
5.4	Les intervalles et accords justes dans les pratiques musicales	165
5.4.1	Quelques gammes et modes	167
5.5	Les intervalles et accords justes dans les théories musicales	169
5.5.1	Enchaînement d'accords	172
5.5.2	La théorie des tempéraments	172
5.6	Conventions d'écriture de la musique	175

5.7	Analyse harmonique en musique classique	175
5.8	Analyse harmonique en jazz	175
5.9	Autres théories	175
5.9.1	Musique indienne	175
5.9.2	Musique dodécaphonique, sérielle	178
5.10	Rythmes et poly-rythmes	179
A	Logiciels pour l'acoustique musicale	181
A.1	Pour l'audio	181
A.2	Audacity	181
A.3	Autres	181
B	Notions de base utiles en mathématiques	183
B.1	Les fractions et équations du premier degré	183
B.1.1	Additions et soustractions	183
B.1.2	Multiplication et divisions	183
B.2	Exposants, logarithme et décibels	184
B.3	Le cercle, sinus et décomposition de Fourier	186
B.3.1	Phase, sinus, cosinus	186
B.3.2	Mouvement circulaire	187
B.3.3	Addition de mouvements circulaires, épicycles et décomposition de Fourier	188
B.3.4	Cas particulier d'un mouvement périodique (série de Fourier)	191
B.4	Codage des nombres en base 2 (binaire) et base 16 (hexadécimal)	192
B.4.1	La base 10 (décimale)	192
B.4.2	La base 2 (binaire)	192
B.4.3	Le complément à 2	193
B.4.4	La base 16 (hexadécimale)	193
C	Formulaire	195
C.1	Arithmétique	195
C.1.1	Théorème fondamentale de l'arithmétique	195
C.1.2	Représentations géométriques des fractions irréductibles	195
C.1.3	Réseau \mathbb{Z}^P et le réseau tonnetz	199
C.2	Rappels d'algèbre linéaire	199
C.2.1	Vecteurs et produit scalaire	199
C.2.2	Interprétation et utilité du produit scalaire	201
C.2.3	Décomposition dans une base orthogonale	202
C.2.4	Décomposition dans une base non orthogonale	203
C.3	Analyse de fonctions	204
C.3.1	Fonctions régulières de Schwartz	204
C.3.2	Distributions	205
C.3.3	Produit scalaire entre les fonctions	205

C.3.4	Bases orthonormées	205
C.3.5	Opérateurs auto-adjoints	205
C.4	Transformée de Fourier sur \mathbb{R}	206
C.4.1	Transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse	206
C.4.2	Transformée de Fourier d'un signal échantillonné	207
C.4.3	Série de Fourier d'un signal périodique	209
C.4.4	Transformée de Fourier discrète	209
C.5	Transformée de Fourier sur \mathbb{R}^n	212
C.6	Transformée par paquets d'ondes	213
C.6.1	Paquets d'ondes Gaussiens	213
C.6.2	Transformée par paquets d'ondes	214
C.7	Modèle élémentaire du résonateur linéaire forcé	215
C.7.1	Résolution générale	215
C.7.2	Cas d'un signal périodique $p(t) = p(0) e^{i\omega t}$	216
C.8	Résonateur de Helmholtz	217
C.9	Systèmes dynamiques	219
D	Notations musicales	221
D.1	Représentation des notes du tempérament égal	221
D.2	Les intervalles	223

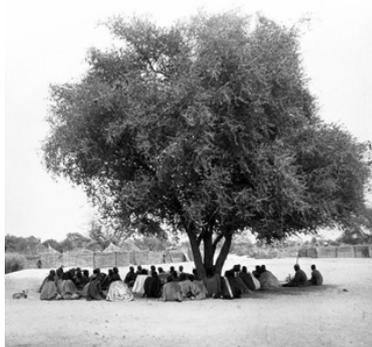
Chapitre 1

Le son

[Video](#) de cette section.

Le son est le vecteur de l'information musicale. Dans ce chapitre on présente certaines des caractéristiques physiques essentielles du son qui interviennent en musique. On étudiera la propagation des ondes sonores dans l'espace.

Le son est une onde qui se propage dans la matière. Ce peut être dans l'air (gaz), dans l'eau ou dans les solides ou toute autre forme de matière. Le son correspond aux vibrations de cette matière dans un certain régime de fréquences et d'amplitudes. Le son est très utilisé par les organismes vivants pour communiquer, en particulier parmi l'espèce humaine dans l'air, avec la voix et la musique, mais aussi par les poissons et de nombreux animaux dans l'eau, voir [video de L. Ballesta](#).



Dans ce cours on s'intéressera essentiellement aux ondes sonores dans l'air à pression et température ambiante, ce qui est la situation courante en musique.

L'[air](#) est un [fluide](#) gazeux légèrement visqueux et son comportement est régi par l'équation de la dynamique de Newton qui s'exprime par les [équations de Navier-Stokes](#). Ces équations sont simples mais les solutions qui en résulte, i.e. le comportement du gaz, peuvent être parfois très complexe, on parle alors de [turbulence](#). A l'heure actuelle on ne sait pratiquement pas résoudre les équations de Navier Stokes sauf dans des cas limites où le comportement est simple. La propagation du son sous forme ondulatoire fait partie des

ces cas simples que l'on va décrire. Par contre la production des tourbillons à l'embouchure d'une flûte par exemple fait partie des cas complexes pas bien compris.

1.1 Les équations de Euler (non linéaires)

Video de cette section.

Références : [Schroeder et al. \(2007, chap.3\)](#), [Landau & Lifshitz \(1987, chap VIII\)](#).

L'air est un fluide essentiellement constitué des molécules diatomiques N_2 (di-azote) pour 79% et de O_2 (di-oxygène) pour 21% et considéré ici comme un "gaz parfait", c'est à dire que les particules (molécules) qui le constituent sont libres et indépendantes mais subissent des chocs entre elles qui redistribuent leur énergie en conservant l'énergie totale. On rappelle que $N_A = 6.10^{23}$ est le **nombre d'Avogadro** qui est le nombre d'objets dans une mole (autrement dit c'est l'ordre de grandeur du nombre de molécules dans un objet de taille humaine) et que la masse d'une mole de **nucléons** (i.e. neutron ou proton) est de 1 gramme. D'après la composition en nucléons des noyaux atomiques, l'atome N contient 7 protons et 7 neutrons, l'atome O contient 8 protons et 8 neutrons, donc on a les **masses molaires** $M_{N_2} = 2 \times (7 + 7) g/mole$, $M_{O_2} = 2 \times (8 + 8) g/mole$ et donc la masse molaire moyenne des molécules de l'air est

$$M = 0.79 M_{N_2} + 0.21 M_{O_2} = 29g/mole$$

1.1.1 Ordre de grandeurs du modèle de gaz

- La taille d'une molécule est de l'ordre de $R = 10^{-10}m$.
- La distance moyenne entre les molécules de l'air est $d = 35 R$ (car la densité est $\frac{N}{V} = 2.5 \cdot 10^{25} \text{ molécules}/m^3$)
- La vitesse moyenne d'une molécule de di-oxygène est

$$v = 280 m/s \tag{1.1.1}$$

(car $v = \left(\frac{RT}{M_{O_2}}\right)^{1/2}$ avec $R = 8.31J/K$ $T = 273K$, $M_{O_2} = 2 \times 16g/mole$)

- La distance moyenne parcourue entre deux chocs est $l = 3 \cdot 10^{-7}m = 3000 R$, appelée libre parcourt moyen.
- Le nombre moyen de collisions pour une molécule est $n_{col.} = \frac{v}{l} = 10^9$ collisions/seconde.

Remarque 1.1.1. Si on zoome par la pensée un cube d'air de $L = 1cm$ de côté, de sorte à transformer la taille d'une molécule $R = 10^{-10}m$ ci-dessus en taille macroscopique : $R' = 1cm$, le facteur de zoom est $\frac{R'}{R} = \frac{10^{-2}}{10^{-10}} = 10^8$ et voici les valeurs correspondantes :

Tailles microscopiques :	$R = 10^{-10}m$	$d = 35R$	$L = 1cm$	$l = 3000 R$
Tailles macroscopique après un zoom d'un facteur $\times 10^8$	$R' = 1cm$	$d' = 35cm$	$L' = 10^8 cm = 1000km$	$l' = 3000cm = 30m$

Ainsi le cube à la taille $L' = 1000km$ de la France!

1.1.2 Emergence d'un comportement collectif à l'échelle mésoscopique : le fluide.

L'échelle des atomes et molécules s'appelle l'échelle **microscopique**. L'échelle humaine s'appelle l'échelle **macroscopique**. Il y a une échelle intermédiaire appelée **échelle mésoscopique** à partir de laquelle laquelle l'air est un **fluide**, c'est à dire que l'on ne perçoit que le comportement collectif des molécule et non plus individuel. A cette échelle la population de molécules a un comportement collectif chaotique appelé **état d'équilibre**.

- Par exemple le fluide peut être au repos (pas de vent) même si les molécules sont en mouvement permanent.
- Pour l'air, l'échelle mésoscopique est précisément à partir de $D = 10^3 d = 3 \cdot 10^{-6} m = 3 \mu m > l$, de sorte qu'un cube de côté D contient 10^9 molécules qui est grand et D est plus grand que le libre parcourt moyen l . (Dans la remarque 1.1.1 ci-dessus, après le zoom, cela donne $D' = 10^3 d' = 350m$)
- Par exemple un gaz et un liquide sont des fluides.
- L'état d'équilibre local, résultat de ce comportement collectif est **caractérisé par des grandeurs locales** (bien connues) que sont :
 - la **température** T , qui correspond à la vitesse moyenne des molécules
 - la **pression** P , qui est inversement proportionnelle au volume libre autour de chaque molécule. (d'après la loi des **gaz parfaits** $PV = nRT$)

1.1.3 Gaz à l'équilibre. Equation des gaz parfaits.

On va supposer un gaz parfait à l'équilibre, avec une **température** T_0 (en K) avec une **pression** constante et uniforme p_0 (en $Pa = N/m^2$) et une densité constante et uniforme ρ_0 (en kg/m^3). On introduit la constante de Boltzmann $k = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$ et on pose

$$R = N_A k = 8.31 \frac{J}{K}.$$

En physique statistique on démontre la **loi des gaz parfait**¹

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{RT_0}{M}. \quad (1.1.2)$$

Exemple 1.1.2. Avec une température $T_0 = 293K = 20C^\circ$, une pression $p_0 = 10^5 Pa$, alors la densité de l'air est $\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0} = 1.19 kg/m^3$.

1.1.4 Gaz à l'équilibre local. Equation d'Euler. Turbulence.

On notera $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un point de l'espace et $t \in \mathbb{R}$ le temps. Un fluide est un ensemble de molécules en interaction et on suppose un équilibre local, c'est à dire

1. L'écriture plus habituelle est $p_0 V = nRT_0$. Avec la masse volumique $\rho_0 = \frac{m}{V}$ est la masse molaire $M = \frac{m}{n}$ on obtient $\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{V n R T_0}{m V} = \frac{R T_0}{M}$.

l'existence d'un champ de pression $\mathbf{p}(x, t)$, d'un champ de densité $\rho(x, t)$ et d'un champ de vitesse $v(x, t)$. Le champ de vitesse détermine des trajectoires du fluide $x(t)$ par l'équation $\frac{dx}{dt} = v$. On notera l'accélération du fluide par

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}v(x(t), t).$$

On rappelle que le **gradient** est $\text{grad}(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_3} \right)$.

Proposition 1.1.3. *Le fluide subit des forces de pression internes, la force résultante est opposée au gradient de pression et l'équation de la dynamique de Newton pour le fluide par unité de volume prend donc la forme*

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad}(\mathbf{p}) \quad (1.1.3)$$

appelée **équation d'Euler**.

Malgré son apparence simple, c'est une équation non linéaire que l'on ne sait pas résoudre en général et pouvant donner des solutions très complexes (turbulence). On peut rajouter une force de cisaillement (dissipation) donnant l'**équation de Navier-Stokes**.

Démonstration. On considère un petit cube élémentaire de côté $[x_j, x_j + dx_j]$ selon chaque axe $j = 1, 2, 3$. La masse contenue est $dm = \rho d^3x$ avec $d^3x = dx_1 dx_2 dx_3$. La force de pression exercée sur la face x_1 est $F_1(x_1) = \mathbf{p}(x_1) dx_2 dx_3$. La force de pression exercée sur la face $x_1 + dx_1$ est $F_1(x_1 + dx_1) = -\mathbf{p}(x_1 + dx_1) dx_2 dx_3$. On écrit le développement de Taylor à l'ordre 1 : $\mathbf{p}(x_1 + dx_1) = \mathbf{p}(x_1) + dx_1 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} + O(dx_1^2)$. Ainsi la force résultante selon x_1 est

$$\begin{aligned} F_1^{(\text{tot})} &= F_1(x_1) + F_1(x_1 + dx_1) \\ &= \mathbf{p}(x_1) dx_2 dx_3 - \left(\mathbf{p}(x_1) + dx_1 \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \right) dx_2 dx_3 \\ &= -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} d^3x \end{aligned}$$

L'équation de Newton selon l'axe x_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} (dm) \frac{dv_1}{dt} &= F_1^{(\text{tot})} \\ \Leftrightarrow \rho d^3x \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} d^3x \\ \Leftrightarrow \rho \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Et de même selon les axes x_2, x_3 . On a obtenu (1.1.3). □

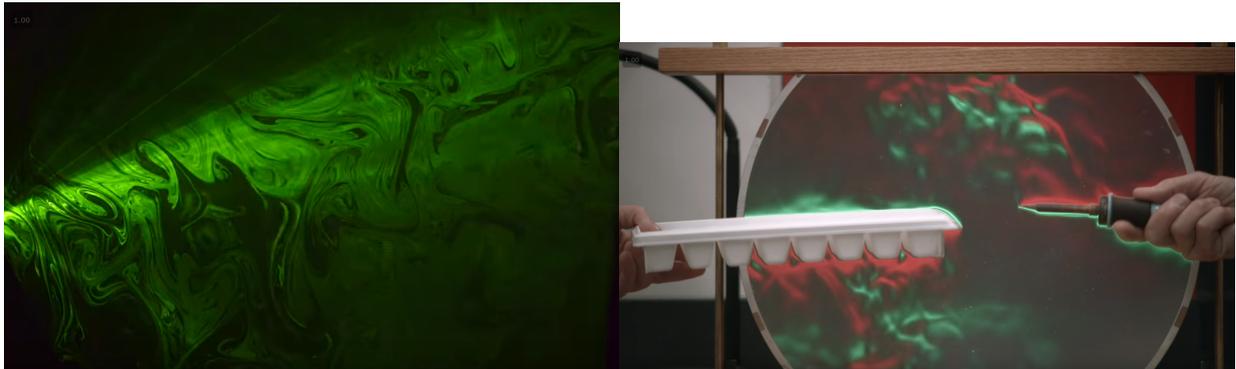


FIGURE 1.1.1 – (1) Turbulence de l'air éclairé par un faisceau laser. (2) Turbulence observée par l'effet Schlieren.

Vidéos de turbulence et le son :

- Voir cette [vidéo d'expérience de turbulence](#).
- Cette vidéo qui explique [Schlieren flow visualization](#). Cette vidéo qui montre des [ondes sonores](#), et celle ci montrant des balles de polystyrène qui surfent et [lévitent sur les ondes sonores](#).
- Vidéo du [cnrs sur la visualisation du son](#).

On supposera de plus que les variations du fluides sont [adiabatiques](#), c'est à dire que l'équilibre thermodynamique local est toujours présent, l'[entropie](#) est conservée. Cela implique la [formule de Laplace](#) :

$$p = C\rho^\gamma \quad (1.1.4)$$

avec une constante C et l'[indice adiabatique](#)

$$\gamma = 1 + \frac{2}{3+2} = \frac{7}{5}$$

où le chiffre **3** correspond aux trois dimension de l'espace ordinaire \mathbb{R}^3 , i.e. les 3 degrés de liberté de translation de chaque molécule, le chiffre **2** correspond aux deux dimension de la sphère S^2 , i.e. les 2 degrés de liberté de rotation de l'axe des molécules diatomiques. Si le gaz est constitué de molécules plus complexe, il y a 3 degrés de liberté de [rotation](#) (car $\dim\text{SO}(3) = 3$) et donc $\gamma = 1 + \frac{2}{3+3} = \frac{4}{3}$. Si le gaz est monoatomique, sans rotation interne des molécules, alors $\gamma = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

1.1.5 Remarques sur l'historique des équations de la mécanique des fluides

Réf : [Euler et al. \(1980\)](#) p27.

Au XVIIIème siècle, il était crucial d'étudier la mécanique des fluides. En 1748, Euler organise avec l'académie de Berlin un prix pour une étude de "la résistance qu'éprouvent les corps solides dans les fluides". D'Alembert a rendu un mémoire d'une grande importance

car il a été le premier à introduire les opérateurs à dérivées partielles. Il a proposé une équation, où apparaissait correctement le terme de transport, mais le terme de force de pression était incorrect. Euler a refusé ce manuscrit, mais a étudié le problème par lui-même. Il a rédigé un mémoire en 1757 avec les “équations de Euler des fluides”. En 1752, le prix a été décerné à un “étudiant de Euler” Jacob Adami. Le terme de forces de cisaillement ont été introduit par [Henri Navier 1823 et George Gabriel Stokes](#).

En 2000, il a été proposé un [prix](#) de 10^6 \$ pour toute personne qui [montrerait que les équations de Navier Stokes](#) en dimension 3, ont un comportement régulier et ne divergent pas en temps fini (ou le contraire). En janvier 2014, Mukhtarbay Otelbayev, (mathématicien kazakh) a écrit un article en russe prétendant répondre à cette question. Cela a beaucoup intéressé la communauté internationale. Il y avait une erreur. En 2014, Terence Tao a montré une [explosion des solutions](#) pour un modèle très proche. Le problème est toujours ouvert et beaucoup de chercheurs sont actifs sur cette question.

- Vidéos sur la visualisation des mouvements de l’air et des ondes sonores :
 - [Turbulence, vortex rings](#)
 - [What Does Sound Look Like?](#)
 - [Visualizing Ultrasound with Schlieren Optics Part I](#)
 - [Visualizing Ultrasound with Schlieren Optics Part III](#)

Lectures supplémentaires :

- Pour des explications de la loi des gaz parfaits et autres notions de physique statistique, voir ce cours de [physique statistique](#).

1.2 Des équations de Navier-Stokes à l’équation d’onde

1.2.1 Gaz proche du repos. Ondes sonores.

[Video de cette section.](#)

La proposition suivante est le résultat principal de cette section qui montre que lorsque le gaz est proche de l’équilibre global, alors les petites fluctuations de pression $p(x, t)$ oscillent et se propagent selon “l’équation des ondes”. Pour simplifier on notera une dérivée partielle $\partial_x f := \frac{\partial f}{\partial x}$. On notera Δ l’opérateur [Laplacien](#) défini par

$$\Delta p := \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j}^2 p = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(p))$$

Proposition 1.2.1. *On suppose que le fluide est soumis aux équations de mouvement de Euler $\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad}(\mathbf{p})$. On suppose des petites fluctuations de la pression p et de la densité ρ autour de l'état d'équilibre constant et uniforme, i.e.*

$$\mathbf{p}(x, t) = p_0 + p(x, t)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0 + \rho(x, t)$$

avec $|p| \ll p_0$ et $|\rho| \ll \rho_0$. Alors au premier ordre, p est solution de **l'équation des ondes**

$$\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0 \quad (1.2.1)$$

avec la **vitesse du son**

$$c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} \stackrel{(1.1.2)}{=} \left(\frac{\gamma R T_0}{M} \right)^{1/2},$$

et on a la relation suivante entre p, ρ :

$$\frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (1.2.2)$$



FIGURE 1.2.1 – Ondes sonores (ultra sons) observées par effet Schlieren et par éclairage stroboscopique. Les ondes sont émises à gauche et se réfléchissent sur la plaque. On observe des figures d'interférence.

Preuve de la proposition 1.2.1 [Video de cette section.](#)

Partons de l'équation de Euler (1.1.3) :

$$\boldsymbol{\rho} \frac{dv}{dt} = -\text{grad}(p) \quad (1.2.3)$$

où $v = \frac{dx}{dt}$ et

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}v(x(t), t) = \sum_{j=1}^3 (\partial_{x_j} v) (\partial_t x_j) + \partial_t v = \sum_{j=1}^3 (\partial_{x_j} v) v_j + \partial_t v$$

La fonction densité $\boldsymbol{\rho}(x, t)$ satisfait l'équation de conservation de la masse :

$$\partial_t \boldsymbol{\rho} + \text{div}(\boldsymbol{\rho}v) = 0 \quad (1.2.4)$$

Preuve de (1.2.4). Notons le **flot** $\phi^t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, c'est à dire $\phi^t(x) = x(t)$, $\frac{d\phi^t}{dt} = v$. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine initial quelconque et $\Omega(t) = \phi^t(\Omega)$ son évolution, alors on stipule que la masse M contenue dans $\Omega(t)$ est constante. On note χ_Ω la **fonction caractéristique** du domaine Ω . Donc $\chi_{\Omega(t)} = \chi_\Omega \circ \phi^{-t}$. On a

$$M = \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\rho} dx = \int_{\mathbb{R}^3} (\chi_\Omega \circ \phi^{-t}) \boldsymbol{\rho} dx$$

donc avec une **intégration par parties**

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{dM}{dt} \right)_{t=0} = \int \left(\sum_j (\partial_{x_j} \chi_\Omega) (-v_j) \right) \boldsymbol{\rho} + (\chi_\Omega \circ \phi^{-t}) (\partial_t \boldsymbol{\rho}) dx \\ &\stackrel{\text{(par parties)}}{=} \int \chi_\Omega \left(\sum_j (\partial_{x_j} (v_j \boldsymbol{\rho})) + \partial_t \boldsymbol{\rho} \right) dx = \int \chi_\Omega (\text{div}(v\boldsymbol{\rho}) + \partial_t \boldsymbol{\rho}) dx \end{aligned}$$

Si cela est vrai pour tout domaine Ω alors nécessairement $\text{div}(v\boldsymbol{\rho}) + \partial_t \boldsymbol{\rho} = 0$. \square

Supposons maintenant des petites fluctuations

$$\boldsymbol{p}(x, t) = p_0 + p(x, t)$$

$$\boldsymbol{\rho}(x, t) = \rho_0 + \rho(x, t)$$

avec $|p| \ll p_0$ et $|\rho| \ll \rho_0$ et $|(\partial_{x_j} v) v_j| \ll |\partial_t v|$. Alors au premier ordre, (1.2.3) donne

$$\rho_0 \partial_t v = -\text{grad}(p) \quad (1.2.5)$$

et (1.2.4) donne

$$\partial_t \rho + \rho_0 \text{div}(v) = 0. \quad (1.2.6)$$

On déduit

$$\rho_0 \partial_t \text{div}(v) \stackrel{(1.2.5)}{=} -\text{div}(\text{grad}(p)) = -\Delta p,$$

$$\partial_t^2 \rho + \rho_0 \partial_t \operatorname{div}(v) \stackrel{(1.2.6)}{=} 0,$$

et donc

$$\partial_t^2 \rho = \Delta p. \quad (1.2.7)$$

D'après la formule de Laplace (1.1.4) d'un gaz parfait adiabatique :

$$p = C \rho^\gamma \Leftrightarrow \ln p = \ln C + \gamma \ln \rho \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

et donc au premier ordre pour les petites fluctuations p, ρ :

$$\frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0}$$

On a obtenu (1.2.2). Finalement, on obtient l'équation d'onde pour p :

$$\partial_t^2 p \stackrel{(1.2.7)}{=} \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right) \Delta p = c^2 \Delta p$$

avec la constante $c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2}$ appelée vitesse du son.

1.2.1.1 Remarques

- En étudiant les solutions de l'équation d'onde, on verra en (1.5.12) pourquoi c s'appelle la vitesse du son.
- Avec les valeurs p_0, T_0 de l'exemple 1.1.2, on obtient une vitesse du son

$$c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma R T_0}{M} \right)^{1/2} = \left(\frac{\frac{7}{5} \times 8.31 \times 293}{29 \times 10^{-3}} \right)^{1/2} = 343 \text{ m/s}. \quad (1.2.8)$$

- L'équation de départ de Euler est non linéaire et est impossible à résoudre en général, mais grâce à notre hypothèse d'être proche de l'état d'équilibre, on a obtenu **l'équation des ondes qui est linéaire** et donc plus facilement **soluble**. Ce sera le sujet des sections suivantes.
- Comme $\gamma = \frac{7}{5}$, $\gamma = \frac{4}{3}$ ou $\gamma = \frac{5}{3}$ dépend de la nature diatomique, polyatomique ou monoatomique des molécules, la vitesse du son c en dépend aussi.
- D'après (1.2.2), ρ est proportionnel à p . Donc il vérifie aussi l'équation des ondes $\partial_t^2 \rho - c^2 \Delta \rho = 0$.
- Ainsi le son parcourt 34 cm en 1 ms ou 17 m en 50 ms qui est le temps de réaction d'un neurone et donc la limite de la **latence en musique**. Pour cette raison, il ne faut pas que les musiciens qui jouent ensemble soient trop éloignés les uns des autres, sinon le retard du son est perceptible.
- Il a été observé récemment (Pour la science juillet 2021) que à la naissance, les chauves souris connaissent précisément la vitesse du son, de façon innée. Des papillons de nuit "**arctiinae**" captent et émettent (pour brouiller) les sons radars des chauves souris (Ratcliffe and Fullard, 2005).

Exemple 1.2.2. La masse molaire de l'Hélium est $M = 4g/mol$ et c'est un gaz monoatomique. On déduit que la vitesse du son dans l'Hélium est

$$c = \left(\frac{\gamma RT_0}{M} \right)^{1/2} = \left(\frac{\frac{5}{3} \times 8.31 \times 273}{4 \times 10^{-3}} \right)^{1/2} = 972m/s.$$

Exemple 1.2.3. On a $c = \left(\frac{\gamma RT}{M} \right)^{1/2}$ donc $\ln c = \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma R}{M} + \frac{1}{2} \ln T$ et $\frac{dc}{dT} = \frac{1}{2T}$. Si la température augmente de $\delta T = 20C^\circ$ alors la vitesse du son augmente de $\frac{\delta c}{c} = \frac{\delta T}{2T} = 3\%$ soit $\delta c = 0.03 \times 343m/s = 10m/s$.

1.2.2 Champ de vitesse et potentiel des vitesses

[video de cette section.](#)

Pour compléter la proposition 1.2.1, on a les résultats suivants.

Proposition 1.2.4. Le *champ de vitesse* du gaz $v(x, t)$ (en m/s) est donné par

$$v = \text{grad}(\phi) \tag{1.2.9}$$

avec une fonction $\phi(x, t)$ appelé *potentiel des vitesses* relié aux fluctuations de pression p par

$$p = -\rho_0 \partial_t \phi. \tag{1.2.10}$$

Remarque 1.2.5. Par intégration, ϕ et v vérifient aussi l'équation des ondes $\partial_t^2 \phi - c^2 \Delta \phi = 0$ et $\partial_t^2 v - c^2 \Delta v = 0$ comme (1.2.1). Comme $v(x, t) \in \mathbb{R}^3$, cette dernière équation a trois composantes.

Démonstration. L'équation (1.2.5) et la relation $\text{rot grad} = 0$ donne

$$\rho_0 \partial_t \text{rot}(v) = 0$$

et donc si $\text{rot}(v) = 0$ à l'instant initial, ce sera vrai à tout instant et d'après le **Lemme de Poincaré**, $v = \text{grad}(\phi)$ pour une certaine fonction $\phi(x, t)$, définie à une constante près. Alors (1.2.5) donne

$$\rho_0 \partial_t \text{grad}(\phi) = -\text{grad}(p)$$

soit, en choisissant correctement la constante de ϕ ,

$$p = -\rho_0 \partial_t \phi.$$

□

1.2.3 Conservation de l'énergie et densité d'énergie

[Video de cette section](#)

Pour compléter la proposition 1.2.1, on a les résultats suivants.

Proposition 1.2.6. *On a la conservation de l'énergie*

$$\partial_t \epsilon + \operatorname{div}(j) = 0 \quad (1.2.11)$$

avec la **densité de courant d'énergie** (en $\frac{W}{m^2}$) qui est

$$j = pv \quad (1.2.12)$$

et la **densité d'énergie** (en J/m^3) qui est

$$\epsilon = \frac{1}{2} \rho_0 |v|^2 + \frac{c^2 \rho^2}{2\rho_0}.$$

On rappelle (1.2.11) signifie que dans tout domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ fixé, la quantité d'énergie contenue $E_\Omega(t) := \int_\Omega \epsilon d^3x$ et le flux sortant $J_\Omega(t) = \int_{\partial\Omega} j d^2s$ (sur le bord $\partial\Omega$ du domaine) se compensent :

$$\frac{dE_\Omega}{dt} + J_\Omega(t) = 0. \quad (1.2.13)$$

Démonstration. Référence : [Landau & Lifshitz \(1987, p.256\)](#). La pression p est une force par unité de surface d'unité $\text{Pa} = \frac{N}{m^2}$ donc $j = pv$ est d'unité $\text{Pa} \frac{m}{s} = \frac{N}{m \cdot s} = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{W}{m^2}$. C'est bien une densité de flux d'énergie. On souhaite trouver l'expression de la densité d'énergie ϵ en J/m^3 qui vérifie la loi de conservation

$$\partial_t \epsilon + \operatorname{div}(j) = 0.$$

Vérifions que $\epsilon = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{c^2 \rho^2}{2\rho_0}$. On a

$$\begin{aligned} \partial_t \epsilon &= \rho_0 v \partial_t v + \gamma \frac{p_0 \rho}{\rho_0^2} \partial_t \rho \\ &\stackrel{(1.2.5, 1.2.6, 1.2.2)}{=} -v \operatorname{grad}(p) - \frac{p}{\rho} \operatorname{div}(v) = -\operatorname{div}(vp) = -\operatorname{div}(j). \end{aligned}$$

On rappelle la démonstration de (1.2.13) qui explique l'appellation "conservation de l'énergie". On a d'après la [formule de Stokes](#)

$$\frac{dE_\Omega}{dt} = \int_\Omega \partial_t \epsilon d^3x \stackrel{(1.2.11)}{=} - \int_\Omega \operatorname{div}(j) d^3x = - \int_{\partial\Omega} j d^2s = -J_\Omega.$$

□

Remarque 1.2.7. A cause du terme de dissipation dans l'[équation de Navier-Stokes](#), une partie de l'énergie sonore est **dissipée**, $\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = 0.5$ par km , convertit sous forme de chaleur.

1.3 Solutions particulières de l'équation des ondes

Dans cette Section on étudie particulièrement l'équation des ondes (1.2.1) décrivant les petites fluctuations de pression $p(x, t)$ autour d'une valeur constante et uniforme p_0 :

$$\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$$

avec $c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma RT_0}{M}\right)^{1/2} = 343 \text{ m/s}$.

1.3.1 Variantes de l'équation d'onde

[Video de cette section](#)

1.3.1.1 Équation plus générale

On présente une version plus générale de l'équation d'onde que celle obtenue en (1.2.1).

Si la température $T(x, t)$ **varie** lentement avec x et t comme c'est le cas dans l'atmosphère ou dans un grand hall alors $c(x, t)$ devient une fonction. De plus, il peut y avoir un **amortissement** de l'onde modélisé par une fonction réelle $a(x, t) \geq 0$ et une **source sonore** modélisée par une fonction réelle $s(x, t)$. Par exemple si la source est ponctuelle en x_0 (ex. haut parleur), alors $s(x, t) = s(t) \delta_{x_0}(x)$ où δ_{x_0} est la distribution de Dirac en x_0 .

Définition 1.3.1. L'**équation des ondes** obtenue en (1.2.1) s'écrit plus généralement avec **indice variable** $c(x, t)$, **amortissement** $a(x, t)$ et **source** $s(x, t)$:

$$\partial_t^2 p - c^2 \Delta p + a \partial_t p = s \quad (1.3.1)$$

L'inconnue est la fonction $p(x, t)$ décrivant les fluctuations de pression.

C'est encore une équation affine en p (i.e. de degré 1), mais à coefficients variables. C'est une EDP (Équations aux Dérivées Partielles) affine. En étudiant les solutions, on verra en effet pourquoi c correspond à la vitesse de l'onde, a modélise un amortissement et s une source.

Avant de chercher à résoudre et comprendre l'équation d'onde (1.3.1), voici quelques commentaires.

1.3.1.2 Conditions aux bords

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine donné (modélisant un espace comme une pièce par exemple), on peut demander des conditions au bord $\partial\Omega$ de Ω comme $v(x, t) = 0$ pour tout $x \in \partial\Omega$ et $t \in \mathbb{R}$, signifiant qu'il n'y a pas de déplacement d'air sur les parois.

1.3.1.3 Question de résolution

Que signifie résoudre l'équation d'onde? Si on connaît les fonctions c, a, s et la valeur de l'onde $p(x, t)$, $\partial_t p(x, t)$ à $t = 0$ pour tout $x \in \Omega$, la question peut être de comprendre le comportement de l'onde, i.e. de trouver $p(x, t)$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $t \in \mathbb{R}$. Cette question peut être non soluble à la main, mais soluble dans certains cas limites ou soluble approximativement avec un ordinateur. Dans cette section on expliquera cela et nous verrons un algorithme simple de résolution numérique.

On va considérer différentes situations, de façon progressive, de simple à plus compliquées.

Exemple 1.3.2. Voici par exemple une résolution numérique de l'équation d'onde en dimension 2 sur un domaine Ω qui est un rectangle tronqué d'un disque : [vidéo](#). Ce qui est intéressant à observer et que l'on expliquera est que l'on observe en effet la propagation des "fronts d'ondes" à une certaine vitesse c . Ces front d'ondes semblent suivre des trajectoires bien définies, comme celles de particules.

Dans la suite de cette section on considère des cas très particuliers de domaine Ω et de fonctions c, a, s qui font que l'équation (1.3.1) est soluble. On va commencer par étudier le cas à une dimension d'espace.

1.3.1.4 A propos de l'amortissement a

Le terme d'amortissement aura pour effet de réduire l'énergie de l'onde au cours du temps. On parle de dissipation. Cela s'appelle aussi la "[viscoélasticité](#)". Ce paramètre est important en lutherie dans la conception des instruments de musique, voir cette vidéo [Conférence de Michele Castellengo sur le son](#) à 24'.

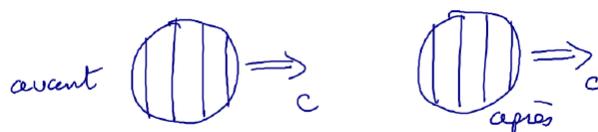
1.3.2 Trajectoire des ondes et importance en acoustique musicale

L'objectif de comprendre le comportement des ondes dans la suite est de pouvoir l'appliquer à l'acoustique musicale. Voici en résumé quelques résultats que l'on obtiendra et qui sont déterminant par exemple pour l'acoustique d'une salle :

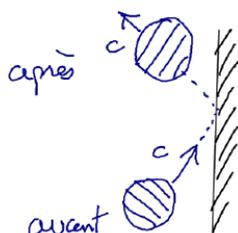
1.3.2.1 Dans un milieu homogène

Un **milieu homogène** est un milieu où la **vitesse c_{son} du son est constante**, i.e. ne dépend pas du point. Pour cela il faut que la température et la pression soit constantes. On définira précisément la notion de paquet d'onde plus loin.

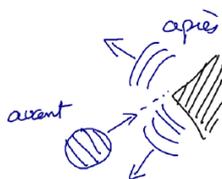
Proposition 1.3.3. *Dans un milieu homogène, i.e. la vitesse c_{son} est constante, alors les paquets d'ondes se propagent en **ligne droite** perpendiculairement aux lignes (ou plan) de phases. Une faible partie de l'énergie est dissipée pendant la propagation.*



Proposition 1.3.4. *Sur un obstacle plan lisse ou de longueur de variation grande devant la longueur d'onde, un paquet d'onde se réfléchit et une partie est absorbée par la paroi.*



Proposition 1.3.5. *Sur un obstacle de variation courte devant la longueur d'onde, un paquet d'onde **diffuse**, i.e. produit plusieurs paquets d'ondes avec des amplitudes variables.*

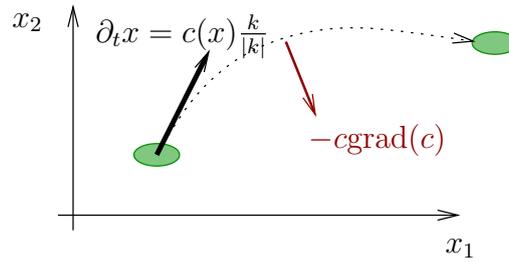


Exemple 1.3.6. Par exemple si l'obstacle est très petit devant la longueur d'onde comme un point, la diffusion est isotrope (on parle de diffusion "s") ou **diffusion de Rayleigh**. Cela explique la **couleur du ciel**.

1.3.2.2 Dans un milieu inhomogène

Un **milieu inhomogène** est un milieu où la vitesse $c_{\text{son}}(x)$ du son n'est constante, i.e. dépend du point x . Ce peut être du à la température ou la pression qui varient.

Proposition 1.3.7. *Dans un milieu inhomogène, i.e. si la vitesse $c_{\text{son}}(x)$ dépend du point de façon lente par rapport à la longueur d'onde, alors la **trajectoire d'un paquet d'onde est déviée vers les zones où $c_{\text{son}}(x)$ décroît** (i.e. $-\text{grad}c_{\text{son}}$ agit comme une force).*



Pour énoncer le résultat très important suivant, considérons un paquet d'onde solution de l'équation générale (1.3.1), (ou tout autre équation différentielle linéaire). Cette équation détermine une fonction $x, k \rightarrow \omega(x, k)$ appelée **relation de dispersion** ou **symbole** (ou Hamiltonien classique) obtenue remplaçant p dans ((1.3.1) par le mode de Fourier $p(x, t) = e^{i(k \cdot x - \omega t)}$. Par exemple, prenons le cas simple (on verra d'autres cas ensuite, en particulier celui de l'équation de Schrödinger)

$$\partial_t^2 p - c(x)^2 \Delta p = 0$$

On a $\partial_{x_j} p = ik_j p$ et $\partial_t p = -i\omega p$, donc on obtient $-\omega^2 - c(x)^2 (-\|k\|^2) = 0$ et l'on déduit l'expression de

$$\omega(x, k) = c(x) \|k\|.$$

Proposition 1.3.8. "Théorème semi-classique de Ehrenfest-Hamilton". Lors du déplacement d'un paquet d'onde on peut mesurer la vitesse de déplacement de son enveloppe de position moyenne $x(t)$, appelée **vitesse de groupe** $v_g = \frac{dx}{dt} \in \mathbb{R}^3$ et le comportement des lignes de phases $y \rightarrow e^{ik(t) \cdot (y - x_{\text{phase}}(t))}$, avec le vecteur d'onde $k(t) \in \mathbb{R}^3$ et la **vitesse de phase** $v_{\text{phase}} = \frac{dx_{\text{phase}}}{dt}$. Par exemple un paquet d'onde Gaussien a l'expression

$$u(y, t) = A e^{ik(t) \cdot (y - x_{\text{phase}}(t))} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{|y - x(t)|}{\sigma} \right)^2}$$

d'amplitude $A > 0$ et largeur $\sigma > 0$. De façon générale, le comportement des paquet d'ondes est caractérisé à partir de la fonction $\omega(x, k)$ par les **équations de Hamilton**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \\ \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \end{cases}$$

donnant la **vitesse de groupe** $v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ et la **vitesse de phase** $v_{\text{phase}} = \frac{dx_{\text{phase}}}{dt} = \omega(x(t), k(t))$?

Remarque 1.3.9. Le véritable nom de ce théorème en mathématiques est "Théorème de propagation des singularités".

1.3.2.3 Acoustique d'une salle

Comme conséquence des propriétés précédentes, pour une salle de concert,

- on évite les parois lisses et planes sur lesquelles l'onde se réfléchit parfaitement, ex : mur de salle de bain.
- On évite aussi des parois trop absorbantes de l'énergie de l'onde, qui l'empêche de se réfléchir.
- On préfère des **parois qui diffusent** les ondes. Pour cela on peut utiliser une structure aléatoire appelée **diffuseur de Schroeder** (1975), voir [ici](#). Pour quelle raison ? peut être que cette diffusion aléatoire ressemble à la diffusion du son dans la forêt sur les troncs d'arbres ?
- Exemples : diffusion du son
 - dans une église,
 - dans une grotte : voir [ce documentaire](#) sur arte qui explique que les **points rouge** (et mains rouges) marquent les zones de résonances particulières.
- Les algorithmes de “**reverb**” sont modélisés à base de phénomènes de diffusion multiples aléatoires

1.3.3 Equation des ondes $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$ sur \mathbb{R} (1 dim)

[Video de cette section.](#)

Pour commencer le cas le plus simple est celui de l'équation d'onde $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$ d'inconnue $p(x, t)$ sur l'**espace de dimension 1** : $x \in \mathbb{R}$ sans bord et avec la vitesse $c > 0$ constante.

Remarque 1.3.10. On va présenter deux méthodes de résolution, importantes l'une et l'autre. La solution d'Alembert est spécifique à la dimension 1 et en dimension plus grande correspond à la **spherical mean** ou **formule de Kirchoff** qui n'est pas exacte. La solution de Fourier est valable en toutes dimensions mais nécessite des coefficients constants. Elle se généralise pour des **EDP** à coefficients variables avec l'analyse semi-classique ou analyse micro-locale, on le verra en section [1.5](#).

1.3.3.1 Solution d'Alembert

Nous présentons **la solution d'Alembert** particulière à ce cas et très importante pour la suite du cours.

Proposition 1.3.11. *L'équation d'onde à une dimension $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$ admet comme solution générale*

$$p(x, t) = R(x - ct) + G(x + ct) \quad (1.3.2)$$

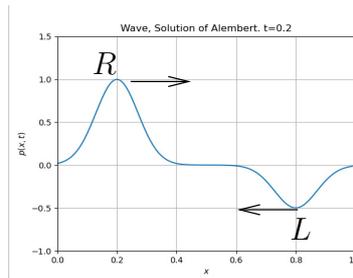
avec des fonctions R, G arbitraires, déterminées par les conditions initiales $p(x, 0)$, $(\partial_t p)(x', 0)$ par

$$R(x) = \frac{1}{2} \left(p(x, 0) - \frac{1}{c} \int^x (\partial_t p)(x', 0) dx' \right) \quad (1.3.3)$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left(p(x, 0) + \frac{1}{c} \int^x (\partial_t p)(x', 0) dx' \right)$$

Remarquer que $R(x - ct)$ représente une fonction qui se translate vers la droite à la vitesse c , car son argument est constant pour $x - ct = x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + ct$. De même $G(x + ct)$ qui se translate vers la gauche. On appelle parfois $R(x - ct)$ et $G(x + ct)$ des “**ondes progressives**”.

Voici un exemple d'une onde, [vidéo1](#) fait par ce programme [onde_1dim_segment_superposition.py](#).



Démonstration. Vérifions que (1.3.2) est solution. On a

$$\partial_t p = -cR'(x - ct) + cG'(x + ct), \quad \partial_t^2 p = c^2 R''(x - ct) + c^2 G''(x + ct),$$

$$\partial_x p = R'(x - ct) + G'(x + ct), \quad \partial_x^2 p = R''(x - ct) + G''(x + ct).$$

On vérifie donc que $\partial_t^2 p = c^2 \partial_x^2 p$. Ensuite cela donne $p(x, 0) = R(x) + G(x)$ et $(\partial_t p)(x, 0) = c(G'(x) - R'(x))$, donc $G(x) - R(x) = \frac{1}{c} \int^x (\partial_t p)(x', 0) dx'$, à une constante près. On déduit (1.3.3). \square

Exercice 1.3.12. Une onde $p(x, t)$ est solution de $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$.

1. A $t = 0$, on suppose connue la fonction $p(x, 0)$ et on suppose sa dérivée temporelle nulle : $\partial_t p(x, 0) = 0, \forall x$. Donner l'expression de $p(x, t)$ à partir de $p(x, 0)$ et tracer l'allure de $p(x, t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ dans le cas $p(x, 0) = e^{-x^2}$.
2. Quelles conditions vérifient les valeurs initiales $p(x, 0)$ et $\partial_t p(x, 0)$ pour que l'onde soit progressive vers la droite seulement, i.e. $p(x, t) = R(x - ct)$?

1.3.3.2 Solution de Fourier

L'équation $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$ est une **EDP** linéaire à coefficient constant. On peut donc la résoudre par transformée de Fourier. D'après la théorie de Fourier, toute solution est combinaison linéaire de

$$p_{k,\omega}(x, t) = Ae^{i(kx+\omega t)} \quad (1.3.4)$$

appelée **onde plane** (ou **mode de Fourier**) avec $\omega \in \mathbb{R}$ **pulsation** (ou **fréquence temporelle**) et $k \in \mathbb{R}$ **vecteur d'onde** (ou **fréquence spatiale**) et une amplitude $A \in \mathbb{C}$. Lire la remarque **C.4.1** concernant l'intérêt d'utiliser les modes de Fourier ou ondes planes.

Remarque 1.3.13. L'onde plane (1.3.4) vérifie les relations de périodicité suivante $p_{k,\omega}(x + \lambda, t) = p_{k,\omega}(x, t) = p_{k,\omega}(x, t + T)$ avec la période spatiale ou **longueur d'onde**

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

et la période temporelle

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Remarque 1.3.14. $\operatorname{Re}(p_{k,\omega})(x, t) \stackrel{(1.3.12)}{=} |A| \cos(kx + \omega t + \alpha)$ avec $A = |A| e^{i\alpha}$. Voir figure 1.3.1.

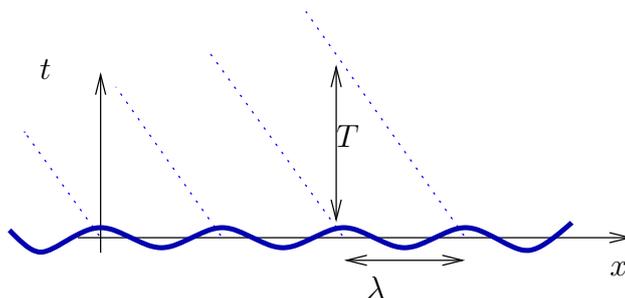


FIGURE 1.3.1 – La partie réelle d'une **onde plane** est $\operatorname{Re}(p_{k,\omega})(x, t) \stackrel{(1.3.12)}{=} |A| \cos(kx + \omega t + \alpha)$. Elle a des lignes de phase en pointillé $kx + \omega t + \alpha = 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow x = -ct + x_0$ avec $x_0 = -\frac{\alpha + 2\pi k}{k}$, $c = \frac{\omega}{|k|}$ appelé vitesse de phase. Ici $k > 0, \omega > 0$.

D'après le Théorème de Fourier (C.4.3), tout signal $p(x, t)$ se décompose comme somme de modes de Fourier (1.3.4).

Proposition 1.3.15. Sur le domaine \mathbb{R} , une **onde plane** $p(x, t) = Ae^{i(kx+\omega t)}$ avec $\omega, k \in \mathbb{R}$ est solution de (1.3.11), $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$, si et seulement si

$$\omega = \pm ck,$$

ainsi $p(x, t) = Ae^{ik(x \pm ct)}$.

Remarque 1.3.16. L'onde plane $p(x, t) = Ae^{ik(x \pm ct)}$ est une onde progressive particulière, i.e. $p(x, t) = F(x \pm ct)$ pour la fonction particulière $F(X) = Ae^{ikX}$ appelé mode de Fourier en accord avec la solution d'Alembert (1.3.2).

Voici une [animation](#) faite par ce programme [onde_1dim_R.py](#).

Démonstration. $p(x, t) = Ae^{i(kx + \omega t)}$ dans l'équation d'onde $\partial_t^2 p - c^2 \partial_x^2 p = 0$ donne

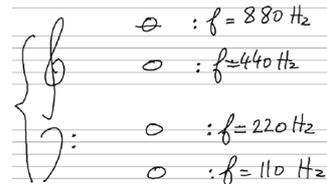
$$(i\omega)^2 - c^2 (ik)^2 = 0 \quad (1.3.5)$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 + c^2 k^2 = 0 \quad (1.3.6)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \pm ck \quad (1.3.7)$$

□

Exercice 1.3.17. Calculer la longueur d'onde λ pour une onde sonore de fréquence $f = 440\text{Hz}$, (la du diapason) et pour les autres la de la figure ?



Solution 1.3.18. D'après $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$, on déduit

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{340 \text{ m/s}}{440 \text{ s}^{-1}} = 0.80 \text{ m} = 80 \text{ cm}$$

Exercice 1.3.19. Les **dauphins** utilisent des sons de fréquences $f \approx 150 \text{ kHz}$ pour localiser les poissons (proies). Quelle est la longueur d'onde λ correspondante ? Même questions pour les **Marsouins** ($f \geq 100 \text{ kHz}$) et les **Orques** ($f \leq 100 \text{ kHz}$) ?

Solution 1.3.20. Dans l'eau, la vitesse du son est $c = 1500 \text{ m/s}$. Donc pour les dauphins

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1500 \text{ m/s}}{150\,000 \text{ s}^{-1}} = 0.01 \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

Cette petite longueur d'onde leur permet de localiser les petits poissons par **écholocalisation** pour se nourrir. Pour les marsouins,

$$\lambda = \frac{c}{f} \leq \frac{1500 \text{ m/s}}{100\,000 \text{ s}^{-1}} = 0.015 \text{ m} = 1.5 \text{ cm}$$

Pour les orques, $\lambda = \frac{c}{f} \geq 1.5 \text{ cm}$.

1.3.3.3 Effet Doppler

On parle d'effet Doppler si la **source sonore est en mouvement**, et/ou le **récepteur est en mouvement par rapport au fluide**. La conséquence est que la **longueur d'onde est différente, ainsi que la fréquence perçue**.

Voici des expériences pour expliquer cela.

- Vidéos dans une cuve à ondes de surface.
- [Effet Doppler subsonique](#)
- [Effet Doppler supersonique](#)
- [Le mur du son](#)

Exemple 1.3.21. Expériences connues : le son d'une sirène d'une voiture en mouvement. Le mur du son créé par un avion supersonique.

1.3.4 Equation $\partial_t^2 v - c^2 \partial_x^2 v = 0$ sur le segment $[0, L]$

[Video de cette section](#)

On considère ici la grandeur vitesse $v(x, t)$, la variable spatiale $x \in [0, L]$ sur un **segment unidimensionnel** et $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions suivantes aux bords $x = 0$ et $x = L$

$$v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad \forall t.$$

qui signifie que la vitesse est nulle aux bords car l'air ne bouge pas à cause des parois.

Une fois de plus on résoud l'équation par deux méthodes : la méthode d'Alembert spécifique au cas dimension 1 et la méthode de Fourier (séries de Fourier).

1.3.4.1 Solution d'Alembert

Voici la solution d'Alembert obtenue à partir de la solution sur \mathbb{R} .

Proposition 1.3.22. *L'équation d'onde à une dimension $\partial_t^2 v - c^2 \partial_x^2 v = 0$ sur l'intervalle $x \in [0, L]$ avec les conditions aux bords $v(0, t) = v(L, t) = 0, \forall t$, admet comme solution générale*

$$v(x, t) = R(x - ct) - R(-x - ct) \tag{1.3.8}$$

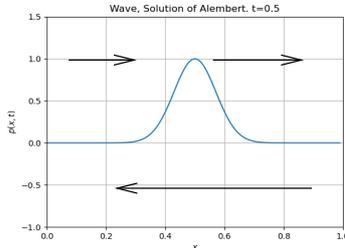
avec une fonction $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de période $2L$ arbitraire, i.e.

$$R(x + 2L) = R(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent la fonction est **périodique en temps**, de période $T = \frac{2L}{c}$, i.e.

$$v\left(x, t + \frac{2L}{c}\right) = v(x, t), \forall x.$$

Remarque 1.3.23. $R(x - ct)$ représente une fonction qui se translate vers la droite à la vitesse c et $R(-x - ct)$ la fonction symétrique qui se translate vers la gauche. R est déterminée par les conditions initiales comme en (1.3.3). Voici un exemple d'une onde, [vidéo](#) fait par ce programme [onde_1dim_segment_superposition.py](#) sur le segment $x \in [0, 1]$.



Remarque 1.3.24. La **périodicité en temps** de l'équation d'onde est une **propriété spéciale à la géométrie** $[0, L]$ et produit une “**note musicale**” d'après la définition 2.3.1 que l'on étudiera. Pour cette raison on dit que c'est **système harmonique**. Cette périodicité du signal n'est pas vrai pour d'autres géométries. Cette propriété est la raison principale d'utiliser des cordes pincées ou frappées dans certains **instruments de musique**, comme la kora, le piano, la guitare, le clavecin, la harpe, etc.

Démonstration. On part de la solution (1.3.2) sur \mathbb{R} , $v(x, t) = R(x - ct) + G(x + ct)$. On rajoute les conditions

$$v(0, t) = R(-ct) + G(ct) = 0, \forall t,$$

donnant $G(x) = -R(-x)$, $\forall x$ et

$$\begin{aligned} v(L, t) &= R(L - ct) + G(L + ct) \\ &= R(L - ct) - R(-L - ct) = 0, \forall t \end{aligned}$$

donnant, en posant $-L - ct = x$

$$R(x + 2L) = R(x), \forall x.$$

On déduit que pour tout x ,

$$\begin{aligned} v\left(x, t + \frac{2L}{c}\right) &= R(x - ct - 2L) - R(-x - ct - 2L) \\ &= R(x - ct) - R(-x - ct) = v(x, t). \end{aligned}$$

□

Exercice 1.3.25. On souhaite qu'une corde de guitare ($3/4$) de longueur $L = 56\text{cm}$, produise un la de fréquence $f = 110\text{Hz}$. Calculer la vitesse c de l'onde élastique sur la corde.

Solution 1.3.26. On a

$$c = \frac{2L}{T} = 2Lf = 2 \times 0.56\text{m} \times 110\text{s}^{-1} = 123 \text{ m/s}$$

Exercice 1.3.27. Considérons la corde de mi₄, E_4 , $f_{E_4} = 330\text{Hz}$ de la guitare de longueur $L = 56\text{cm}$. A quelle distance L' placer le doigt, pour produire son octave E_5 de fréquence $f_{E_5} = 2f_{E_4} = 660\text{Hz}$? et pour produire la quinte B_4 de fréquence $f_{B_4} = \frac{3}{2} \times f_{E_4} = 495\text{Hz}$?

Solution 1.3.28. D'après la formule ci-dessus

$$f = \frac{c}{2L}$$

on observe que f est inversement proportionnel à L . Ainsi pour doubler la fréquence f il faut diviser par 2 la longueur. Donc pour obtenir $f_{E_5} = 2f_{E_4}$ il faut $L' = \frac{1}{2}L = \frac{1}{2} \times 56 = 28\text{cm}$. Pour obtenir $f_{B_4} = \frac{3}{2}f_{E_4}$ il faut $L' = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3} \times 56 = 37,3\text{cm}$.

Remarque 1.3.29. La **vitesse des ondes** sur une corde tendue de tension T (en N) et masse par unité de longueur μ est (Par **Vincenzo Galileo**, vers 1570, le père de G. Galilée)

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Cette formule montre ce qui est bien connu des musiciens : la vitesse c (et donc la fréquence f) augmente si la tension de la corde augmente. La vitesse (et donc la fréquence) diminue si la masse de la corde augmente.

1.3.4.2 Solution de Fourier

Proposition 1.3.30. Sur un **segment unidimensionnel** $x \in [0, L]$, avec les conditions aux bords $v(0, t) = v(L, t) = 0$, une solution générale de l'équation d'onde

$$\partial_t^2 v - c^2 \partial_x^2 v = 0$$

est une superposition de **modes stationnaires** (ou **modes propres** ou **ondes stationnaires**) :

$$v(x, t) = \sum_{n \geq 1} V_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \sin(k_n x) \quad (1.3.9)$$

avec l'amplitude $V_n \geq 0$ et phase $\alpha_n \in \mathbb{R}$ arbitraires, le vecteur d'onde $k_n = n\frac{\pi}{L}$, la fréquence $\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$ vérifiant $\omega_n = k_n c$ et

$$\omega_n = n\omega_1 \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (1.3.10)$$

Le fait que ω_n est multiple entier de $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$, on dit que le spectre est **harmonique**.

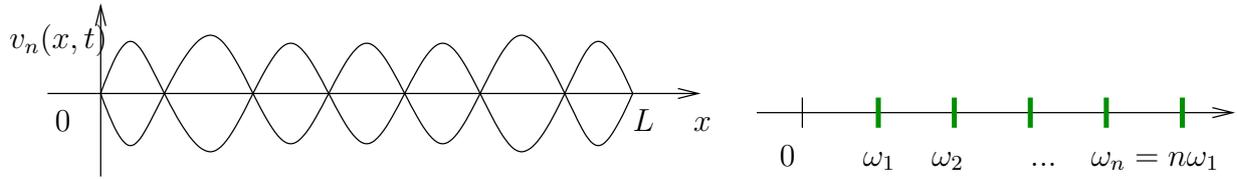


FIGURE 1.3.2 – (a) Enveloppe d'un mode propre (1.3.9), ici $n = 7$. (b) Spectre harmonique. Voici des vidéos pour le **mode $n=1$** , **mode $n=2$** , et **mode $n=3$** faites par ce programme [onde_1dim_segment.py](#). Voici des superpositions de modes, [vidéo1](#), [vidéo2](#), [vidéo3](#) faites par ce programme [onde_1dim_segment_superposition.py](#).

Remarque 1.3.31. Le terme n de (1.3.9) est périodique en temps de période $T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}$, donc de fréquence $f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi}$. Comme $T_n = \frac{1}{n}T_1$, cette fonction v_n est a fortiori de période T_1 et donc une solution générale, superposition des modes stationnaires, est périodique en temps de période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2L}{c}$ et fréquence

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{c}{2L}$$

appelée **fréquence fondamentale**. C'est pour cette raison de périodicité que le spectre $\omega_n = n\omega_1$ est appelé "spectre harmonique" (car on verra plus loin que tout signal périodique est perçu comme "harmonieux" par notre audition). On verra en section 3.3.7 que le **timbre** que l'on perçoit de ce signal périodique est caractérisé par la suite des amplitudes $(V_n)_{n \geq 1}$.

Démonstration. (Méthode 1). On part de l'expression (1.3.8) avec la fonction $R(x)$ de période $2L$ que l'on peut donc décomposer en série de Fourier

$$R(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{R}_n e^{i2\pi n \frac{x}{2L}}$$

avec des amplitudes $\hat{R}_n = |\hat{R}_n| e^{i\alpha_n} \in \mathbb{C}$, vérifiant $\hat{R}_{-n} = \overline{\hat{R}_n}$ cad $\alpha_{-n} = -\alpha_n$. Par conséquent

$$\begin{aligned} v(x, t) &\stackrel{(1.3.8)}{=} R(x - ct) - R(-x - ct) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{R}_n e^{i2\pi n \frac{x-ct}{2L}} - \hat{R}_n e^{i2\pi n \frac{(-x-ct)}{2L}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{R}_n e^{-i2\pi n \frac{ct}{2L}} (e^{i2\pi n \frac{x}{2L}} - e^{-i2\pi n \frac{x}{2L}}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{R}_n| e^{-i2\pi n \frac{ct}{2L} + i\alpha_n} 2 \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{R}_n| \cos\left(-2\pi n \frac{ct}{2L} + \alpha_n\right) 2 \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} 4 |\hat{R}_n| \cos\left(2\pi n \frac{ct}{2L} + \alpha_n\right) \sin\left(2\pi n \frac{x}{2L}\right) \\ &= \sum_{n \geq 1} V_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \sin(k_n x) \end{aligned}$$

avec $V_n = 4 \left| \hat{R}_n \right|$, $\omega_n = 2\pi n \frac{c}{2L} = n \frac{\pi c}{L}$ et $k_n = 2\pi n \frac{1}{2L} = n \frac{\pi}{L}$.

(Méthode 2) Sans utiliser la proposition 1.3.22. On cherche une solution avec une fréquence ω donnée. La solution est combinaison linéaire de $v = e^{i(k \cdot x + \omega t)}$ avec la condition (1.3.14) $k = \pm \frac{\omega}{c} \in \mathbb{R}$, avec $\omega \in \mathbb{R}$ fixé, donc

$$v = v_+ e^{i(|k|x + \omega t)} + v_- e^{i(-|k|x + \omega t)}$$

On a

$$0 = v(x=0) = (v_+ + v_-) e^{i\omega t}, \forall t,$$

donc $v_- = -v_+$. On a

$$0 = v(x=L) = v_+ (e^{i(kL + \omega t)} - e^{i(-kL + \omega t)}) = v_+ e^{i\omega t} (e^{ikL} - e^{-ikL})$$

donc $e^{ikL} - e^{-ikL} = 0 \Leftrightarrow e^{2ikL} = 1 \Leftrightarrow 2kL = 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, donc

$$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\omega_n = k_n c = \frac{\pi c n}{L}.$$

Seulement ces fréquences ω_n discrètes sont possibles. Au final l'onde de vitesse réelle (onde physique) est

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \operatorname{Re} (A e^{i\omega_n t} (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x})) = \operatorname{Re} (A e^{i\omega_n t} 2i \sin(k_n x)) \\ &= V \cos(\omega_n t + \alpha) \sin(k_n x) \end{aligned}$$

avec $2iA = V e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$. □

Exercice 1.3.32. (*) Programmer la propagation d'un paquet d'onde Gaussien sur le segment $[0, L]$ avec la méthode de Fourier.

1.3.5 Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur \mathbb{R}^3

[video de cette section](#)

Ici l'espace est l'espace **Euclidien total** \mathbb{R}^3 (ou \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}). La solution de Fourier que l'on a vu au paragraphe précédent 1.3.3.2 se généralise facilement à \mathbb{R}^d . Considérons l'équation d'onde

$$\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0 \tag{1.3.11}$$

avec $c > 0$ constant, $x \in \mathbb{R}^3$, d'inconnue la fonction $p(x, t)$. C'est une EDP linéaire à coefficients constants, que l'on peut donc résoudre par transformée de Fourier. D'après la théorie de Fourier, toute solution est combinaison linéaire de

$$p_{k, \omega}(x, t) = A e^{i(k \cdot x + \omega t)} \tag{1.3.12}$$

appelée **onde plane** (ou **mode de Fourier**) avec $\omega \in \mathbb{R}$ **pulsation** (ou **fréquence temporelle**) et $k \in \mathbb{R}^3$ **vecteur d'onde** (ou **fréquence spatiale**) et une amplitude $A \in \mathbb{C}$. La fonction **phase** est $\varphi(x, t) := k \cdot x + \omega t + \alpha \bmod 2\pi$. Les **lignes de phases** sont les lignes de niveaux de cette fonction phase. Ce sont des hyperplans dans $(x, t) \in \mathbb{R}^{3+1}$ aussi appelé **fronts d'ondes**.

Proposition 1.3.33. *Sur le domaine \mathbb{R}^3 , une **onde plane** $p(x, t) = Ae^{i(k \cdot x + \omega t)}$ est solution de (1.3.11), $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$, si*

$$\omega = \pm c |k|.$$

Alors la **densité de courant d'énergie** $j = pv$, obtenue en (1.2.12), est de module (en W/m^2)

$$|j| = \frac{c}{\gamma p_0} |p|^2 \quad (1.3.13)$$

Exemple 1.3.34. Par exemple si $|p| = 1Pa$ et $c = 343m/s$, $p_0 = 10^5 Pa$, $\gamma = \frac{7}{5}$, on obtient $|j| = 2.5 \cdot 10^{-3} W/m^2$.

Démonstration. Si on remplace p par $Ae^{i(k \cdot x + \omega t)}$ dans (1.3.11) on obtient la condition

$$(i\omega)^2 - c^2 (ik) \cdot (ik) = 0 \quad (1.3.14)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \pm c |k| \quad (1.3.15)$$

D'après (1.2.10), $p = -\rho_0 \partial_t \phi$ on obtient le potentiel des vitesses

$$\phi(x, t) = -\frac{A}{\rho_0 i \omega} e^{i(k \cdot x + \omega t)}$$

et (1.2.9), $v = \text{grad}(\phi)$ donne le champ de vitesses

$$v = -\frac{Ak}{\rho_0 \omega} e^{i(k \cdot x + \omega t)} \quad (1.3.16)$$

$$= -\frac{Ac^2 k}{\gamma p_0 \omega} e^{i(k \cdot x + \omega t)} \quad (1.3.17)$$

donc

$$j = pv = -\frac{A^2 c^2 k}{\gamma p_0 \omega} e^{2i(k \cdot x + \omega t)}$$

$$|j| = \frac{|A|^2 c}{\gamma p_0} = \frac{c |p|^2}{\gamma p_0}.$$

□

1.3.6 Mesure de l'intensité en décibels

[video de cette section](#)

On a vu en (1.2.12) que la densité de courant d'énergie est $j = pv$ en W/m^2 et que pour une onde plane $|j| = \frac{c}{\gamma p_0} |p|^2$, en (1.3.13).

La définition suivante donne une mesure équivalent de $|j|$ mais sur une échelle logarithmique, plus appropriée à la perception humaine.

Définition 1.3.35. Pour une densité de courant d'énergie $|j|$ on associe une "intensité" I en **déciBel** (dB) par

$$I = 10 \frac{1}{\ln 10} \ln \left(\frac{|j|}{j_0} \right)$$

avec $j_0 = 10^{-12} W/m^2$.

Remarque 1.3.36. D'après la définition,

- $|j| = j_0$ donne $I = 0$ dB qui est, on verra en section 3.3.3, le seuil de la perception humaine vers $\omega = 1000$ Hz. Cela justifie le choix de j_0 dans la définition.
- Une augmentation +1dB correspond à $|j'| = 10^{1/10} \times |j| = 1.26 |j|$. C' est le minimum perceptible par un humain et cela justifie le choix du facteur $10^{\frac{1}{\ln 10}}$ dans la définition.
- Une augmentation multiplicative $|j'| = 10 \times |j|$ donne une augmentation additive de $I' = I + 10$ dB soit de 10 dB = 1B est "1 Bel".
- On peut retenir que $|j'| = 2 \times |j|$ donne une augmentation $I' = I + (10 \frac{\ln 2}{\ln 10}) \sim I + 3$ dB.
- Si on double l'amplitude d'une onde sonore, i.e. une augmentation de la pression $p' = 2 \times p$ mais aussi $v' = 2 \times v$ pour la vitesse et donc $|j'| = 4 \times |j|$, cela donne une augmentation $I' = I + (10 \frac{\ln 4}{\ln 10}) \sim I + 6$ dB.
- $I = 120$ dB est le seuil de douleur pour la perception humaine.

Exemple 1.3.37. Si $|p| = 1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ Atmos}$, $c = 343 \text{ m/s}$, $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, $\gamma = \frac{7}{5}$ donne

$$|j| = \frac{c}{\gamma p_0} |p|^2 = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m^2}$$

$$I = 10 \frac{\ln(2,5 \cdot 10^9)}{\ln 10} = 93 \text{ dB}$$

qui est un son très fort pour la perception humaine.

Exemple 1.3.38. Si $|p| = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} = 10^{-10} \text{ Atmos}$, donne

$$|j| = \frac{c}{\gamma p_0} |p|^2 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

$$I = 10 \frac{\ln(|j|/j_0)}{\ln 10} = 0 \text{ dB}$$

qui est un son à la limite du perceptible humainement.

Exemple 1.3.39. Si on considère une source ponctuelle et on note $|j(d)|$ la densité de courant d'énergie mesurée à la distance d et $S(d) = 4\pi d^2$ est la surface de la sphère de rayon d alors $S(d)|j(d)| = \text{cste}$ et le flux total d'énergie et ne dépend pas de d . Par conséquence si on double la distance,

$$d' = 2 \times d$$

alors $S' = 4 \times S$ donc $|j'| = \frac{1}{4} |j|$ et

$$I' = I + \left(10 \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln 10} \right) = I - 2 \left(10 \frac{\ln 2}{\ln 10} \right) \sim I - 6 \text{ dB}$$

1.3.7 Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur le rectangle $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$

On peut généraliser le résultat précédent et considérer une cavité rectangulaire en utilisant la séparation des variables.

Proposition 1.3.40. Dans une “cavité rectangulaire”, à deux dimensions $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$, avec les conditions aux bords $v(x, t) = 0$ si $x \in \partial\Omega$, une solution générale de l'équation d'onde

$$\partial_t^2 v - c^2 \Delta v = 0$$

est une superposition de **modes stationnaires** (ou **modes propres**) :

$$v(x, t) = \sum_{n=(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2} V_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_{n_1} x_1) \sin(k_{n_2} x_2) \quad (1.3.18)$$

avec les vecteurs d'ondes $k_n = (k_{n_1}, k_{n_2}) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$k_{n_j} = n_j \frac{\pi}{L_j}, \quad j = 1, 2,$$

(k_n appartient à un réseau) et le **spectre de fréquences**

$$\omega_n = c |k_n|, \quad (1.3.19)$$

avec $|k_n| = (k_{n_1}^2 + k_{n_2}^2)^{1/2}$, l'amplitude $V_n > 0$, et phase $\varphi_n \in \mathbb{R}$. Le spectre “n'est pas harmonique”, et on a la **loi de Weyl** : le nombre de fréquences propres ω_n dans l'intervalle $[0, \omega]$ est

$$\mathcal{N}(\omega) := \#\{\omega_n \leq \omega\} = \frac{\omega^2}{4\pi c^2} L_1 L_2 + o(\omega^2) \quad (1.3.20)$$

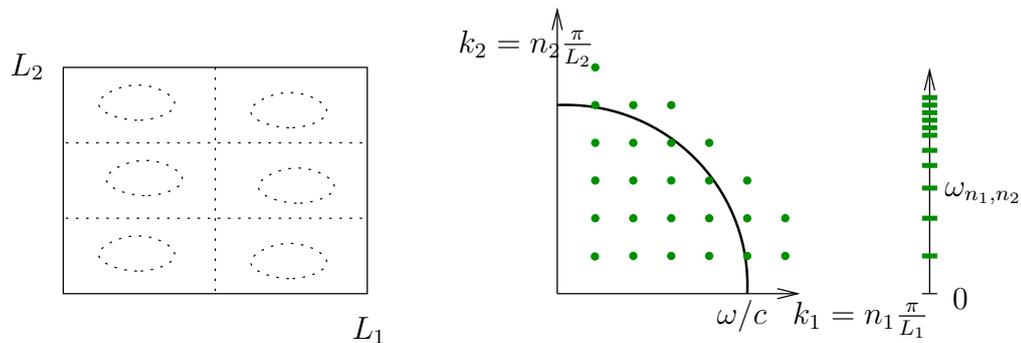


FIGURE 1.3.3 – (a) Enveloppe d'un mode propre (1.3.18), ici $n_1 = 2$, $n_2 = 3$. (b) Plan du vecteur d'onde $k = (k_1, k_2)$. Le spectre est la condition $\omega = c|k|$ (c) Spectre (non harmonique).

Exercice 1.3.41. Ecrire la preuve de la proposition 1.3.40. Aide : L'équation à résoudre est

$$\partial_t^2 v - c^2 \Delta v = 0$$

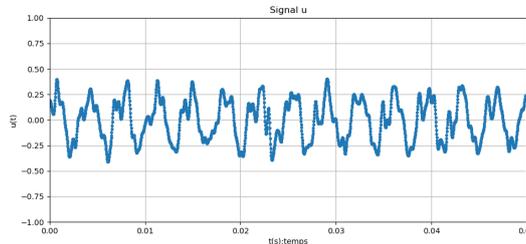
avec $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$. Une première étape est de résoudre $(-\Delta)u = k^2 u$ c'est à dire trouver les fonctions propres $u(x)$ satisfaisant les conditions aux limites et les valeurs propres $k^2 > 0$ de l'opérateur $(-\Delta)$. Ensuite on vérifiera que $v(x, t) = e^{i\omega t}u(x)$ est solution de l'équation d'onde avec $\omega = ck$. Grâce à la forme rectangulaire il y a "séparation des variables" x_1, x_2 c'est à dire que on cherche la solution sous la forme $u(x_1, x_2) = u_1(x_1)u_2(x_2)$ ce qui ramène à résoudre $-\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} = k_j^2 u_j$ pour $j = 1, 2$.

Remarque 1.3.42. La solution à ce problème paraît très simple, pourtant il est très difficile de préciser la correction à la loi de Weyl dans (1.3.20). Voir [Problème du cercle de Gauss](#).

Remarque 1.3.43. Voici le signal mesuré en un point de la plaque et le son produit [audio_2D.wav](#) avec une fondamentale à $f_0 = 440\text{Hz}$, par ce programme [sinus_sum_general.py](#). Il s'agit précisément de la fonction

$$u(t) = \sum_{n_1, n_2=1}^{10} A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

avec l'amplitude $A_n = 1/(n_1^2 + n_2^2)$, des fréquences $f_n = (n_1^2 + n_2^2)^{1/2} f_0$ et des phases φ_n aléatoires. On le perçoit comme non harmonieux, car le signal est non périodique, le spectre est non harmonique.



Il serait intéressant d'étudier le "pitch" perçu.

1.3.8 Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur le disque $\Omega = \mathbb{D}(R)$

On peut aussi résoudre l'équation d'onde sur le disque en utilisant la symétrie de rotation et se ramener à une équation différentielle ordinaire radiale dont les solutions sont les [fonctions de Bessel](#).

1.3.9 Equation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ sur un domaine compact $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

On va considérer une généralisation des résultats précédents.

On utilisera un résultat important.

Théorème 1.3.44. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine compact, alors l'opérateur Δ sur Ω avec les conditions au bord de Dirichlet a du spectre discret, i.e.*

$$(-\Delta) v_j = \omega_j^2 v_j$$

avec les conditions au bord

$$v|_{\partial\Omega} = 0$$

a des valeurs propres $0 < \omega_0^2 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \dots$ avec des fonctions propres $u_j \in L^2(\Omega)$.
On a la loi de Weyl

$$\mathcal{N}(\omega) := \#\{\omega_n \leq \omega\} = \frac{\omega^d}{4\pi} |\Omega| + o(\omega^d) \quad (1.3.21)$$

où $|\Omega|$ est le volume de Ω .

Ensuite posons $u_j(x, t) = A e^{i\omega_j t} v_j(x)$ avec $A = |A| e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$. Alors $\partial_t^2 u_j = -A \omega_j^2 e^{i\omega_j t} v_j = A e^{i\omega_j t} \Delta v_j = \Delta u_j$. Donc u_j est solution de l'équation des ondes et vérifie la condition au bord $u_j|_{\partial\Omega} = 0$. De même pour

$$\operatorname{Re}(u_j(x, t)) = |A| \cos(\omega_j t + \alpha) v_j(x)$$

qui est la forme générale d'une solution réelle de l'équation d'onde.

1.3.10 Equation avec amortissement $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p + a \partial_t p = 0$ sur $\Omega = \mathbb{R}^3$

On suppose ici une fonction amortissement constante $a(x, t) = a \geq 0$.

Proposition 1.3.45. *Sur le domaine $\Omega = \mathbb{R}^3$, une onde plane $p(x, t) = A e^{i(k \cdot x + \omega t)}$ est solution de $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p + a \partial_t p = 0$ si*

$$\omega = \pm c |k| \left(1 - \left(\frac{a}{2c |k|} \right)^2 \right)^{1/2} + i \frac{a}{2}.$$

La partie imaginaire implique un amortissement temporel avec un temps caractéristique $\tau = \frac{2}{a}$:

$$e^{i\omega t} = e^{-\frac{a}{2} t} e^{i \operatorname{Re}(\omega) t}$$

Démonstration. Si on suppose $p(x, t) = A e^{i(k \cdot x + \omega t)}$ alors l'équation $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p + a \partial_t p = 0$ donne

$$\begin{aligned} -\omega^2 p + c^2 |k|^2 p + i a \omega p &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega^2 - i a \omega - c^2 |k|^2 &= 0 \end{aligned}$$

1.4. RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION D'ONDES SUR UN DOMAINE $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ COMPACT

donc avec $\Delta := -a^2 + 4c^2 |k|^2$, les solutions de cette équation du second degré sont

$$\omega = \frac{ia \pm \sqrt{\Delta}}{2} = i\frac{a}{2} \pm c|k| \left(1 - \left(\frac{a}{2c|k|} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

□

1.4 Résolution numérique de l'équation d'ondes sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ compact

Résultats attendus.

1.5 Analyse micro-locale (semi-classique) de l'équation des ondes

Remarque 1.5.1. Dans cette section on va utiliser des notions un peu plus élaborées d'analyses comme la transformée de Fourier en dimensions 2, 3. On peut découvrir ces notions et développer une certaine compréhension en lisant d'abord le chapitre 2 et revenir ensuite ici.

“Approximation semi-classique” : On va montrer que dans la **limite des petites longueurs d'ondes**, une onde sonore se comporte comme une superposition de particules régies par l'équation de mouvement de Hamilton (1834).

En fait cela est général aux équations ondulatoires. Par exemple dans cette approximation,

- Une onde lumineuse (Hamilton 1834) peut être considérée comme une superposition de rayons lumineux.
- Une onde quantique de matière (Schrödinger 1920), peut être considérée comme une superposition de particules décrites par l'équation de mouvement de Newton.

Cette approximation n'est pas exacte, elle est valable si $\epsilon = \frac{\lambda}{L} \ll 1$ où λ est la longueur d'onde et L la longueur de variation du domaine ou des paramètres. Mais l'erreur peut être de l'ordre de $C_N \epsilon^N$ avec $N \gg 1$ arbitraire ou même $C e^{-C/\epsilon}$ avec $C > 0$ donc une erreur très petite en pratique.

On obtiendra deux formulations équivalentes de ce résultat :

1. Formulation par paquets d'ondes, donnant une correspondance directe onde-particules.
2. Formulation par variétés Lagrangiennes aussi appelée “Théorie W.K.B.” ou “Théorie de Hamilton-Jacobi”.

Il faut donc retenir que l'analyse microlocale qui donne une dynamique Hamiltonienne effective est très pertinente dans le régime des petites longueurs d'ondes $\epsilon = \frac{\lambda}{L} \ll 1$. Par

contre si ce n'est pas le cas, il faut résoudre l'équation des ondes par d'autres moyens. Ainsi les modèles solubles du paragraphe précédents sont importants, ainsi que les méthodes numériques.

1.5.1 De l'équation des ondes du 2nd ordre en t à l'équation de Schrödinger du 1er ordre

La première étape dans notre étude de l'équation d'onde est de la remplacer par une équation équivalente mais du premier ordre en temps. En effet, afin d'étudier l'évolution temporelle partant de conditions initiales, il est naturel en science de reformuler une équation différentielle d'ordre $n \geq 2$ en temps comme un système d'équations d'ordre 1, car ainsi une condition initiale détermine une trajectoire, on obtient un **groupe d'évolution**.

Lemme 1.5.2. *L'équation d'onde du deuxième ordre $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p + a \partial_t p = s$ avec des fonctions $c(x, t)$, $a(x, t)$, $s(x, t)$ s'écrit comme une équation du premier ordre*

$$\partial_t X = AX + B \quad (1.5.1)$$

avec la fonction à valeur dans \mathbb{R}^2 (appelé champ vectoriel)

$$X(x, t) = \begin{pmatrix} p(x, t) \\ (\partial_t p)(x, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

et les fonctions matricielles et vectorielles

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 \Delta & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix}$$

Démonstration. L'équation d'onde devient

$$\partial_t X = \begin{pmatrix} \partial_t p \\ \partial_t^2 p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t p \\ c^2 \Delta p - a \partial_t p + s \end{pmatrix} = AX + B$$

□

On peut résoudre l'équation (1.5.1). Pour cela il faut diagonaliser la matrice A afin de séparer cette équation vectorielle en deux équations indépendantes.

Par simplicité on va considérer un exemple plus simple sans amortissement ni source, i.e. $a = 0$, $s = 0$ mais avec une fonction $c(x, t)$ variable, appelé **indice du milieu**. Introduisons avant cela l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ sur \mathbb{R}^3 par son action sur un mode de Fourier (1.3.12), $p_k(x) = e^{ik \cdot x}$ avec $k \in \mathbb{R}^3$. On observe que $-\Delta p_k = |k|^2 p_k$, donc on définit l'opérateur $\sqrt{-\Delta}$ par son action sur les modes de Fourier :

$$\sqrt{-\Delta} p_k = |k| p_k$$

de sorte que $(\sqrt{-\Delta})^2 = -\Delta$.

Théorème 1.5.3. “*Formulation de l'équation d'onde par deux équations du premier ordre*”. L'équation d'onde (1.3.1) $\partial_t^2 p - c^2 \Delta p = 0$ du 2nd ordre en t avec la fonction $c(x, t)$, est équivalente aux deux équations de type Schrödinger suivantes

$$i \frac{\partial \psi_{\pm}}{\partial t} = \mp \hat{\Omega} \psi_{\pm}, \quad (1.5.2)$$

avec

$$\psi_{\pm} = p \pm \frac{i}{\sqrt{-\Delta}} \partial_t p$$

et l'opérateur

$$\hat{\Omega} = c\sqrt{-\Delta}. \quad (1.5.3)$$

Démonstration. Comme ci-dessus, posons $X = \begin{pmatrix} p \\ \partial_t p \end{pmatrix}$. Alors

$$\partial_t X = \begin{pmatrix} \partial_t p \\ \partial_t^2 p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t p \\ c^2 \Delta p \end{pmatrix} = AX$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 \Delta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2(-\Delta) & 0 \end{pmatrix}$ que l'on diagonalise

$$A = PDP^{-1},$$

avec une matrice de passage P et une matrice diagonale D . La solution² est

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ic\sqrt{-\Delta} & -ic\sqrt{-\Delta} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} ic\sqrt{-\Delta} & 0 \\ 0 & -ic\sqrt{-\Delta} \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{i}{\sqrt{-\Delta}} \\ 1 & \frac{-i}{\sqrt{-\Delta}} \end{pmatrix}.$$

On pose $\psi = P^{-1}X = \begin{pmatrix} p + \frac{i}{\sqrt{-\Delta}} \partial_t p \\ p - \frac{i}{\sqrt{-\Delta}} \partial_t p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$, alors

$$\partial_t \psi = P^{-1} \partial_t X = P^{-1} AX = P^{-1} AP \psi = D \psi$$

C'est à dire

$$\partial_t \psi_{\pm} = \pm ic\sqrt{-\Delta} \psi_{\pm} \Leftrightarrow i \partial_t \psi_{\pm} = \mp c\sqrt{-\Delta} \psi_{\pm}$$

□

2. par exemple on peut utiliser [xcas en ligne](#), et écrire :

1.5.2 L'équation de Schrödinger

1.5.2.1 Équation d'évolution de Schrödinger

Dans la suite du chapitre, on va s'intéresser à une équation d'évolution comme celle obtenue en (1.5.2), appelée **équation de Schrödinger**

$$i\partial_t u_t = \hat{\Omega} u_t \quad (1.5.4)$$

où $u_t : x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow u_t(x) \in \mathbb{C}$ est une fonction et $\hat{\Omega}$ un opérateur différentiel que l'on définit en toute généralité ci-dessous. Attention, on va s'intéresser à cette équation dans le cadre de l'acoustique (elle apparaît dans tous les domaines de la physique ondulatoire : acoustique, optique, électromagnétisme, ondes sismique etc, pas seulement avec la mécanique quantique).

Dans cette Section on fait quelques remarques générales qu'il est important de connaître.

Remarque 1.5.4. $\hat{\Omega}$ a l'unité de l'inverse de t , c'est donc une **fréquence**. Dans certains cas, par exemple (1.5.3), l'opérateur $\hat{\Omega}$ est auto-adjoint, c'est à dire $\hat{\Omega}^\dagger = \hat{\Omega}$. D'après la proposition C.3.3, cela implique que ses valeurs propres sont réelles que l'on notera donc $(\omega_j)_j$ et que les espaces propres sont orthogonaux entre eux.

Remarque 1.5.5. La présence du facteur i dans (1.5.4) est une convention. Il serait peut être plus simple d'écrire $\partial_t u_t = \hat{\Omega}' u_t$ avec $\hat{\Omega}' = -i\hat{\Omega}$ qui est anti auto-adjoint, i.e. $\hat{\Omega}'^\dagger = -\hat{\Omega}'$ donc avec des valeurs propres imaginaires pures que l'on noterait $(-i\omega_j)_j$ et on retrouve le facteur i .

1.5.2.2 Équation stationnaire de Schrödinger

Supposons que l'opérateur $\hat{\Omega}$ dans (1.5.4) est auto-adjoint et que $\hat{\Omega}u = \omega u$ où u est un vecteur propre et ω une valeur propre.

Proposition 1.5.6. *Si $\hat{\Omega}u = \omega u$ avec une fonction propre $u : x \rightarrow u(x)$ et valeur propre ω , alors la fonction*

$$v_t(x) = e^{-i\omega t} u(x)$$

*est solution de l'équation d'évolution (1.5.4), appelée **solution stationnaire** car le module $|v_t(x)| = |u(x)|$ est indépendant du temps.*

Démonstration. On calcule $i\partial_t v_t = i(-i\omega)v_t = \omega v_t$ et $\hat{\Omega}v_t = e^{-i\omega t}\hat{\Omega}u = \omega e^{-i\omega t}u = \omega v_t$ donc on a bien $i\partial_t v_t = \hat{\Omega}v_t$. \square

Remarque 1.5.7. Les vecteur propres d'un opérateur sont en général impossible à calculer. On sait parfois montrer leur existence seulement. Expérimentalement, on les observe en régime stationnaire, c'est à dire en alimentant le système par un signal d'amplitude temporelle $e^{-i\omega t}$ appelé signal monochromatique.

1.5.2.3 Opérateur différentiel

On définit l'**opérateur Nabla** :

$$\nabla := (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$$

et pour des entiers $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$ on note

$$(-i\nabla)^\alpha := (-i\partial_{x_1})^{\alpha_1} (-i\partial_{x_2})^{\alpha_2} (-i\partial_{x_3})^{\alpha_3}$$

qui est un opérateur différentiel d'ordre $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Le facteur $(-i)$ est utile pour la suite car $(-i\partial_{x_j})(e^{ikx}) = k_j e^{ikx}$. Avec cette convention, on peut écrire par exemple

$$-c^2 \Delta = c^2 \left((-i\partial_{x_1})^2 + (-i\partial_{x_2})^2 + (-i\partial_{x_3})^2 \right) = c^2 \left((-i\nabla)^{(2,0,0)} + (-i\nabla)^{(0,2,0)} + (-i\nabla)^{(0,0,2)} \right)$$

qui est un opérateur différentiel d'ordre $|\alpha| = 2$.

Définition 1.5.8. Un **opérateur différentiel** d'ordre $m \in \mathbb{N}$ est un opérateur de la forme

$$\hat{\Omega} = \Omega(x, -i\nabla, t) = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq m} \Omega_\alpha(x, t) (-i\nabla)^\alpha \quad (1.5.5)$$

avec des fonctions $\Omega_\alpha(x, t)$. On associe la fonction

$$\Omega(x, k, t) = \sum_{\alpha, |\alpha| \leq m} \Omega_\alpha(x, t) k^\alpha$$

de la position $x \in \mathbb{R}^3$, du vecteur d'onde $k \in \mathbb{R}^3$ et du temps (polynôme de degré m en k) appelée **symbole**, où on a remplacé $-i\nabla$ par k d'après le **principe de correspondance**.

Remarque 1.5.9. L'opérateur ainsi défini $\hat{\Omega}$ servira de générateur pour l'équation d'évolution $i\partial_t u = \hat{\Omega}u$ étudiée plus bas en (1.5.4). On a remarqué en 1.5.4 que Ω a l'unité d'une fréquence. La fonction

$$(x, k, t) \rightarrow \Omega(x, k, t)$$

est aussi appelée **relation de dispersion** (car voir ci-dessous, elle expliquera la dispersion spatiale des paquets d'ondes).

Exemple 1.5.10. En mécanique quantique, l'équation de Schrödinger s'écrit

$$i\hbar\partial_t u_t = \hat{H}u_t$$

avec la constante de Planck \hbar en $J.s$ et l'**opérateur de Schrödinger** \hat{H} décrivant une particule de masse m dans un champ de forces décrit par l'énergie potentielle $U(x)$ est

l'opérateur différentiel d'ordre 2 suivant

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(x) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left((-i\partial_{x_1})^2 + (-i\partial_{x_2})^2 + (-i\partial_{x_3})^2 \right) + U(x) = H(x, -i\nabla)\end{aligned}$$

Remarquons que l'équation de Schrödinger peut s'écrire $i\partial_t u_t = \hat{\Omega} u_t$ avec $\hat{H} = \hbar\hat{\Omega}$. Ainsi \hat{H} a l'unité de

$$E := \hbar\omega$$

qui est une énergie en Joules. Le symbole de \hat{H} appelé **Hamiltonien classique** est

$$H(x, k) = \frac{\hbar^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)}{2m} + U(x) = \frac{|\hbar k|^2}{2m} + U(x) = \frac{|p|^2}{2m} + U(x) \quad (1.5.6)$$

où l'on a défini le vecteur **impulsion**

$$p := \hbar k \in \mathbb{R}^3.$$

Exemple 1.5.11. Pour l'équation des ondes reformulée comme (1.5.2), en supposant que $c(x)$ peut dépendre de x , on a d'après (1.5.3)

$$\hat{\Omega} = c(x) \sqrt{-\Delta} = c(x) \sqrt{(-i\nabla)^2} = \Omega(x, -i\nabla)$$

avec le symbole

$$\Omega(x, k) = c(x) \sqrt{|k|^2} = c(x) |k| \quad (1.5.7)$$

1.5.3 Limite semi-classique de l'équation de Schrödinger

Définition 1.5.12. Pour une position $x \in \mathbb{R}^3$ et un vecteur d'onde $k \in \mathbb{R}^3$ donnés on associe un **paquet d'onde** de largeur $\sigma > 0$ fixée qui est la fonction

$$\varphi_{x,k}(x') = a e^{ikx'} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\|x' - x\|}{\sigma} \right)^2},$$

avec $a > 0$ de sorte que $\|\varphi_{x,k}\|_{L^2} = 1$.

Sa transformée de Fourier définie en (C.5.1) est donnée par (voir (C.6.1))

$$(\mathcal{F}\varphi_{x,k})(k') = a' e^{ixk'} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\|k' - k\|}{(1/\sigma)} \right)^2}$$

Les formules précédentes montrent que le module $x' \rightarrow |\varphi_{x,k}(x')|$ est une fonction Gaussienne de largeur $\Delta x = \sigma$ centrée en x . Le module de la transformée de Fourier $k' \rightarrow$

$|(\mathcal{F}\varphi_{x,k})(k')|$ est une fonction Gaussienne de largeur $\Delta k = 1/\sigma$ centrée en k . Remarquer que

$$\Delta x \Delta k = 1 \tag{1.5.8}$$

appelé **principe d'incertitude**. On introduit $\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$ qui est la longueur d'onde des oscillations de la fonction $\varphi_{x,k}(x')$. On supposera

$$\lambda = \frac{2\pi}{|k|} \ll \Delta x = \sigma \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad |k| \gg \frac{1}{\sigma}$$

on a le schéma suivant montrant que le paquet d'onde occupe une petite place de surface $\Delta x \Delta k = 1$ dans l'espace des phases (x, k) . On dit qu'il est **microlocalisé** dans l'espace des phases.

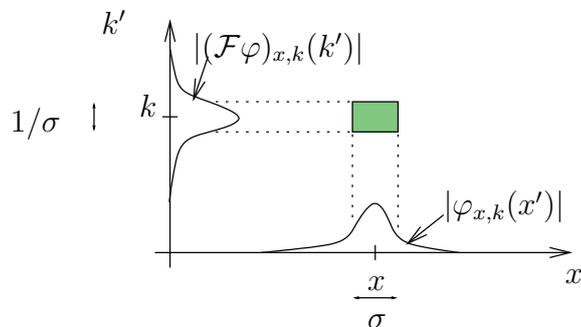


FIGURE 1.5.1 – Paquet d’onde

Le théorème suivant montre que les paquets d’ondes forment une base de l’espace des fonctions au sens où toute fonction se décompose (et se recompose) comme superposition de paquet d’ondes.

Théorème 1.5.13. “Décomposition en paquets d’ondes”. Toute fonction (ou distribution) $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ s’écrit

$$u(x') = \int (Tu)(x, k) \varphi_{x,k}(x') \frac{dx dk}{(2\pi)^3}$$

avec les composantes

$$(Tu)(x, k) = \langle \varphi_{x,k} | u \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\varphi_{x,k}(x')} u(x') dx'$$

appelée **transformée par paquet d’ondes** de u .

Remarque 1.5.14. La transformée par paquet d’ondes T généralise la transformée de Fourier \mathcal{F} . En effet en prenant $\sigma \rightarrow \infty$, on a $\varphi_{x,k}$ qui converge vers le mode de Fourier $e^{ikx'}$ et

$Tu \rightarrow \mathcal{F}u$. Au contraire pour $\sigma \rightarrow 0$, $Tu \rightarrow u$. La transformée par paquet d'onde se généralise et est utile dans beaucoup de domaines : de la théorie du signal (transformée par ondelettes pour la compression mp3, mp4), à la physique (transformée de Bargmann en mécanique quantique) à la géométrie algébrique (plongement de Kodaira).

Le résultat suivant est remarquable et est à la base de l'émergence de la dynamique Hamiltonienne (i.e. optique géométrique, mécanique de Hamilton et de Newton etc) dans la physique. Avant cela précisons une définition utile.

Définition 1.5.15. Une fonction (ou distribution) $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ est **microlocalisée au point (x, k) de l'espace des phases**, si pour tout point (x', k') loin de (x, k) pour la distance $d_\sigma^2 = \left(\frac{x'-x}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{|k'-k|}{1/\sigma}\right)^2$, alors $|\langle \varphi_{x',k'} | u \rangle| \ll 1$ est négligeable, dans la limite $d_\sigma^2 \rightarrow \infty$.

Exemple 1.5.16. un paquet d'onde $\varphi_{x,k}$ est microlocalisé au point (x, k) , d'après la formule explicite

$$|\langle \varphi_{x',k'} | \varphi_{x,k} \rangle| = \exp(-d_\sigma^2)$$

avec $d_\sigma^2 = \left(\frac{x'-x}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{|k'-k|}{1/\sigma}\right)^2$.

Remarque 1.5.17. De façon intuitive, u est microlocalisé au point (x, k) signifie que toute son énergie (ou sa norme) est contenue dans un voisinage du point (x, k) .

Théorème 1.5.18. “*Emergence de la dynamique Hamiltonienne, évolution d'un paquet d'onde*”.

Soit $\hat{\Omega} = \Omega(x, -i\nabla)$ un opérateur quelconque obtenu à partir d'un symbole $\Omega(x, k)$ comme dans (1.5.5). Supposons que $u(0) = \varphi_{x,k}$ est un paquet d'onde qui évolue selon l'équation de Schrödinger

$$i\partial_t u_t = \hat{\Omega} u_t \tag{1.5.9}$$

Alors pour tout t et $\lambda = \frac{2\pi}{k} \ll \sigma \ll 1$ assez petits, la solution ψ_t est microlocalisée sur la **trajectoire classique** $x(t), k(t)$ solution des **équations du mouvement de Hamilton**

$$\begin{aligned} \partial_t x_j &= \partial_{k_j} \Omega, & j &= 1, 2, 3, \\ \partial_t k_j &= -\partial_{x_j} \Omega, \end{aligned} \tag{1.5.10}$$

La vitesse du paquet d'onde $v = (\partial_t x_j)_j$ s'appelle aussi **vitesse de groupe** et l'équation $\Omega(x, k) = \omega$ s'appelle aussi **relation de dispersion**.

Exemple 1.5.19. Voici deux exemples très simple (à la base de la preuve du Théorème 1.5.18).

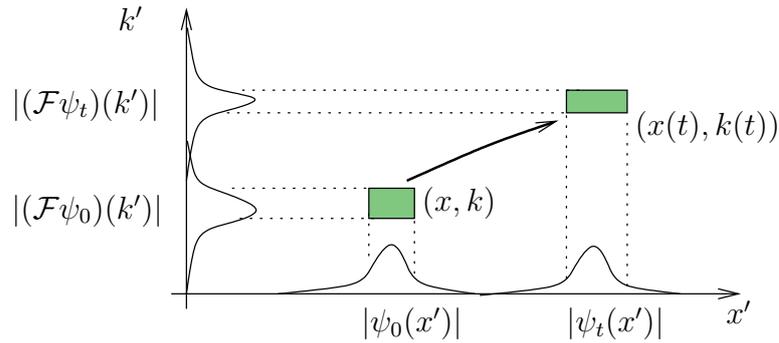


FIGURE 1.5.2 – Evolution d'un paquet d'onde

1. Si on considère $x, k \in \mathbb{R}$ et le cas particulier $\Omega(x, k) = \alpha k$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ constante, alors $\hat{\Omega} = -i\alpha\partial_x$ et on vérifie que $u_t(x) = u_0(x - \alpha t)$ vérifie l'équation de Schrödinger $i\partial_t u = -i\alpha\partial_x u = \hat{\Omega}u$. On observe que cette solution $u_t(x)$ se déplace à la vitesse α . Par ailleurs les équations de mouvement de Hamilton donnent $\partial_t x = \partial_k \Omega = \alpha$ et $\partial_t k = -\partial_x \Omega = 0$, qui est aussi une translation en x à la vitesse α .
2. Si on considère $x, k \in \mathbb{R}$ et le cas particulier $\Omega(x, k) = -\beta x$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ constante, alors $\hat{\Omega} = -\beta x$ et on vérifie que $u_t(x) = e^{i\beta x t} u_0(x)$ vérifie l'équation de Schrödinger $i\partial_t u = -\beta x u = \hat{\Omega}u$. On observe la transformée de Fourier en x de u_t est $(\mathcal{F}u_t)(k) = (\mathcal{F}u_0)(k - \beta t)$ et se déplace à la vitesse β selon k . Par ailleurs les équations de mouvement de Hamilton donnent $\partial_t x = \partial_k \Omega = 0$ et $\partial_t k = -\partial_x \Omega = \beta$, qui est aussi une translation en k à la vitesse β .

Démonstration. Près d'un point (x, k) de l'espace des phases, on approxime $\Omega(x, k)$ par son développement à l'ordre 1 en (x, k) :

$$\Omega(x, k) = -\beta x + \alpha k$$

et pour ce modèle (voir détails de calcul [ici](#) p.17, [Faure \(2014\)](#)) on a d'une part $\partial_t x = \partial_k \Omega = \alpha$, $\partial_t k = -\partial_x \Omega = \beta$ donc un flot de translation à la vitesse (α, β) dans l'espace des phases (x, k) . D'autre part on peut résoudre exactement l'équation de Schrödinger $i\partial_t u = \hat{\Omega}u$ avec $\hat{\Omega} = -\beta x + \alpha(-i\nabla)$ montrant que $u(x)$ se translate à la vitesse α et sa transformée de Fourier $(\mathcal{F}u)(k)$ se translate à la vitesse β . Ainsi le Théorème est exact dans ce cas. \square

Remarque 1.5.20. Le principe d'incertitude est que la taille d'un paquet d'onde vérifie $\Delta x \Delta k = 1$ est "incompressible" dans l'espace des phases. La conséquence est qu'un paquet d'onde est supporté par plusieurs trajectoires classiques $x(t), k(t)$ et si celles ci se dispersent alors l'onde ψ_t se disperse en x et k . Pour cette raison la fonction $\omega(x, k) = \Omega(x, k)$ est parfois appelée relation de dispersion.

1.5.4 Propriétés générales

On rappelle quelques propriétés générales des trajectoires classiques Hamiltoniennes.

— Conservation de la fréquence (ou énergie)

$$\omega = \Omega(x(t), k(t)) \quad : \text{constante} \quad (1.5.11)$$

Démonstration. $\partial_t \omega = \partial_t (\Omega(x(t), k(t))) = (\partial_x \Omega)(\partial_t x) + (\partial_k \Omega)(\partial_t k) = (\partial_x \Omega)(\partial_k \Omega) + (\partial_k \Omega)(-\partial_x \Omega) = 0.$ \square

— Conservation du volume $\mu = dxdk$ dans l'espace des phase (théorème de Liouville).

Démonstration. Le flot est généré par le champ de vecteur $X = (\partial_t x, \partial_t k) = (\partial_k \Omega, -\partial_x \Omega)$. Sa divergence est $\text{div} X = \partial_x X_x + \partial_k X_k = \partial_{x,k}^2 \Omega - \partial_{k,x}^2 \Omega = 0.$ \square

1.5.5 Exemples

Commençons par l'exemple le plus connu, pourtant tardif dans l'histoire, qui est l'équation de Schrödinger.

Exemple 1.5.21. Pour l'équation de Schrödinger $i\hbar \partial_t u = \hat{H}u$, on a vu en (1.5.6) que la Hamiltonien classique est

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x),$$

avec le changement d'échelle $p = \hbar k$ et $E = \hbar \omega$ qui fait que les équations de mouvement (1.5.10) s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial k} = \frac{\partial \hbar \Omega}{\partial \hbar k} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \frac{dp}{dt} = \hbar \frac{dk}{dt} = -\hbar \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\partial_x U = -\text{grad} U = F(x) \quad : \text{force} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = m \frac{dx}{dt} \quad : \text{impulsion} = \text{quantité de mouvement} \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = F(x) \quad : \text{équation de Newton (1685)} \end{cases}$$

Rappelons que historiquement Newton a ainsi expliqué pourquoi la lune subissant une force dirigée vers la terre, tourne autour de la Terre.

Passons maintenant à l'équation des ondes qui concerne plus ce cours et qui historiquement a été étudiée de ce point de vue microlocal par Hamilton en 1834.

Exemple 1.5.22. Pour l'équation d'onde sonore avec c constant, on a vu en (1.5.7) que $\Omega(x, k) = c|k|$, supposant c constant. Alors d'après les équations de mouvement (1.5.10) on a $\partial_t k = -\partial_x \Omega = 0$ donc $k \in \mathbb{R}^3$ est constant et

$$\partial_t x_j = \partial_{k_j} \Omega = c \partial_{k_j} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2} = c \frac{2k_j}{2|k|} = c \frac{k_j}{|k|},$$

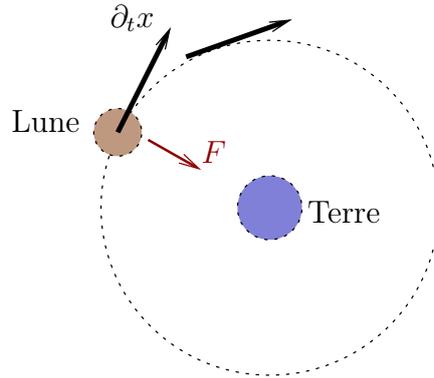


FIGURE 1.5.3 – Newton (et Hooke , voir [Arnold \(1990\)](#)) ont découvert que la lune subit une force F dirigée vers la Terre qui modifie infinitésimalement la vitesse de la lune d’après l’équation $m\partial_t(\partial_t x) = F$. Par conséquent, la lune tourne autour de la Terre (et ne tombe pas sur elle).

donc

$$\partial_t x = c \frac{k}{|k|} \tag{1.5.12}$$

qui est un vecteur colinéaire à k et de norme c . Autrement dit le paquet d’onde sonore $\varphi_{x(t),k}$ se déplace en ligne droite à la vitesse c dans la direction de k qui est constant.

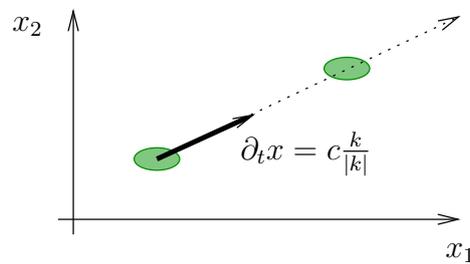


FIGURE 1.5.4 – Si $c(x) = c$ est constant, un paquet d’onde se déplace en (x_1, x_2) rectilignement à vitesse constante c .

Exemple 1.5.23. Pour l’équation d’onde sonore avec $c(x)$ variable, on a vu en (1.5.7) que $\Omega(x, k) = c(x) |k|$. Alors d’après les équations de mouvement (1.5.10) un paquet d’onde évolue selon

$$\partial_t k = -\partial_x \Omega = -|k| \text{grad}(c)$$

qui n’est pas nul donc $k(t)$ peut varier dans la direction opposée $\text{grad}(c)$ qui agit comme une “force”, et

$$\partial_t x = \partial_k \Omega = c \frac{k}{|k|}$$

comme en (1.5.12) montrant que la vitesse est colinéaire à $k(t)$ et de norme

$$\|\partial_t x\| = c(x)$$

qui dépend du point. Ces équations du premier ordre en t déterminent la trajectoire. Voir figure.

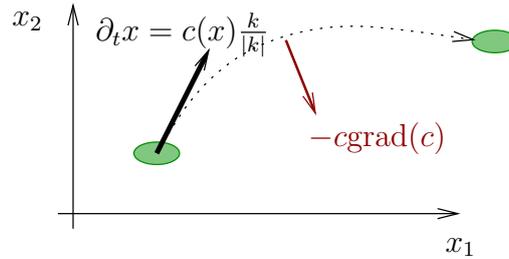


FIGURE 1.5.5 – Si $c(x)$ est variable, un paquet d’onde se déplace en (x_1, x_2) à vitesse constante $|\partial_t x| = c$ colinéaire à k mais subit une force $F = -|k| \text{grad}(c)$ dirigée vers les plus faibles valeurs de c .

Exercice 1.5.24. Réfraction : Loi de Snell (1621)-Descartes (1637) (trouvée avant par Ibn Sahl (983) à Bagdad). Supposons que dans l’espace $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, il y a une interface en $x_1 = 0$, de sorte que pour $x_1 < 0$ on a $c(x) = c$ et pour $x_1 > 0$ on a $c(x) = c'$ avec $c' < c$. Dédurre de (1.5.7), de l’équation de mouvement de Hamilton (1.5.10) et de la conservation de l’énergie (1.5.11) que : dans chaque domaine un rayon (lumineux ou sonore) se déplace en ligne droite et à l’interface on a

$$\frac{1}{c} \sin \theta = \frac{1}{c'} \sin \theta' \quad (1.5.13)$$

où θ (respect. θ') est l’angle du rayon avec la normale de l’interface. Voir schéma.

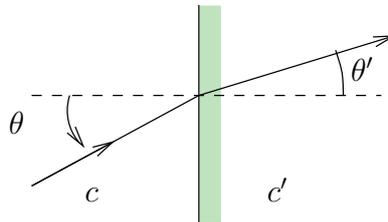


FIGURE 1.5.6 – Si $c(x) = c, c'$ prend deux valeurs différentes de part et d’autre d’une interface alors la rayon est dévié d’après la loi de Snell-Descartes (1.5.13).

Remarque 1.5.25. En optique, on définit l’indice du milieu par $n(x) = \frac{c_{\text{vide}}}{c(x)}$ où c_{vide} est la vitesse de la lumière dans le vide.

Solution : L'énergie est $\Omega(x) = c(x_1) |k|$ est indépendante de x_2 . L'équation de mouvement (1.5.10) donne $\partial_t k_2 = -\partial_{x_2} \Omega = 0$ donc $k'_2 = k_2$ à l'interface. La conservation de l'énergie à l'interface donne

$$c \|k\| = c' \|k'\|$$

On a

$$\sin \theta = \frac{k_2}{\|k\|}, \quad \sin \theta' = \frac{k'_2}{\|k'\|}.$$

On déduit

$$\sin \theta' = \frac{k'_2}{\|k'\|} = \frac{k_2}{\frac{c}{c'} \|k\|} = \frac{c'}{c} \sin \theta$$

et donc (1.5.13).

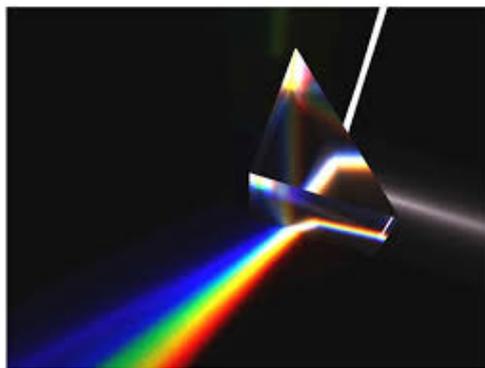
Exemple 1.5.26. Pour l'équation des ondes lumineuses en milieu dispersif, on a

$$\Omega(x, k) = cf(k)$$

avec la fonction $f(k)$ non linéaire mais proche de $|k|$. Un développement limité donne

$$f(k) = |k| (1 + B |k|^2 + C |k|^4 + \dots)$$

appelé **loi de Cauchy** en optique. Par exemple $B = 4,5 \cdot 10^{-10} \text{nm}^2$ dans le verre. La conséquence est que d'après les équations de mouvement de Hamilton (1.5.10), la trajectoire dépend de $|k|$ et donc de l'énergie $E = cf(k)$ qui correspond à la fréquence ω d'après l'équation de Schrödinger (1.5.2). Cela implique que des rayons de fréquences ω différentes ont des trajectoires différentes, phénomène appelé **dispersion**, comme dans le phénomène d'**arc en ciel**, ou de la dispersion de la lumière observée dans un prisme. Noter que la présentation que nous donnons ici diffère des présentations habituelle par le fait que nous ne considérons pas des ondes planes monochromatique, mais seulement le phénomène de dispersion comme une conséquence des équations de Hamilton. Cela nous semble plus naturel.



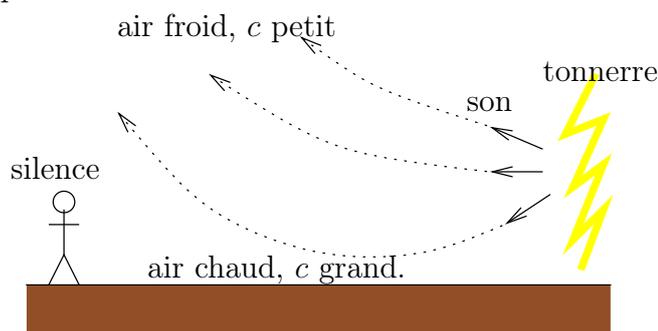
Exemple 1.5.27. “Mirage acoustique”

Référence : [Pour la science n298 \(2002\) Courty-Kierlyk](#).

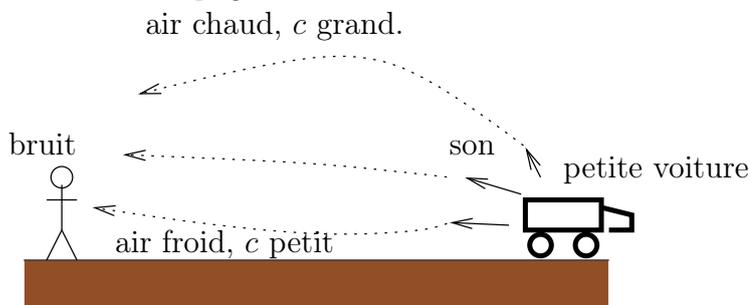
L'équation (??) a montré que si la vitesse du son $c(x)$ dépend du point x alors le rayon sonore subit une accélération normale selon la direction de $-\text{grad}(c)$.

Cela se manifeste par les effets suivants :

- En été, le soir, l'air est plus chaud au sol que en altitude et donc $c(x)$ décroît aussi avec l'altitude (d'après (1.2.8), à pression fixée). Les trajectoires sont donc déviées vers le haut. Il est possible d'observer des orages aux loin, mais de ne pas entendre de tonnerre. On parle “d'éclairs de chaleur”.

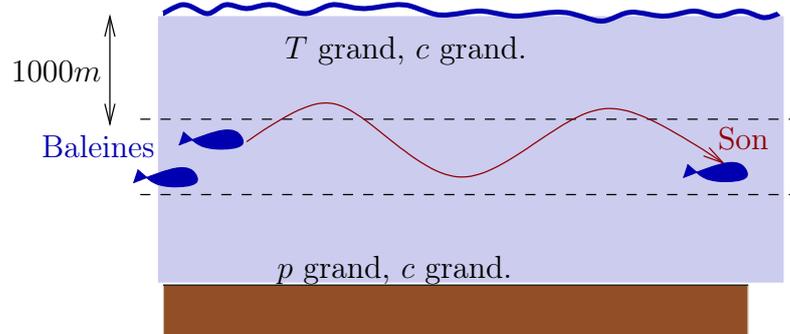


- En hiver, parfois (situation d'inversion de température), l'air est plus froid au sol que en altitude et donc $c(x)$ croît aussi avec l'altitude. Les trajectoires sont donc déviées vers le bas. Il est possible d'entendre assez fortement une voiture qui passe pourtant loin dans une campagne calme.



- De même dans l'océan si la surface est plus chaude, les sons sous marins n'atteignent pas la surface. Cet effet a été observé sans être compris en 1941, lorsque les américains écoutaient les sous marins depuis la surface et que l'après midi (lorsque la surface est plus chaude) le son des sous marins éloignés ne leur parvenait plus. Ce fut appelé “l'effet de l'après midi”, rapidement expliqué par des physiciens.
- Si $c(x)$ varie avec l'altitude mais est minimum dans une strate intermédiaire alors cette strate va agir comme un **canal conducteur** ou “puits de potentiel”.
 - L'histoire raconte que les coups de canons pour l'enterrement de la reine victoria le 22/01/1901 n'ont pas été entendus en Angleterre mais en écosses à 400km de distance.
 - Dans l'océan, vers une profondeur de 1000m, la valeur de $c(z)$ est minimale,

ainsi les rayons sonores sont capturés dans ce canal appelé **canal SOFAR** et découvert en 1943. Les **baleines communiquent** entre elles à longues distances (1000 km) en se plaçant à cette profondeur. De plus elle envoient des sons qui font échos sur des montagnes sous-marines et leur permette de se localiser dans l'océan. Il semble en effet qu'elles mémorise les positions des ces montagnes dans l'océan. **Vidéo, chant des baleines à bosse.**



Vidéos

- Cette vidéo est une simulation numérique d'un **paquet d'onde dans le stade.**
- **Retournement temporel d'une onde de surface.**
- Ondes (solutions numériques) et représentation dans l'espace des phases. **Correspondance classique-ondulatoire. Ondes quantique.**

1.5.6 Formule de Weyl semi-classique

Considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ quelconque. On s'intéresse au spectre $(\omega_n^2)_n$ de l'opérateur Laplacien Δ dans ce domaine ou tout autre opérateur différentiel. On a été capable de calculer ce spectre dans des cas particuliers, par exemple en (1.3.10) ou (1.3.19), mais dans un cas général cela est impossible (ou seulement numériquement avec une précision donnée). Il y a cependant une formule approximative et très simple qui peut être très utile, appelée formule de Weyl ou formule du comptage d'états ondulatoires. Elle est associée au spectre d'une famille opérateur (pseudo-)différentiel $\hat{\Omega} = \Omega(x, -i\nabla)$ comme en (1.5.5).

Voici l'énoncé dans le cas général.

Théorème 1.5.28. “Loi de Weyl”. *Considérons le spectre $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots$ d’un opérateur $\hat{\Omega} = \Omega(x, -i\nabla)$ auto-adjoint défini par un symbole $\Omega(x, k)$, avec $x, k \in \mathbb{R}^d$, c’est à dire*

$$\hat{\Omega}u_n = \omega_n u_n.$$

Pour un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, le nombre de valeurs propres dans cet intervalle est dans la limite $b \rightarrow \infty$,

$$\#\{\omega_n \in [a, b]\} = \frac{\text{Vol}(\Omega^{-1}([a, b]))}{(2\pi)^d}$$

où $\Omega^{-1}([a, b]) = \{(x, k) \text{ t.q. } \Omega(x, k) \in [a, b]\}$ est l’ensemble des points de l’espace des phases dont l’énergie est dans l’intervalle $[a, b]$.

Remarque 1.5.29. L’interprétation de cette formule est que un “état ondulatoire” élémentaire (ou quanta) occupe un volume $(2\pi)^d$ dans l’espace des phases (x, k) . C’est directement relié au **principe d’incertitude** (1.5.8).

Appliquons cette formule à des cas simples déjà étudiés pour vérifier son efficacité.

Exemple 1.5.30. Pour l’équation d’onde dans un intervalle $x \in [0, L]$ en dimension $d = 1$, on a $\Omega(x, k) = c|k|$, donc

$$n(\omega) = \#\{\omega_n \in [0, \omega]\} \sim \frac{\text{Vol}(\Omega^{-1}([0, \omega]))}{2\pi} = \frac{L(2k_{\max})}{2\pi}$$

avec $k_{\max}c = \omega$ donc

$$n = \#\{\omega_n \in [0, \omega]\} \sim \frac{L\omega}{c\pi}$$

Inversement pour $n \rightarrow \infty$,

$$\omega_n \sim \frac{c\pi}{L}n$$

Étonnamment, on retrouve la formule exacte du spectre de (1.3.10).

Exemple 1.5.31. Pour l’équation d’onde dans un rectangle $x \in [0, L_1] \times [0, L_2]$ en dimension $d = 2$, on a $\Omega(x, k) = c|k|$, donc $\Omega(x, k) \in [0, \omega] \Leftrightarrow |k| \leq \frac{\omega}{c}$

$$\begin{aligned} n(\omega) &= \#\{\omega_n \in [0, \omega]\} \sim \frac{\text{Vol}(\Omega^{-1}([0, \omega]))}{(2\pi)^2} = \frac{L_1 L_2 \left(\pi \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)}{(2\pi)^2} \\ &= \frac{L_1 L_2 \omega^2}{4\pi c^2} \end{aligned}$$

et on retrouve la formule (1.3.20).

1.6 Micros, enregistrements et haut parleurs

Dans cette section on décrit la transformation entre une onde sonore et un signal électrique. Le micro-phone crée un signal électrique à partir d'une onde sonore et inversement, le haut-parleur crée une onde sonore à partir d'un signal électrique.

Pour décrire le fonctionnement d'un microphone ou haut parleur il faut décrire le couplage mécanique entre les ondes sonores et les matériaux du microphone ou du haut parleur.

Microphones Voir [microphones sur wikipedia](#).

Un microphone transforme le signal $p(t) = p(x, t) \in \mathbb{R}$ des fluctuations de pression de l'air en un point donné, en un signal électrique $s(t) \in \mathbb{R}$.

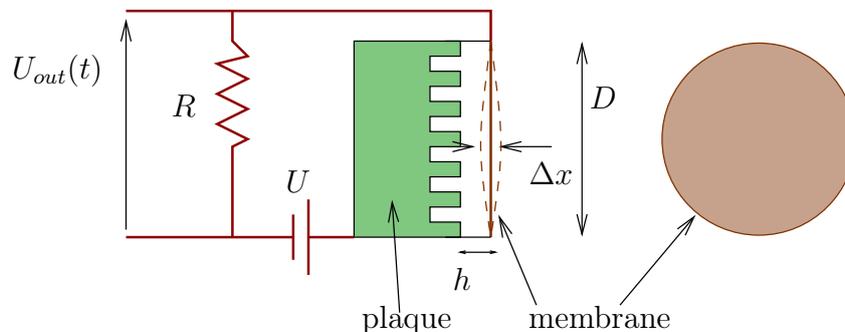
- Le **microphone dynamique** ne nécessite pas d'alimentation. C'est une membrane attachée à un bobinage placé dans un champ magnétique statique (créé par un aimant). Sous l'effet des fluctuations de pression $p(t)$ de l'air, la membrane et donc le bobinage bougent, et par effet d'induction cela crée un courant induit $s(t)$.
- Le **microphone à condensateur** (ou électrostatique) est décrit plus bas. Il nécessite une alimentation, i.e. une source d'énergie.

1.6.1 Schéma de fonctionnement du microphone à condensateur

Inventé par Wente en 1917.

Références : [Schroeder et al. \(2007, chap24\)](#), [Eargle \(2012, chap3,p23\)](#).

Voici un modèle simplifié de microphone à condensateur.



- **Une membrane** en forme de disque de diamètre $D \sim 12\text{mm}$, recouverte d'une mince couche de métal (ex : or), est tendue. Sous l'effet de fluctuations de pression $p(t)$, son amplitude d'oscillation $x(t)$ est donnée par le modèle

$$m\partial_t^2 x = -Kx - \gamma\partial_t x + p(t)$$

où $m\partial_t^2 x$ est le terme d'inertie de la membrane, $-Kx$ la force de rappel liée à la tension, $-\gamma\partial_t x$ la force d'amortissement et $p(t)$ la force de pression imposée par l'air. Si $p(t) = p_0 e^{i\omega t}$ est monochromatique, la solution stationnaire de cette équation est

$x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ avec une amplitude donnée par (C.7.2) :

$$|x_0(\omega)| = \frac{|p_0|}{((K - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)^{1/2}}$$

avec une fréquence de résonance de l'ordre de $\omega_0 \sim \sqrt{\frac{K}{m}} \sim 10\text{kHz}$. Pour des amplitudes de pression $|p_0| \sim 1\text{Pa}$ (soit 94dB), on a des amplitudes de déplacement de la membrane $|x_0| \sim 10^{-2}\mu\text{m}$.

- La membrane est posée à une distance $h \sim 20\mu\text{m}$ d'une plaque et l'ensemble forme un **condensateur** électrique de surface $S = \frac{\pi D^2}{4}$ épaisseur h . Pour amortir les vibrations mécaniques de la membrane (i.e. augmenter γ), il y a des cavités d'air dans la plaque. Noter que $h \gg |x_0|$. La capacité au repos est

$$C_0 = \epsilon \frac{S}{h} = 5.10^{-11}\text{F}$$

avec $\epsilon = 8.8 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$. Si la membrane bouge, $h(t) = h + x(t)$ et la capacité $C(t) = \epsilon \frac{S}{h(t)}$ varie.

- Ce condensateur est relié en série à une source de tension $U = 60\text{V}$, une résistance $R = 10^9\Omega$. L'équation de ce circuit de ce circuit est

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{1}{R} \left(U - \frac{Q(t)}{C(t)} \right)$$

où $Q(t)$ est la charge au borne du condensateur. Au final la tension au borne de la résistance est

$$U_{\text{out}}(t) = U \frac{C(t)}{C_0}$$

Le système total est entouré d'une grille formant une **cage de faraday**.

Chapitre 2

Analyse des signaux sonores

Références :

- Sur analyse des signaux : cours de base : [4 livres de J.O.Smith](#), livre plus avancé : [livre de S. Mallat](#),

Applications Android gratuites conseillées pour ce cours :

- [sonomètre](#) : mesure l'intensité d'un son en décibels.
- [Lexis Audio Editor](#) : permet de visualiser le signal d'un son enregistré.
- [Spectroid](#) : permet de faire une transformée temps-fréquence d'un signal sonore en temps réel.

2.1 Définitions d'un signal et échantillonnage

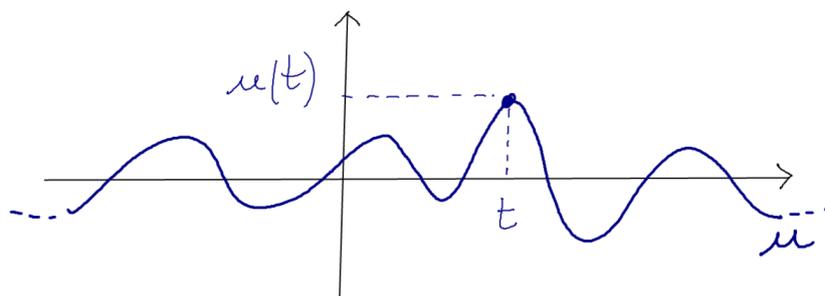
[Video de cette section](#)

2.1.1 Signal sonore

Définition 2.1.1. Un **signal sonore** est une **fonction**

$$u : t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}$$

où t est la date et $u(t)$ correspond par exemple à la **fluctuation de pression** $u(t) = p(x, t)$ au point d'entrée x fixé d'une oreille ou d'un microphone.



2.1.2 Échantillonnage d'un signal

Éventuellement, lire avant la section B.4 sur le codage des nombres en binaire.

En pratique, le signal sonore est **échantillonné** par une **carte son** (qui permet la conversion analogique/numérique des signaux).

Notation 2.1.2. La notation $\llbracket a, b \rrbracket$ signifie l'ensemble des entiers n dans l'intervalle $a \leq n \leq b$. Par exemple $\llbracket 0, 3 \rrbracket = \{0, 1, 2, 3\}$.

Définition 2.1.3. Un **signal échantillonné** est :

— un nombre fini N de valeurs du signal,

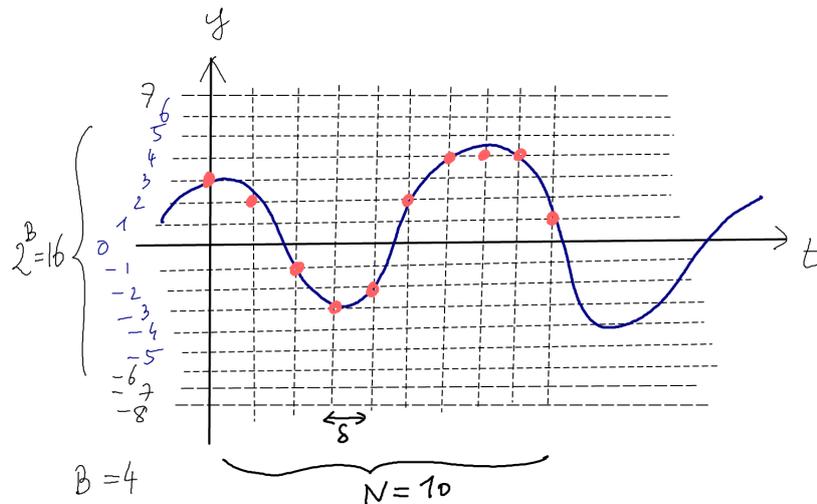
$$u = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_{N-1}), \quad u_j \in \llbracket -2^{B-1}, 2^{B-1} - 1 \rrbracket, \quad j \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket,$$

— où chaque valeur est codée avec un nombre B de bits. $B = 8, 16, 24, 32, 64$ de sorte qu'une valeur u_j est un entier dans l'intervalle $\llbracket -2^{B-1}, 2^{B-1} - 1 \rrbracket$. Ce codage appelé **Complément à deux**.

— à des d'instants t_j espacés d'une durée $\delta > 0$ appelé **période d'échantillonnage**, par exemple $\delta = \frac{1}{44100} s$, (ainsi la fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{\delta} = 44100 \text{ Hz}$ est supérieure à 20000 Hz qui est la limite supérieure des fréquences humainement audibles). Ainsi

$$t_j = j\delta, \quad j \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket,$$

$$u_j \approx u(t_j)$$



Exemple 2.1.4. $N = 10^5$ valeurs, période d'échantillonnage $\delta = \frac{1}{44100}$ s. donnera une durée totale $D = N\delta = \frac{10^5}{44100} = 2.26$ s. La valeur $B = 4$ donne $2^3 = 8$. $B = 8$ donne $2^7 = 128$, $B = 32$ donne $2^{31} \approx 10^9$.

Exercice 2.1.5. Combien y a-t-il d'échantillons N dans un signal de durée $D = 10$ mn qui est échantillonné avec un pas de temps $\delta = \frac{1}{44100}$ s. ?

Solution 2.1.6.

$$N = \frac{D}{\delta} = \frac{10 \text{ mn}}{\frac{1}{44100} \text{ s}} = 10 \times 60 \times 44100 = 26.46 \cdot 10^6$$

Remarque 2.1.7. Pour les représentations du signal, il peut être utile d'effectuer un changement d'échelle pour avoir des valeurs dans l'intervalle fixe $[-1, 1]$. Par exemple avec $B = 8$ bits, on a des échantillons $u_j \in \llbracket -128, +127 \rrbracket$ à valeur entière et si on divise chaque valeur par l'amplitude maximale qui est $128 = 2^7$, on obtient un signal

$$v_j = \frac{1}{2^7} u_j \in [-1, 1],$$

qui varie avec des pas de valeur $\frac{1}{2^7} \approx 0.01$. Dans les exemples ci-dessous, avec les logiciels audacity et python on utilisera ces valeurs v_j redimensionnées.

Exercice 2.1.8. Pour un signal codé avec $B = 16$ bits, quelles sont les valeurs entières possibles d'un échantillon u_j ? Un signal enregistré sur ordinateur, avec $N = 25 \cdot 10^6$ échantillons, codé en 16 bits occupe combien d'octets en mémoire ? (1 octet = 8 bits)

Solution 2.1.9.

$$u_j \in \llbracket -2^{16-1}, +2^{16-1} - 1 \rrbracket = \llbracket -32768, +32767 \rrbracket$$

16bits = 2×8 bits = 2octets. Donc le signal occupe $N \times 2 = 50 \cdot 10^6$ octets = 50 Mo en mémoire.

2.1.2.1 (*) Remarques avancées

Remarque 2.1.10. On peut penser à un signal échantillonné de différentes façons :

1. un **vecteur** à N composantes réelles $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$.
2. une **combinaison linéaire de distributions de Dirac**¹, aux point $t_j = j\delta$:

$$u = \sum_{j=0}^{N-1} u_j \delta_{j\delta}$$

appelé parfois **peigne de Dirac**. (Problème de notations : attention à la confusion possible entre le pas de temps δ et la distribution de Dirac δ)

Remarque 2.1.11. En informatique, les signaux audio échantillonnés (mono ou stéréo) sont stockés en mémoire selon différentes conventions. La plus courante est appelée le **format WAV**, c'est un format où les données (u_0, u_1, \dots) sont écrites à la suite sous formes d'octets. Le format **mp3** est aussi un format très utilisé, mais les données sont écrites après un algorithme de compression.

2.1.3 Mesure de l'intensité en décibels

Pour mesurer l'amplitude d'un signal, on utilise parfois une échelle **logarithmique** qui est plus proche de la perception humaine que l'échelle linéaire. Voici une définition très utilisée appelée les décibels. Il s'agit d'une mesure relative d'intensité. En section 1.3.6 on a déjà présenté cette définition dans un cadre physique, où l'on a considéré l'intensité par rapport à une intensité de référence qui était l'intensité minimale perceptible. Ici, comme on considère un signal numérique $t \rightarrow u(t)$ la valeur de référence sera (arbitrairement) la valeur $u(t) = 1$.

La Section B.2 rappelle la notion de exposants et logarithmes.

1. Par définition, la **distribution de Dirac** δ ou δ_0 appliquée à une fonction u donne sa valeur $u(0)$ en $x = 0$. On écrit $\delta_0(u) = u(0)$. Plus généralement la distribution de Dirac δ_x en x est définie par $\delta_x(u) = u(x)$. Attention, δ_x n'est pas une fonction, mais abusivement on écrit

$$u(x) = \langle \delta_x | u \rangle = \int \delta_x(y) u(y) dy \tag{2.1.1}$$

ou $u(x) = \int \delta(y-x) u(y) dy$. La distribution de Dirac δ_x est aussi appelée **impulsion** en théorie du signal.

Définition 2.1.12. Si $u : t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}$ est un signal, on définit l'**intensité** en **décibels** (dB) à l'instant t par

$$\text{dB}(t) = 10 \text{Log}_{10}(I(t))$$

où l'**intensité** ou l'énergie d'un signal est donnée par l'amplitude au carré :

$$I(t) = (u(t))^2 = |u(t)| \times |u(t)|$$

Remarque 2.1.13. On peut écrire $\text{dB}(I)$ directement en fonction de l'amplitude $|u(t)|$:

$$\begin{aligned} \text{dB}(I) &= 10 \text{Log}_{10}(I) \\ &= 10 \text{Log}_{10}(|u(t)|^2) = 20 \text{Log}_{10}(|u(t)|) \end{aligned}$$

Le choix du coefficient 10 vient du fait qu'une variation de ± 1 dB correspond à la variation la plus petite décelable par la perception humaine. Par ailleurs $\Delta I = 120\text{dB}$ est à peu près l'intervalle total entre un signal trop faible (non décelable) et trop fort (destructeur de notre appareil auditif).

Exercice 2.1.14. Si on multiplie par 2 le signal c'est à dire $u'(t) = 2u(t)$, que devient l'intensité $I(t)$ et que devient la mesure en décibels $\text{dB}(I(t))$?

Solution 2.1.15. On a $I' = (u')^2 = (2u)^2 = 4u^2 = 4I$. Donc

$$\begin{aligned} dB' &= 10 \text{Log}_{10}(I') = 10 \text{Log}_{10}(4I) = 10 \text{Log}_{10}(I) + 10 \text{Log}_{10}(4) \\ &= dB + 10 \text{Log}_{10}(4) \approx dB + 10 \times 0.6 \approx dB + 6 \end{aligned}$$

Retenir de cet exercice que **un facteur 2 sur l'amplitude est équivalent à une augmentation de 6 dB sur l'intensité** en dB et inversement. Or un facteur 2 correspond à décaler d'un bit l'écriture de l'amplitude en base 2.

Exercice 2.1.16. Si un signal numérique est codé sur $B = 16$ bits, quelle variation en dB (décibels) cela permet t-il entre l'amplitude la plus faible et la plus forte (on parle du **rapport signal/bruit**) ? et pour un signal codé sur $B = 32$ bits ? Comparer aux variations de notre perception (120dB).

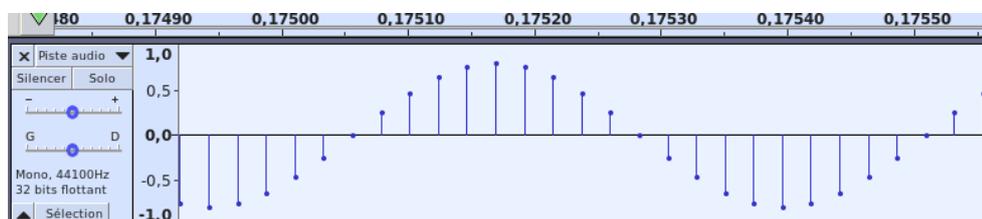
Solution 2.1.17.

- Si on a un signal codé sur 16bits, le rapport entre l'amplitude minimale 1 et maximale $2^{16-1} = 2^{15}$ est de 2^{15} ce qui correspond à une amplitude en intensité $15 \times 6 = 90\text{dB}$ (c'est le rapport signal sur bruit du codage). Conséquence pratique : dans ce cas, il est inutile d'utiliser des filtres qui filtrent plus que 90dB.
- Pour 32 bits, cela donne une amplitude $(32 - 1) 6 = 186$ dB largement supérieure aux variations de notre perception (120dB).

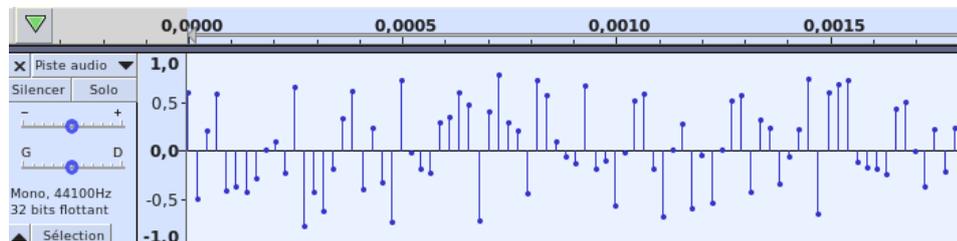
Video des exemples suivants

Exercice 2.1.18. (TP) “**Première utilisation de Audacity**”. Avec le logiciel **audacity**, **A.2**,

- Créer un signal échantillonné de **forme sinusoïdale** en faisant :
 - En bas à gauche, choisir “Taux du projet” : 44100Hz.
 - Menu :Générer/Tonalité/Sinusoïde, fréquence 2205Hz, amplitude 0.8, durée 0.5 sec.
 - Observer le signal (zoomer avec la souris). Voir figure ci-dessous.
 - Ecouter.
 - Calculer le nombre d’échantillons par période et vérifier.



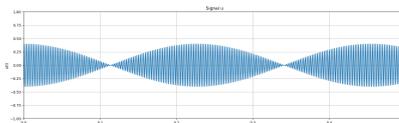
- Créer un signal où chaque valeur $u_j \in [-1, 1]$ est choisi **au hasard** indépendamment des autres. Ce signal est appelé “**bruit blanc**”. Pour cela Menu :Générer/Tonalité/Bruit/Blanc. écouter.



2.1.4 Battements

Exercice 2.1.19. (TP) “**Battements avec Audacity**”.

- Avec le logiciel **audacity**, avec la commande “Pistes/Ajouter nouvelle piste mono” et “Générer/tonalité”, créer sur deux pistes différentes un signal de fréquence $f = 440$ Hz et $f_2 = 444$ Hz. Et faire la somme sur une nouvelle piste à l’aide de la commande “Pistes/Mix/rendu vers nouvelle piste”. On obtient la superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquence $f = 440$ Hz et $f_2 = 444$ Hz (on verra que c’est une différence de $1/6$ de demi-ton, à la limite du perceptible).



- Vérifier que que l'on entend des **battements** dont la fréquence est

$$f_{\text{batt}} = |f_2 - f_1| = 4 \text{ Hz} \quad (2.1.2)$$

(i.e. on entend 4 battements par seconde).

- Donner une explication simple de cette formule ?

Solution 2.1.20.

-
- Fichiers **battement.wav** ou sur canaux séparés : **battement_stereo.wav**.
- Explication simple de la formule de battements (2.1.2) (explication plus formelle ci-dessous) : Si à la date $t = 0$ les deux signaux “sont en phase” c’est à dire que les maxima coïncident alors ensuite ils vont se décaler puis à nouveau se retrouver en phase à la date t lorsque le signal de plus haute fréquence $f_2 = \frac{1}{T_2}$ aura pris une avance d’une période, c’est à dire faisant $N + 1$ oscillations, lorsque le signal de fréquence $f_1 = \frac{1}{T_1}$ fait N oscillations. Cela donne $T_{\text{bat.}} = (N + 1)T_2 = NT_1$, donnant $N = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$ et

$$f_{\text{bat}} = \frac{1}{T_{\text{bat}}} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} = f_2 - f_1.$$

Exercice 2.1.21. (TP) “Battements avec Python”.

- Le programme python suivant, **sinus_wav_file.py**, qui génère un signal sinusoïdal de fréquence $f = 440\text{Hz}$ et durée $D = 2\text{sec.}$, défini par :

$$u_j = 0.2 \cos(2\pi f t_j)$$

avec des instants $t_j = j\delta$, $j = 0 \rightarrow N - 1$, avec $N = \lceil \frac{D}{\delta} \rceil$ données et le pas de temps $\delta = 1/44100\text{Hz}$. Ensuite le programme écrit ce signal dans un fichier sinus.wav au format wav. Executer le programme. Ouvrir le fichier sinus.wav avec audacity et écouter.

- Modifier le programme pour générer le signal suivant

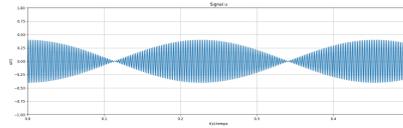
$$u(t) = 0.2 \cos((2\pi) 3ft) + 0.1 \cos((2\pi) 4ft)$$

et l’écouter et visualiser avec audacity. Qu’entendez vous ? le signal est-il périodique ?

- Modifier le programme pour générer le signal suivant

$$u_1(t) = 0.2 \cos(2\pi ft) + 0.2 \cos((2\pi)(f + \epsilon)t) \quad (2.1.3)$$

avec $\epsilon = 4\text{Hz}$. Expliquer ces phénomènes appelés « **battements** » et calculer leur période, en utilisant une **formule de trigonométrie** que l’on démontrera au préalable à partir de la définition $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.



4. Essayer en stéréo : générer les signaux $u_1(t) = 0.2 \cos(2\pi ft)$ et $u_2(t) = 0.2 \cos((2\pi)(f + \epsilon)t)$ sur deux canaux différents. Entendez vous des battements ?

Solution 2.1.22. Programme `battements.py`. Fichiers `battement.wav` et `battement_stereo.wav`.

Explication de la formule de battements (2.1.2) : On a besoin de la formule de trigonométrie

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

qui se démontre à partir de la formule de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. On l'applique à (2.1.3) avec $a = 2\pi ft$ et $b = (2\pi)(f + \epsilon)t$, avec $\epsilon = 0.01$, donnant $\frac{a+b}{2} = 2\pi\left(f + \frac{\epsilon}{2}\right)t$, $\frac{b-a}{2} = 2\pi\frac{\epsilon}{2}t$,

$$u_1(t) = 0.4 \underbrace{\cos\left(2\pi\left(f + \frac{\epsilon}{2}\right)t\right)}_{\text{signal}} \underbrace{\cos\left(2\pi\left(\frac{\epsilon}{2}\right)t\right)}_{\text{enveloppe}}$$

La fréquence du signal est donc $\left(f + \frac{\epsilon}{2}\right) = 442\text{Hz} \approx f = 440\text{Hz}$ et la fréquence de l'enveloppe est $\frac{\epsilon}{2} \approx 2.2\text{Hz}$. La fréquence des battements (qui correspondent aux maxima d'amplitudes) est le double, soit $f_{\text{batt}} = \epsilon = 10^{-2}440 = 4.40\text{Hz}$. On entend en effet 4.4 battements par seconde.

2.2 Sonogramme, transformée par ondelette, transformée de Fourier

2.2.1 Signaux élémentaires : notes de musique, paquets d'ondes Gaussiens (ou ondelettes)

Une fonction parfaitement périodique comme $t \rightarrow \cos(2\pi ft)$ n'est pas réaliste et pas pratique non plus. Nous allons voir qu'il est beaucoup plus intéressant de considérer des fonctions appelées **paquet d'ondes Gaussien** (ou **ondelette** en théorie du signal) et que l'on appelle **note de musique** d'un point de vue musical, définie ainsi.

Définition 2.2.1. Un **paquet d'onde Gaussien** à l'instant $t_0 \in \mathbb{R}$ et de fréquence $f_0 \in \mathbb{R}$ de durée $\sigma > 0$ est

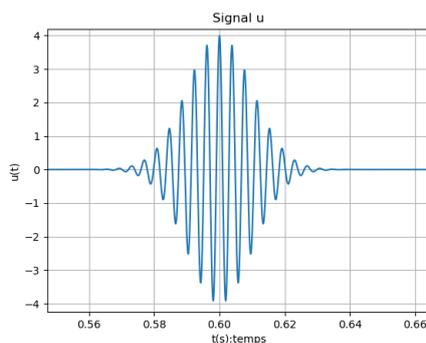
$$\varphi_{t_0, f_0, \sigma}(t) = e^{i2\pi f_0 t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2}. \quad (2.2.1)$$

2.2. SONOGRAMME, TRANSFORMÉE PAR ONDELETTE, TRANSFORMÉE DE FOURIER 67

Remarque 2.2.2. Se rappeler que $\text{Re}(e^{i\theta}) = \cos \theta$ et $\text{Im}(e^{i\theta}) = \sin \theta$ donc la partie réelle du signal (2.2.1) est

$$\text{Re}(\varphi_{t_0, f_0}(t)) = \cos(2\pi f_0 t) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2}$$

représenté ci-dessous dans le cas $t_0 = 0.6$, $f_0 = 260$ et $\sigma = 0.01$. La partie imaginaire est semblable.



Le premier facteur $e^{i2\pi f_0 t}$ de (2.2.1) s'appelle la **partie oscillante** et le deuxième facteur $e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2}$ l'**enveloppe** ou la **fenêtre Gaussienne**. Il peut y avoir d'autres choix intéressants de fenêtres ou **window** en mathématique et théorie du signal. Lire la remarque C.4.1 concernant l'intérêt d'utiliser les modes de Fourier ou ondes planes.

Exercice 2.2.3. (TP) “Une mélodie”. A partir de ce programme python `wave_packet.py`, créer un signal formé de la superposition de paquets d'ondes Gaussiens (ou notes de musique) de durée $\sigma = 0.02$ s reproduisant la mélodie suivante. Visualiser le signal et écouter.



Solution 2.2.4. d'après le tempo, la durée de la noire est $d = \frac{60}{120} = 0.5$ s. Donc si la date de départ est $t_0 > 0$, les dates successives et pitch sont :

Dates après t_0	0	$\frac{1}{2}d$	$\frac{3}{4}d$	d	$d + \frac{1}{2}d$	$2d$	$2d + \frac{1}{2}d$	$2d + \frac{1}{2}d$	$3d$	$3d$
note	C_6	B_5	G_5	F_5	E_5	C_5	F_5	B_5	C_6	E_5
Pitch x	72	71	67	65	64	60	65	71	72	64

Voici le programme `wave_packet_melodie.py`, fichier `wave_packet_melody.wav`.

2.2.1.1 Produit scalaire entre deux paquets d'ondes, principe d'incertitude

Remarque 2.2.5. Avant de lire la suite, vérifier que vous connaissez les **bases d'algèbre linéaire** nécessaires, de la section C.2.

Proposition 2.2.6. *L'angle α entre deux paquets d'ondes Gaussiens $\varphi_{t_1, f_1, \sigma}$ et $\varphi_{t_2, f_2, \sigma}$, définis en (2.2.1), et de même durée $\sigma > 0$ est donné par*

$$\cos \alpha = \frac{|\langle \varphi_{t_1, f_1, \sigma} | \varphi_{t_2, f_2, \sigma} \rangle|}{\|\varphi_{t_1, f_1, \sigma}\| \|\varphi_{t_2, f_2, \sigma}\|} = \exp\left(-\frac{1}{2}d^2\right) \quad (2.2.2)$$

avec la **distance effective** d entre les points (t_1, f_1) et (t_2, f_2) dans le plan temps-fréquence donnée par

$$d^2 = \left(\frac{t_2 - t_1}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{f_2 - f_1}{\Delta f}\right)^2$$

avec $\Delta t = \sigma$ appelé **incertitude en temps** et $\Delta f = \frac{1}{\sigma}$ appelé **incertitude en fréquence**. Remarquer que d est une distance Euclidienne dans le système d'unité $\Delta t, \Delta f$.

Démonstration. Voir Proposition C.6.2 ou Faure (2010). □

Principe d'incertitude : (2.2.2) signifie d'après (C.2.2) que l'angle α entre les paquets d'ondes φ_{t_1, f_1} et φ_{t_2, f_2} est $\alpha \approx \frac{\pi}{2}$, i.e. les signaux φ_{t_1, f_1} et φ_{t_2, f_2} sont très différents, si et seulement si $d \gg 1$ i.e. si et seulement si

$$|t_2 - t_1| \gg \Delta t \text{ ou } |f_2 - f_1| \gg \Delta f.$$

Remarquer que

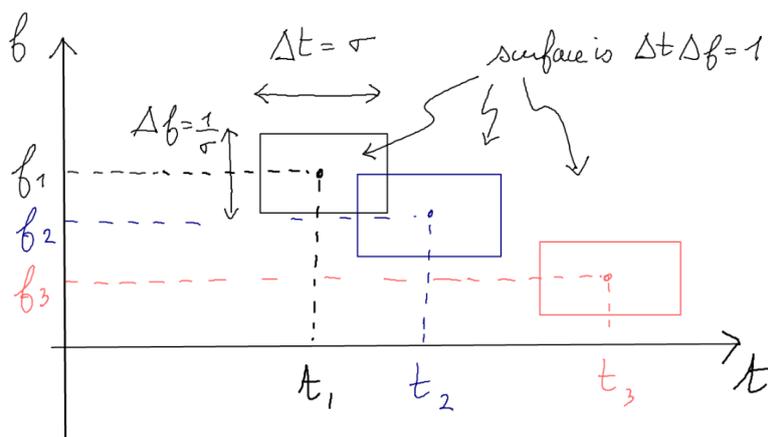
Proposition 2.2.7. *La précision temporelle Δt et précision fréquentielle Δf d'un paquet d'onde sont est reliées par*

$$\Delta t \Delta f = 1 \quad (2.2.3)$$

appelé principe d'incertitude.

Comme $\Delta t \Delta f$ est une surface dans le plan temps-fréquence, le principe d'incertitude montre qu'il n'y a pas d'information à une échelle plus fine que la surface 1 (si on diminue $\sigma = \Delta t$ alors $\Delta f = \frac{1}{\sigma}$ augmente et inversement).

Par exemple, dans le schéma suivant, les signaux $\varphi_{t_1, f_1}, \varphi_{t_2, f_2}$ sont proches car les points (t_1, f_1) et (t_2, f_2) sont à une distance inférieure à 1, alors que φ_{t_3, f_3} est différent (orthogonal) aux autres (distance supérieure à 1).



Remarque 2.2.8. En utilisant une transformée d'un signal en sonogramme et en ne mémorisant que les zones où le signal est suffisamment intense, et à raison d'un échantillon par unité de surface $\Delta t \Delta f = 1$ on peut ainsi considérablement réduire la quantité d'information à retenir pour mémoriser un signal. C'est ainsi que fonctionne certains **codage audio (et vidéo)**. Au retour, on reconstruit le signal en superposant de façon adéquate les paquets d'ondes.

Exemple 2.2.9. Application musicale : supposons une contrebasse qui joue des notes pizzicato autour de la note C_3 dont la fréquence est $f_{C_3} = 65\text{Hz}$ et la suivante $f_{C\#_3} = 65 \times 1.06 = 69\text{Hz}$ (voir plus loin). A quel tempo les notes deviennent indiscernables à cause du principe d'incertitude ? (On ignore les harmoniques et considère seulement la composante fondamentale)

Solution 2.2.10. L'écart de fréquence entre ces deux notes voisines est $\Delta f = 69 - 65 = 4\text{Hz}$. Pour avoir cette précision, d'après le principe d'incertitude la durée minimale d'une note Δt vérifie $\Delta f \Delta t = 1$. Donc

$$\Delta t = \frac{1}{\Delta f} = \frac{1}{4}\text{s}.$$

C'est un débit de 4 notes par seconde. A un tempo plus rapide, on ne peut distinguer la fréquence de la note.

2.2.2 Sonogramme, transformée de Fourier fenêtrée ou transformée par ondelette

Remarque 2.2.11. Avant de lire la suite, vérifiez que vous connaissez les **bases d'algèbre linéaire** nécessaires, de la section **C.2**.

On utilise les paquets d'ondes (ou notes musicales élémentaires) (2.2.1) et le produit scalaire pour détecter la présence de chaque note $\varphi_{t,f}$ dans un signal u donné.

Définition 2.2.12. Si $u : t \rightarrow u(t)$ est un signal, sa **transformée par paquets d’ondes** (ou **sonogramme**) est la fonction complexe $(Tu)(t, f)$ sur le plan temps-fréquence suivante

$$(Tu)(t, f) := \frac{1}{\|\varphi_{t,f}\|} \langle \varphi_{t,f} | u \rangle \in \mathbb{C} \quad (2.2.4)$$

où

$$\langle \varphi_{t,f} | u \rangle = \int \overline{\varphi_{t,f}(t')} u(t') dt'.$$

Ainsi l’amplitude $|(Tu)(t, f)|$ “mesure la présence” du paquet d’onde élémentaire (ou note) $\varphi_{t,f}$ dans le signal u .

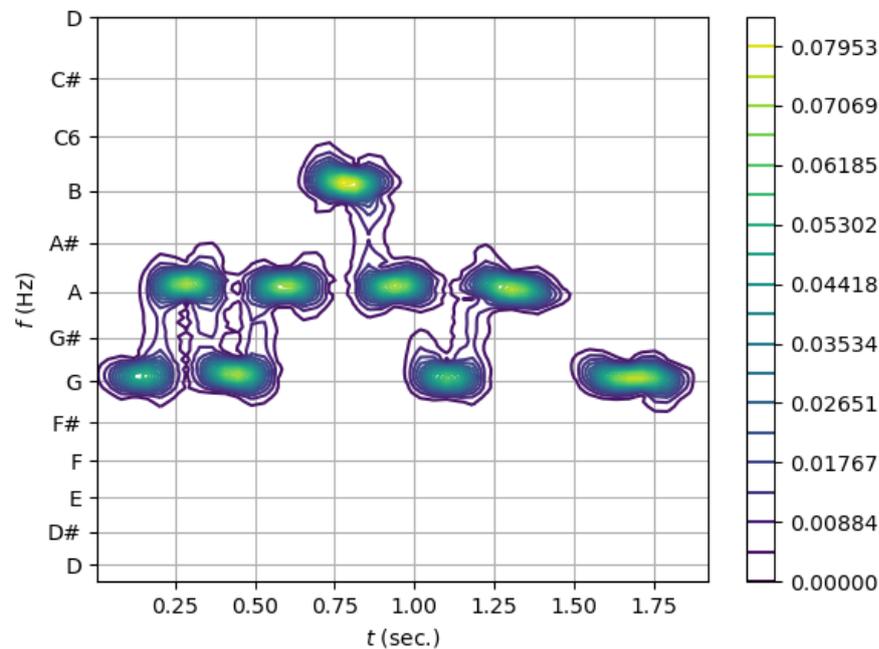
Remarque 2.2.13. T est un opérateur linéaire qui transforme la fonction $u(t)$ à une variable en la fonction $(Tu)(t, f)$ à deux variables. D’après (C.2.5), $(Tu)(t, f)$ s’interprète comme la composante de u sur l’axe du vecteur $\varphi_{t,f}$.

Remarque 2.2.14. Derrière la transformée par paquets d’ondes il y a la transformée de Fourier que l’on détaillera après. La transformée par paquet d’onde est utilisée dans beaucoup de domaines scientifiques sous différents noms : depuis les ondes quantiques, sous le nom de **transformée de Bargmann** Berezin (1950), la géométrie algébrique en mathématiques sous le nom de **plongement de Kodaira**, et plus récemment en théorie du signal avec la **transformée par ondelettes**. Pour améliorer l’analyse, on peut faire varier le paramètres $\sigma(t, f)$ avec le point (t, f) .

Dans la plupart des logiciels qui proposent une transformée de Fourier, il s’agit en fait d’une transformée par paquet d’onde comme définie en (2.2.4) avec un choix de “fonction fenêtre”, **window**, à préciser.

Exercice 2.2.15. (TP) “**Sonogramme d’un signal**”.

1. Ecouter ce signal sonore **flute.wav**. Utiliser ce programme python **sonogram.py** pour effectuer la transformée par paquets d’ondes (ou sonogramme) de ce signal. Choisir une durée $\sigma = 0.04\text{sec}$. Comparer au résultat de l’exercice 2.6.4.



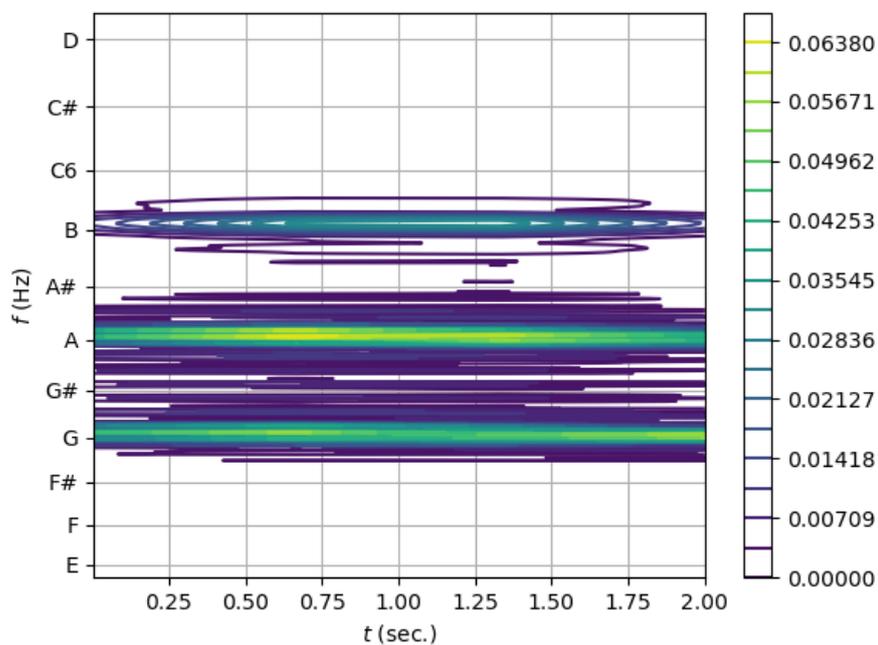
2. Sachant que d'après la proposition 2.2.6, $\Delta t = \sigma$ est l'incertitude en temps et $\Delta f = \frac{1}{\sigma}$ l'incertitude en fréquence du paquet d'onde, quel intervalle acceptable a-t-on pour σ pour bien distinguer les notes ? Changer le paramètre σ dans le programme et observer les résultats si σ est trop grand ou trop petit ?
3. Même exercice avec un fichier de votre création (enregistrement) ou ce fichier [trumpet.wav](#).
4. Même exercice avec la fonction (2.3.3) périodique qui contient 20 harmoniques.

Solution 2.2.16. La durée entre deux notes est ici $\Delta t \approx 0.2s$, il faut donc prendre $\sigma \leq 0.2s$. Par ailleurs on souhaite aussi une précision inférieure à 1/4 ton sur la résolution des fréquence autour de $f = 440Hz$, soit $dx < 0.5$ donc comme

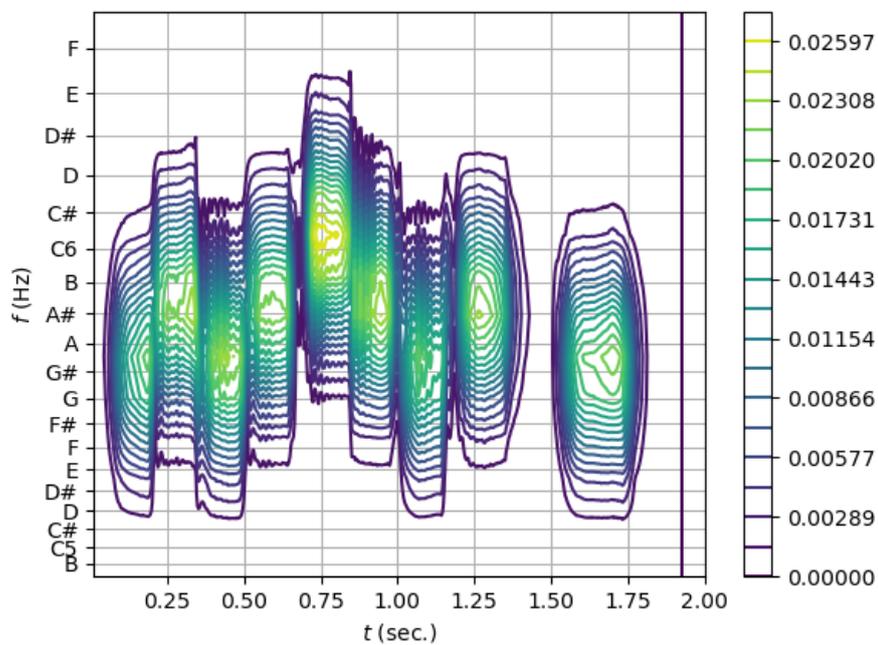
$$dx = \frac{12}{\ln 2} \frac{df}{f} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} = df = \frac{\ln 2}{12} f dx = 0.06 f dx$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{1}{0.06 f dx} > \frac{2}{0.06 \cdot 440} = 0.08$$

, soit $\sigma \geq 0.08s$. L'intervalle suggéré est donc faible. Par exemple, avec $\sigma = 0.5$ on ne distingue plus la résolution temporelle des notes :



Par exemple, avec $\sigma = 0.003$ on ne distingue plus la résolution fréquentielle des notes :



Liens externes :

— Voir de nombreux exemples de sonogrammes dans le livre [Castellengo \(2015\)](#).

- [spectrogramme en JS](#)
- [Video vulgarisée sur le sonogramme](#)

2.2.3 Transformée de Fourier d'un signal

Dans la limite de durée $\sigma \rightarrow \infty$, le paquet d'onde $\varphi_{t,f}$ en (2.2.1) devient tout simplement la fonction suivante appelée **mode de Fourier** ou **onde plane** et ne dépend plus des paramètres t_0, σ mais que de la fréquence f :

$$\varphi_f(t) = e^{i2\pi ft}. \quad (2.2.5)$$

Remarque 2.2.17. La propriété remarquable de cette fonction (en fait la propriété ou définition de la fonction exponentielle elle-même) est qu'elle est vecteur propre de l'opérateur dérivée

$$\frac{d}{dt}\varphi_f = (i2\pi f)\varphi_f$$

Pour cette raison il est souhaitable de décomposer un signal ou une fonction dans la base des modes de Fourier. Mais on perd l'avantage de la localisation temporelle du paquet d'onde (2.2.1). Lire aussi la remarque C.4.1 concernant l'intérêt d'utiliser les modes de Fourier ou ondes planes.

Définition 2.2.18. (Joseph Fourier 1822 à Grenoble) La **transformée de Fourier** d'un signal $u : t \rightarrow u(t)$ est la fonction

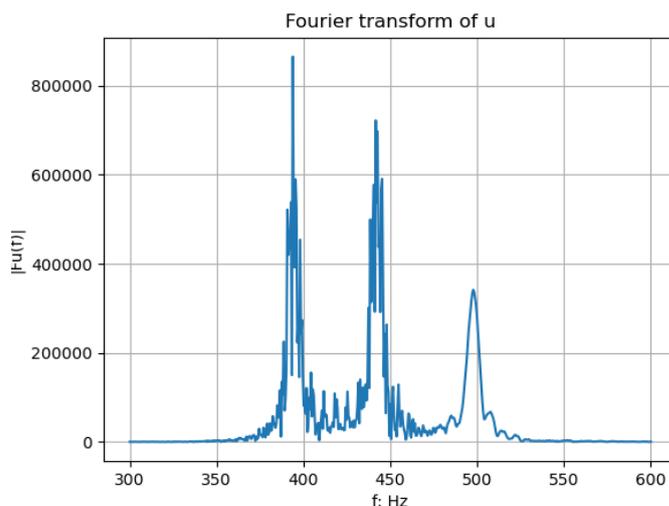
$$f \in \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{F}u)(f) := \langle \varphi_f | u \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi ft} u(t) dt \quad (2.2.6)$$

Remarque 2.2.19. $(\mathcal{F}u)(f) = \langle \varphi_f | u \rangle$, ce produit scalaire mesure la présence du mode de Fourier φ_f dans le signal u .

Lire les sections

- Section C.4.1 qui concerne la **transformée de Fourier** d'une fonction et la **transformée de Fourier inverse**. Les sections suivantes sont des cas particuliers utiles.
- Section C.4.2 concerne la **transformée de Fourier d'un signal échantillonné**,
- Section C.4.3 concerne la **série de Fourier d'un signal périodique**. On a déjà vu en (2.3.1) la décomposition de Fourier d'un signal périodique réel.
- la section C.4.4 concerne la **transformée de Fourier discrète**.

Exercice 2.2.20. (TP) “**Transformée de Fourier discrète d'un signal**”. Voici un programme en python [DFT_of_wavefile.py](#) qui effectue la transformée de Fourier discrète du signal sonore [flute.wav](#) en appliquant directement la formule (C.4.9). On donne aussi le code qui utilise l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (le résultat est le même, mais le calcul est plus rapide).



1. Executer ce programme et comparer le résultat avec le sonogramme de l'exercice 2.2.15. Commentez l'intérêt du sonogramme ?

Solution 2.2.21. Dans cette figure on distingue trois pic de fréquences, correspondant aux notes G,A,B jouées, mais on ne lit pas par exemple que *G* a été joué quatre fois, ni dans quel ordre. Avec le sonogramme on lit l'information temporelle et l'information fréquentielle simultanément. Avec la transformée de Fourier on ne distingue pas l'information temporelle.

2. Enregistrer sa voix prononçant la voyelle "A" ou un instrument jouant une note tenue et observer la transformée de Fourier (discrète). Observer les harmoniques et les enveloppes du timbre, appelé formants.

2.3 Signaux périodiques, fréquences, notes musicales et pitch

2.3.1 Signaux périodiques, séries de Fourier

[video de cette section](#)

Lecture préalable : On conseille de lire au préalable **la section B.3**, afin de bien comprendre :

- Le mouvement circulaire et la fonction sinus
- La décomposition de Fourier d'un mouvement quelconque en mouvement circulaires (ou en sinus)
- Pour un signal (ou mouvement) périodique de fréquence $f = \frac{1}{T}$, ses fréquences harmoniques $f, 2f, 3f$, etc

Les fonctions périodiques sont très particulières d'un point de vue mathématique ou physique. Les signaux périodiques (ou approximativement périodique) sont en effet très rare dans la nature, sauf parmi les animaux, car ils servent à la communication et sont générés par la vibration de "cordes vocales". Ils ont ainsi une grande importance en musique et on les appellera **notes musicales** (bien qu'une "jolie note" ne soit pas un signal parfaitement périodique).

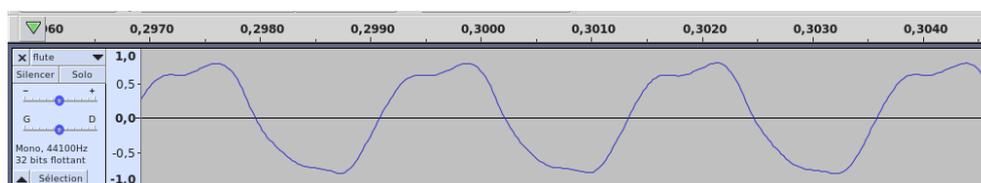
Définition 2.3.1. Un **signal périodique** de **période** $T > 0$ est une fonction $t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}$ qui vérifie

$$u(t + T) = u(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

T est la **période fondamentale**, si c'est la valeur minimale vérifiant cela. On appelle $f = 1/T$ la **fréquence fondamentale** du signal périodique. Une **note musicale** est un signal périodique (ou presque en pratique).

Remarque 2.3.2. Si T est la période fondamentale alors $T, 2T, 3T, \dots$ sont aussi des périodes car si le signal se répète une fois, alors forcément il se répète ensuite.

Exemple 2.3.3. Avec Audacity, voici le signal d'une note de flûte de période approximative $T = 0.302 - 0.300 = 0.002\text{sec}$. donc de fréquence $f = 1/0.002 = 500\text{Hz}$:

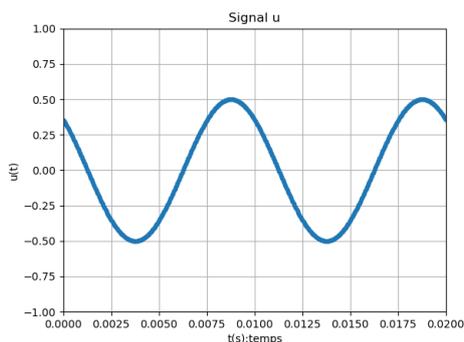
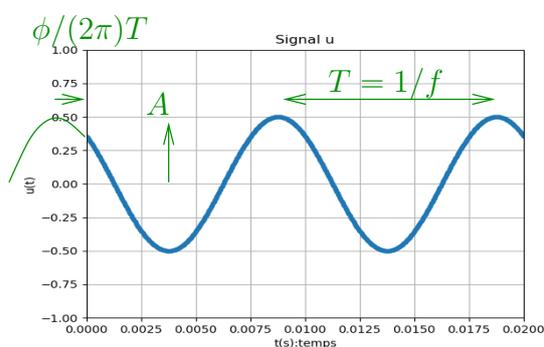


Remarque 2.3.4. On appelle "**wave-form**" ou "forme d'onde" le signal périodique dans l'intervalle d'une période fondamentale : $t \in [0, T] \rightarrow u(t)$. Cette forme peut être quelconque et détermine le signal périodique. La fonction sinus est un exemple particulier de fonction périodique.

Exercice 2.3.5. "Rappels sur la fonction sinus". Tracer l'allure de la fonction suivante

$$u(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi)$$

en montrant le rôle des paramètres amplitude A , fréquence f et phase φ . Inversement donner la formule $u(t)$ pour le graphe suivant.

**Solution 2.3.6.**

$$u(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi)$$

$$A = 0.5, \quad f = 100, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Exemple 2.3.7. Avec audacity ou l'application **Lexis Audio Editor**, enregistrer sa voix parlant. Zoomer le signal pour observer que localement, à chaque voyelle, le signal est périodique. Par exemple (voyelle A par un homme) avec Lexis Audio Editor :



Exemple 2.3.8. Sur cet exemple, entre $t = 3.55$ et $t = 3.60$ on observe 6 périodes donc la période T est

$$T = \frac{3.60 - 3.55}{6} = 0.0083$$

et la fréquence

$$f = \frac{1}{T} = 120\text{Hz}.$$

Exercice 2.3.9. (*) Si on somme plusieurs fonctions sinus chacune de la forme $A \cos(2\pi ft + \varphi)$, appelé **mode de Fourier**, montrer que la condition nécessaire et suffisante sur ces fonctions pour que le signal résultant soit périodique de période fondamentale T_1 donnée est que

$$f = nf_1$$

avec $n \geq 1$ entier et $f_1 = 1/T_1$ **fréquence fondamentale**.

Solution 2.3.10. Si $v(t) = v(t+T)$ signal périodique donné et on rajoute $u(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi)$, cad $w = u + v$, alors à quelle condition w est encore T périodique? Il faut

$$\begin{aligned} w(t+T) = w(t) \forall t, &\Leftrightarrow \cos(2\pi f(t+T) + \varphi) = \cos(2\pi ft + \varphi), \forall t \\ &\Leftrightarrow 2\pi f(t+T) + \varphi = 2\pi ft + \varphi \pmod{2\pi}, \forall t \\ &\Leftrightarrow 2\pi fT = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f = \frac{n}{T_1}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'exercice précédent suggère le résultat suivant :

Théorème 2.3.11. “Décomposition de Fourier”.

Un signal périodique réel de période $T = 1/f$ donnée s'écrit de façon unique

$$u(t) = \sum_{n \geq 0} A_n \cos(2\pi(nf)t + \varphi_n) \quad (2.3.1)$$

appelée **décomposition de Fourier** ou **série de Fourier** du signal périodique, avec les amplitudes $A_n \geq 0$, des phases $\varphi_n \in [0, 2\pi]$ qui peuvent être arbitraires mais des fréquences $f_n = nf$ appelées les **harmoniques** du signal.

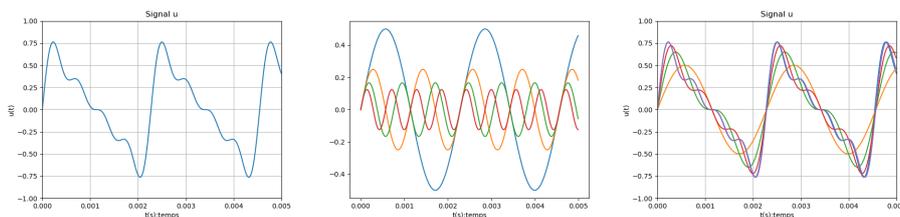
Inversement A_n, φ_n s'obtiennent à partir du signal u par

$$A_n e^{i\varphi_n} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i2\pi nt/T} u(t) dt, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.3.2)$$

En particulier $\varphi_0 = 0$ et $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$ est la moyenne du signal.

Ce théorème est le Théorème C.4.10 en appendice où nous donnons sa preuve.

Exemple 2.3.12. Avec ce programme python `sinus_sum.py` voici un signal $u(t)$ obtenu comme somme de fonctions de Fourier $u_n(t) = \frac{1}{n} \cos(2\pi nft - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{n} \sin(2\pi nft)$ pour $n = 1, 2, 3, 4$ représentées en couleur sur la 2ème figure. La 3ème figure montre les sommes partielles $u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, etc$ pour observer la reconstruction du signal. A la limite, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ donnerait un signal en “dent de scie”, voir exercice ci-dessous.



Exemple 2.3.13. Avec le [programme suivant en javascript](#), vous pouvez changer de façon interactive les amplitudes A_n et phases φ_n et écouter le son résultant.

Remarque 2.3.14. La justification du terme “harmonique” est que l’on perçoit les signaux périodiques comme “harmonieux” et remonte peut être à l’ouvrage de Kepler [Harmonices Mundi](#) “L’Harmonie du monde” 1619 où il relie (sans trop de raison scientifique) musique et orbites planétaires.

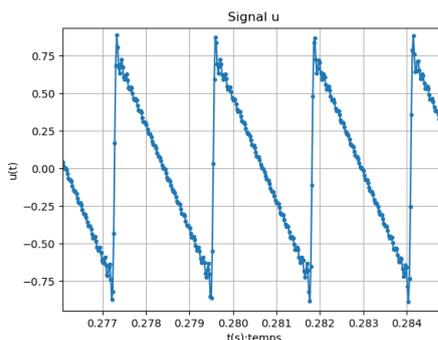
Exercice 2.3.15. (TP) “Série de Fourier”. Avec un programme python

1. Générer le fichier audio.wav du signal suivant sur une durée $D = 2\text{sec}$.

$$u(t) = 0.5 \sum_{n=1}^M \frac{1}{n} \sin(2\pi n f t) \quad (2.3.3)$$

avec $f = 440\text{Hz}$ et $M = 20$ harmoniques. Le signal est-il périodique? L’écouter avec Audacity. Essayer avec d’autres valeurs de M . Que pensez vous du signal si $M \rightarrow \infty$. Le signal sera t-il continu?

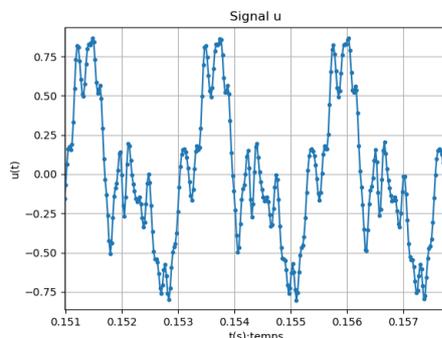
Solution 2.3.16. Programme [sinus_sum_wav_file.py](#)



Le signal est périodique de période $T = 1/f = 0.0022\text{sec}$. Si $M \rightarrow \infty$ le signal deviendra discontinu et en forme de “[dent de scie](#)”.

2. Au signal précédent rajouter des phases $\varphi_n \in [0, 2\pi]$ aléatoires (avec loi uniforme). Observer le signal. Ecouter le signal. (On peut montrer que dans la limite $M \rightarrow \infty$, le graphe est continu, c’est un [mouvement Brownien](#) en dim. 1). Essayer les phases $\varphi_n = n \log n$ (série de Hardy-Littlewood, [Katznelson \(2004, p.33\)](#))

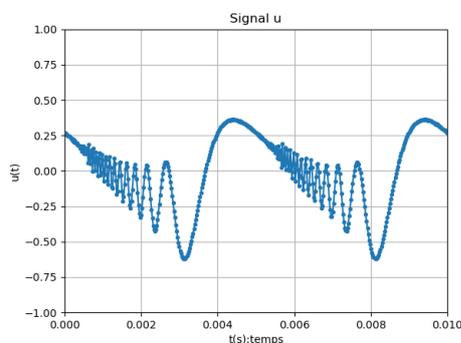
Solution 2.3.17. `sinus_sum2.py`



On entend aucune différence avec le signal où $\varphi_n = 0$. Les phases sont inaudibles.

On peut montrer que dans la limite $M \rightarrow \infty$, le signal est (presque sûrement) continu et même dans l'espace $C^{\frac{1}{2}-\epsilon}$, $\forall \epsilon > 0$, cad Hölder d'exposant $\frac{1}{2} - \epsilon$, comme le mouvement Brownien. Mais le signal ne peut pas être $C^{\frac{1}{2}+\epsilon}$, $\forall \epsilon > 0$, [Katznelson \(2004, p.33\)](#).

Série de Hardy-Littlewood avec les phases $\varphi_n = n \log n$ qui est :

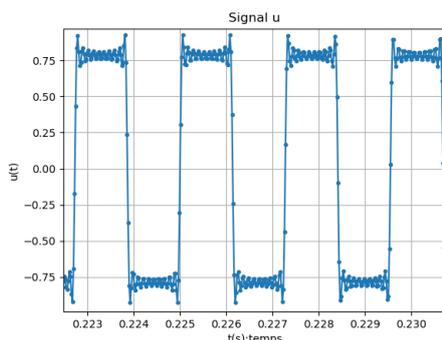


3. Essayer avec le signal

$$u(t) = 0.5 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (1 - (-1)^n) \sin(2\pi n f t) \quad (2.3.4)$$

Le signal est-il périodique ? que pensez vous du signal si $M \rightarrow \infty$? L'écouter avec Audacity. Ecrire $u(t)$ sous la forme (2.3.1) avec des amplitudes A_n et phases φ_n .

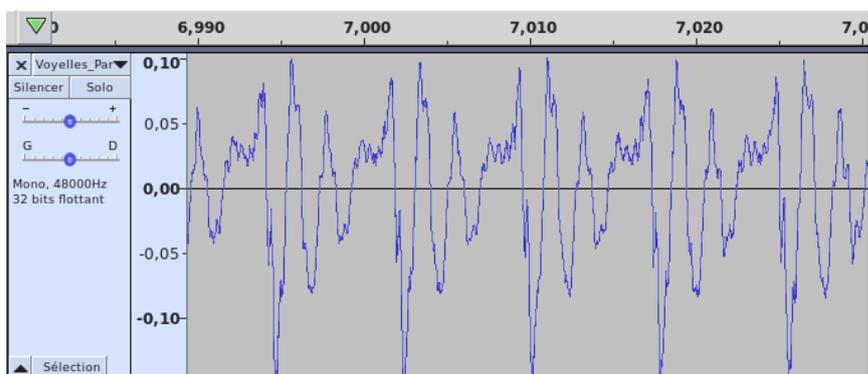
Solution 2.3.18. On obtient



Si $M \rightarrow \infty$ le signal deviendra discontinu et en forme de **signal carré**.

Exercice 2.3.19. (TP) “Analyse de la voix”. Avec **Audacity** ou logiciel équivalent comme **Lexis Audio Editor** sous android.

1. Enregistrer sa voix prononçant une voyelle, parlée ou chantée. Ecouter. Observer que le signal est (localement) périodique, i.e. c’est une note de musique. Mesurer la période fondamentale T , déduire la fréquence f . Si besoin, voici un fichier déjà enregistré **Voyelles_Par_Malik.wav**.



2. Sélectionner une période (wave-form) et la répéter avec audacity en faisant Ctrl-T (Edition/suppression spéciale/Rognage audio), puis Effets/Répéter. Quelle différence à l’écoute ?
3. Inverser le sens du signal de départ (Effets/Inverser sens) et écouter. Essayer avec une phrase contenant des **consonnes** (attaques b,p,t etc) et sans consonnes mais voyelles seules (a,e,i,o,u).
4. Enregistrer sa voix prononçant une voyelle chuchotée. Ecouter. Observer le signal. Quelle différence observez vous avec le cas parlé ?

Solution 2.3.20.

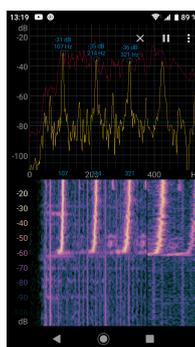
1. Partant de la date $t = 7,000$, on mesure $2T \approx 0.016s$ soit $f = \frac{1}{T} = 125\text{Hz}$.

2. On reconnaît le son, mais il paraît très artificiel. Il manque les variations.
3. Si il y a des consonnes, le son paraît étrange. Avec seulement des voyelles, on ne devine pas qu'il a été inversé.
4. Avec le cas parlé (les cordes vocales vibrent), le signal est localement périodique. Dans le cas chuchoté, le signal n'est plus localement périodique.

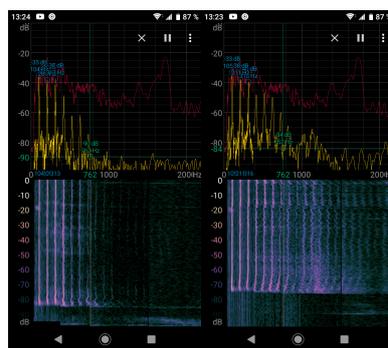
2.3.1.1 Sonogramme d'un signal périodique

Le signal d'un voix réel est (presque) périodique seulement sur des courtes échelles de temps. La fréquence peut varier avec le temps. Pour cela, on a vu l'intérêt d'utiliser la transformée en paquet d'onde ou **sonogramme du signal** pour représenter un signal par une intensité $I(t, f)$ en fonction du temps t et de la fréquence f .

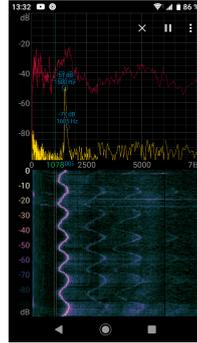
Exemple 2.3.21. Voici le sonogramme d'une voyelle "O" chanté. On observe la fréquence $f = 107\text{Hz}$ et les harmoniques $2f = 214\text{Hz}$, $3f = 321\text{Hz}$ etc



Et voici sur une échelle plus large en fréquences, un "O" et un "A" de même fréquence $f = 104\text{Hz}$. On observe que le "A" a plus d'intensité dans les harmoniques élevées (autour de 1000Hz). C'est ainsi que on distingue les voyelles entre elles.



Voici le sonogramme d'un sifflement dont la fréquence varie avec le temps, autour de 1500Hz . On n'observe pas (ou très peu) d'intensité dans les harmoniques supérieures $2f$, $3f$ etc. Cela signifie que le sifflement est un signal presque sinusoidal (ou circulaire ou "pur").



2.3.2 Pitch d'un signal périodique

[video de cette section](#)

La musique est constituée de notes musicales, c'est à dire de signaux (localement) périodiques. Chaque note a une période T , fréquence $f = \frac{1}{T}$, mais en musique on mesure cela par la "hauteur de note" appelée **pitch** et qui correspond à une échelle logarithmique de la fréquence. (De façon analogue à l'intensité I qui est mesurée sur l'échelle logarithmique $\text{dB} = 10 \text{Log}_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right)$ appelée décibels).

On conseille de lire au préalable la section **D** sur la notation musicale.

2.3.2.1 Les notes sur la portée musicale leur nom et leur pitch (code MIDI) :

Tout d'abord on rappelle le code MIDI de chaque note de la portée du tempérament égal appelé **pitch**. On verra ensuite la correspondance avec la fréquence f de la note.

Définition 2.3.22. La note C_5 (dans l'octave 5) a le pitch $x_{C_5} = 60$ et ensuite on ajoute ± 1 pour chaque demi-ton.

Cela donne la liste suivante des notes et leur pitch :

MIDI Pitch	Note Name
60	C ₅
61	C# ₅
61	Db ₅
62	D ₅
63	D# ₅
63	Eb ₅
64	E ₅
65	F ₅
66	F# ₅
66	Gb ₅
67	G ₅
68	G# ₅
68	Ab ₅
69	A ₅
70	A# ₅
70	Bb ₅
71	B ₅
72	C ₆
72	C# ₆
72	Db ₆
73	D ₆
74	D# ₆
74	Eb ₆
75	E ₆
76	F ₆
48	G ₃
49	A ₃
50	B ₃
51	C ₄
52	D ₄
53	E ₄
54	F ₄
55	G ₄
56	A ₄
57	B ₄
58	C ₅
59	D ₅

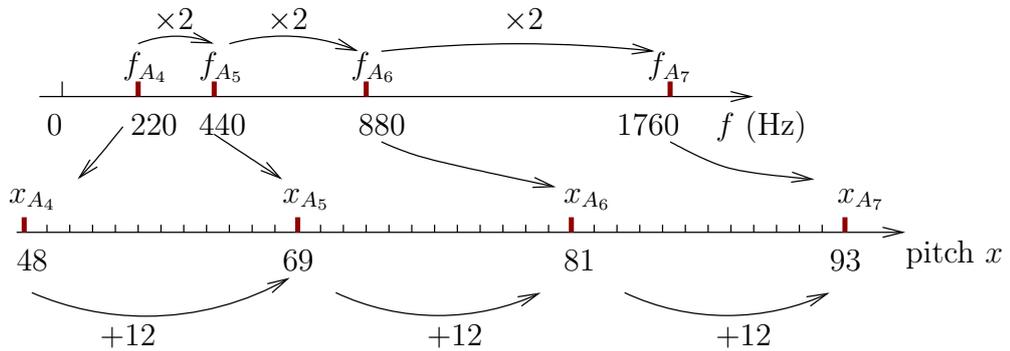
2.3.2.2 Définition du pitch

Pour un signal périodique, la définition suivante donne une mesure équivalente des fréquences f mais sur une échelle logarithmique, plus appropriée à la perception humaine

et adaptée à la musique.

Définition 2.3.23. Le **pitch MIDI** x est une mesure de la fréquence f sur une échelle logarithmique, i.e. la multiplication correspond à une addition. Par convention,

- la note A_5 de fréquence $f_{A_5} = 440\text{Hz}$ appelé **diapason** a le pitch $x_{A_5} = 69$.
 - La multiplication d'une fréquence par $\times 2$ correspond à ajouter $+12$ au pitch.
- Comme l'octave est divisée en 12 demi-tons, le pitch x est une mesure des fréquences f en **demi-tons**.



Remarque 2.3.24. (*) A partir d'une fréquence f donnée, voici une formule qui traduit la définition ci-dessus du pitch

$$x := \left(\frac{12}{\text{Log}_{10}(2)} \right) \text{Log}_{10} \left(\frac{f}{f_{A_5}} \right) + x_{A_5} \in \mathbb{R} \quad (2.3.5)$$

inversement la fréquence f à partir du pitch :

$$f = 10^{\left(\frac{\text{Log}_{10}(2)}{12} \right) (x - x_{A_5})} f_{A_5} \quad (2.3.6)$$

ou plus simplement :

$$f = 2^{\frac{1}{12}(x - x_{A_5})} f_{A_5} \quad (2.3.7)$$

Exemple 2.3.25. Par exemple

- Un changement de fréquence $f' = 2f$ correspond à un changement de pitch $x' = x + 12$, appelé **intervalle d'octave**
- $x' = x + 1$ est appelé **intervalle de demi-ton**. Cela correspond à $f' = 2^{1/12} f$. Il est utile de se rappeler que

$$2^{\frac{1}{12}} = 1.06 \dots$$

Ainsi un **demi-ton** correspond à une augmentation de 6% des fréquences. Cela s'obtient aussi si on différencie (2.3.5), on obtient la formule suivante

$$\frac{df}{f} = \frac{\ln 2}{12} dx \sim 0.057 dx \quad (2.3.8)$$

- Un ton est deux demi-tons $x' = x + 2$. Un quart de ton est une moitié de demi-ton $x' = x + \frac{1}{2}$ correspondant à $f' = 1.03 f$.

Exercice 2.3.26. Sachant qu'un demi-ton correspond à une augmentation de 6% de la fréquence, sachant que A_5 a la fréquence $f_{A_5} = 440$, quelle est la fréquence $f_{A\#_5}$? quelle est f_{A_6} (une octave au dessus) et $f_{A\#_6}$?

Solution 2.3.27. $f_{A\#_5} = 440 \times 1.06 = 466\text{Hz}$. $f_{A_6} = 2 \times 440 = 880\text{Hz}$. $f_{A\#_6} = 880 \times 1.06 = 933\text{Hz}$

Exercice 2.3.28. (TP) "Mesure du pitch". A partir de la fréquence f mesurée dans l'exercice ??, calculer le pitch x (et son incertitude de mesure) et déduire le nom de la note.

Solution 2.3.29. On avait mesuré $f = 444\text{Hz}$ avec une incertitude $\Delta f = 20\text{Hz}$. On déduit

$$x = \frac{12}{\ln 2} \ln \left(\frac{444}{440} \right) + 69 = 69.15$$

avec une incertitude $\Delta x = \frac{12}{\ln 2} \frac{\Delta f}{f} = \frac{12}{\ln 2} \frac{20}{440} = 0.78$. La note semble donc être A_5 .

Exercice 2.3.30. Si le pitch x est modifié de 3 tons (un "triton"), comment est modifié la fréquence f ?

Solution 2.3.31. Pour un triton = 3 tons = 6 1/2 tons, $x' = x + 6$ donc

$$\frac{f'}{f} = 2^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414 \dots$$

Exercice 2.3.32. Sachant que l'intervalle le plus petit perceptible est de $\frac{1}{10}$ de demi-ton, cela correspond à quelle pourcentage en fréquence? Quelle est l'intervalle minimum de fréquence perceptible Δf autour de $f_{A_5} = 440 \text{ Hz}$?

Solution 2.3.33. $\frac{1}{10} 6\% = 0.6\%$. Ainsi $\Delta f = 0.006 \times 440 \approx 3\text{Hz}$.

La définition suivante est parfois utilisée

Définition 2.3.34. Si x est le pitch (unité de demi-ton) on appelle $100x$ les **cents**. Par exemple $x = 60.41 = 61$ demi-ton + 41 cents.

Remarque 2.3.35. On verra que la perception humaine permet de distinguer au mieux un intervalle de 0.1 pitch, c'est à dire un dixième de demi-ton et pas mieux. Cela correspond à un rapport de fréquence de $2^{1/120} = 1.006 = 1 + 0.6\%$.

Exercice 2.3.36. (TP) Avec Audacity, créer 10 signaux sinusoidaux entre A_5 de fréquence $f_{A_5} = 440\text{Hz}$ et $A\#_5$. Ecouter et mesurer votre perception la plus fine.

2.3.2.3 Le tempérament égal

Dans la définition (2.3.5) précédente toutes les valeurs $x \in \mathbb{R}$ sont possibles. En musique occidentale il est convenu d'utiliser seulement les valeurs entières du pitch $x \in \mathbb{Z}$:

Définition 2.3.37. Le **tempérament égal** est le choix de notes (i.e. signaux périodiques) dont le pitch $x \in \mathbb{Z}$ est un **entier**. On décompose alors

$$x = 12 \times o + r$$

avec un entier $o \in \mathbb{Z}$ appelé **octave** et un reste entier $0 \leq r < 12$ appelé degré de la note auquel on associe un **symbole** :

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
symbole	C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B
nom français	do		ré		mi	fa		sol		la		si

Remarque 2.3.38. De plus on peut ajouter la valeur de l'octave o en indice, par exemples

x	$50 = 12 \times 4 + 2$	$60 = 12 \times 5 + 0$	$67 = 12 \times 5 + 7$	$69 = 12 \times 5 + 9$
symbole	D_4	C_5	G_5	A_5

Remarque 2.3.39. Le choix d'utiliser le tempérament égal a été **fait par les luthiers au XIX^{ème} siècle en occident** pour des raisons pratiques. Référence : [Benson \(n.d., p181,p190,p197\)](#). En fait ce choix de se limiter à des valeurs entières de x **limite considérablement le rendu des “couleurs musicales”**, car notre perception est en fait sensible à ± 0.1 pitch (soit 10 cents), voir chapitres suivants et “tempéraments justes”.

Voir l'annexe **D** pour les différentes conventions et représentations du tempérament égal.

Exercice 2.3.40. Calculer les fréquences des notes C_5 et A_4 suivantes ?



Solution 2.3.41. Pour C_5 , $x = 60$ donc $f_{C_5} = 2^{\frac{1}{12}(x-x_{A_5})} f_{A_5} = 2^{\frac{1}{12}(60-69)} 440 = 2^{-9/12} 440 = 262\text{Hz}$. Pour A_4 , $x = x_{A_5} - 12$ donc $f_{C_5} = 2^{\frac{1}{12}(-12)} f_{A_5} = \frac{1}{2} 440 = 220\text{Hz}$

2.3.3 Comparaison des harmoniques avec le tempérament égal

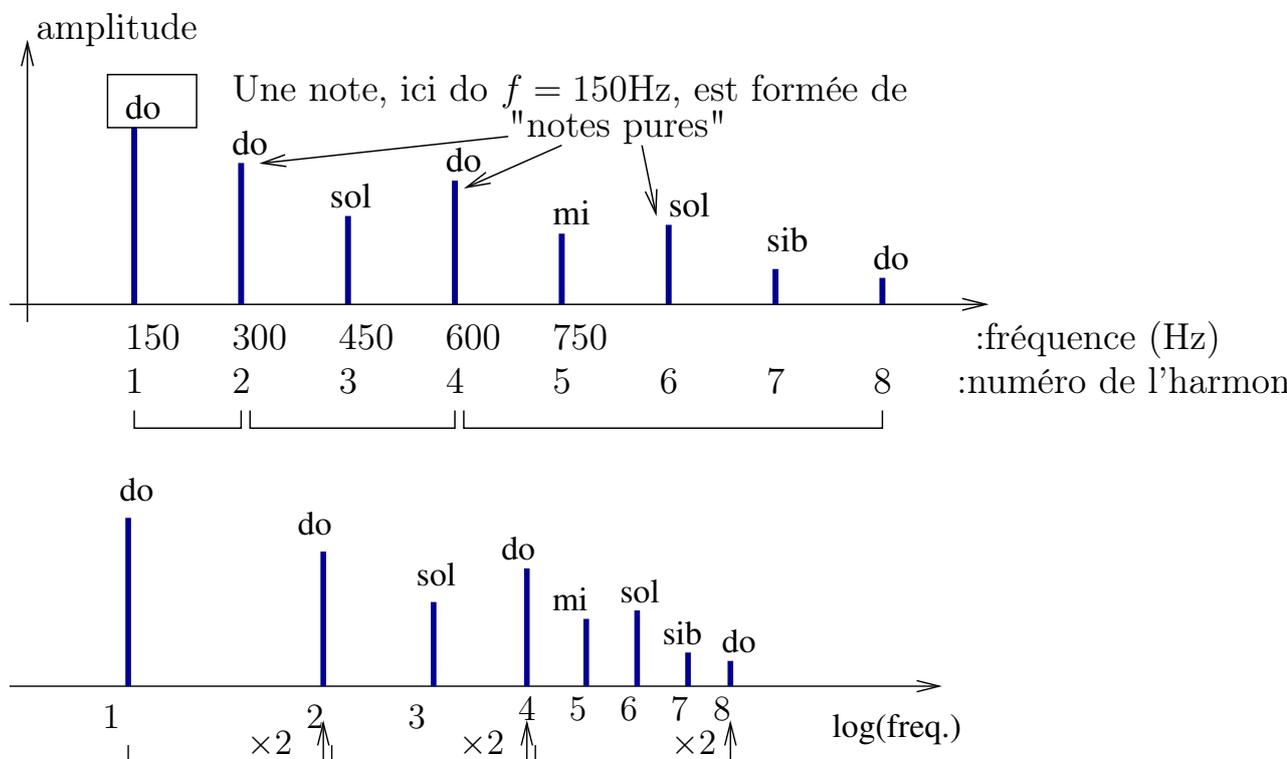
Rappels :

- D'après le Théorème de Fourier B.3.17, les fréquences d'un signal périodique (ou note de musique) de fréquence f , appelées harmoniques sont $f_a = af$ où $a = 1, 2, 3, \dots$ est le **numéro de l'harmonique**, c'est à dire :

$$f_1 = f, \quad f_2 = 2f, \quad f_3 = 3f, \text{ etc}$$

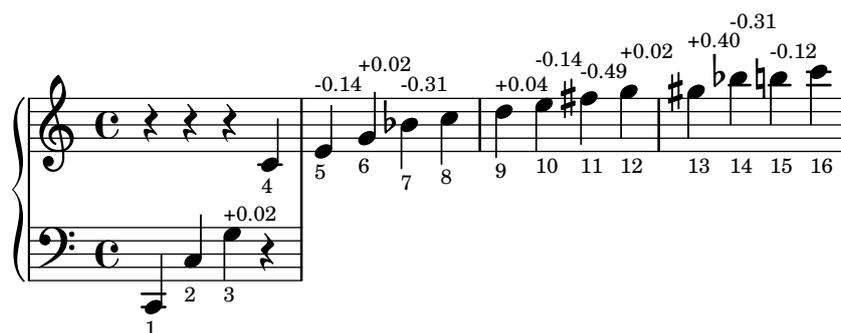
$f_1 = f$ est appelée la fondamentale.

- L'échelle des pitch (ou hauteur de note en demi-tons) est une échelle logarithmique des fréquences, où une octave $f' = 2 \times f$ est transformée en $x' = x + 12$.



Proposition 2.3.42. *L'intervalle mesuré en pitch entre la fondamentale et l'harmonique a est exactement un entier (de demi-tons) et correspond donc au tempérament égal, seulement pour les octaves : $a = 2, 4, 8, 16$ etc. Pour les autres harmoniques, il y a une correction par rapport au tempérament égal représenté sur la figure suivante.*

Ecoute : Voir [cette video](#) qui compare les harmoniques avec le tempérament égal :

FIGURE 2.3.1 – Harmoniques d’une note fondamentale, ici C_3 , représentées sur la portée.

1. Ecouter la différence avec chaque note tempérée.
2. Ecouter les vraies harmoniques et leur superposition : on entend un timbre
3. Ecouter les “fausses harmoniques” (c’est à dire avec le tempérament égal) et leur superposition : on n’entend pas un timbre mais un ensemble complexe de fréquences superposées.

Pour calculer cette correction de la figure ??, on applique la formule (2.3.5). Par exemple pour l’harmonique $a = 3$, par rapport à l’harmonique $a = 1$, on écrit :

$$x_3 - x_1 = \left(\frac{12}{\text{Log}_{10}(2)} \right) \text{Log}_{10} \left(\frac{3}{1} \right) = 19.02 = \underbrace{12}_{\text{octave}} + \underbrace{7}_{\text{quinte}} + 0.02$$

Exercice 2.3.43. Calculer de même les corrections pour les harmoniques $a = 5, 7, 11, 13$ et vérifier avec la figure ci-dessus.

Remarque 2.3.44. Du fait que $9 = 3 \times 3$, et d’après la formule (B.2.1), on peut écrire :

$$\begin{aligned} x_9 - x_1 &= \left(\frac{12}{\text{Log}_{10}(2)} \right) \text{Log}_{10} \left(\frac{9}{1} \right) = \left(\frac{12}{\text{Log}_{10}(2)} \right) \text{Log}_{10}(3 \times 3) \\ &= \left(\frac{12}{\text{Log}_{10}(2)} \right) \text{Log}_{10}(3) + \left(\frac{12}{\text{Log}_{10}(2)} \right) \text{Log}_{10}(3) = 2 \times 19 + 0.04 \\ &= 3 \times 12 + 2 + 0.04 \end{aligned}$$

Exercice 2.3.45. En décomposant les chiffres, calculer de même les corrections pour les harmoniques $a = 6, 7, 10, 12, 14, 15$ et vérifier avec la figure ci-dessus.

2.3.4 Exemple du chant diphonique

Nous avons dit que la voix humaine est un signal sonore (presque) périodique et contient donc des harmoniques.

Il y a une technique vocale appelée “**chant diphonique**” qui permet de mettre beaucoup d’intensité dans l’une ou l’autre des harmoniques, Voici cette technique expliquée dans une [Conférence de Anna-Maria Hefe](#).

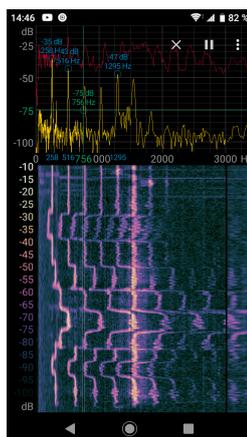
Nous commentons ici quelques exemples précis. Peut écouter le chant **diphonique overtone singing** - [Anna-Maria Hefe](#) sur youtube et on donne la partition montrant la fréquence de la note (en basse) et l’harmonique renforcée sur la portée musicale et avec le numéro n de l’harmonique. Attention : on écrit avec des notes tempérées mais il s’agit d’intervalles justes, comme on verra ensuite, il faudrait ajouter les même corrections que sur la figure ??.

Exemple 2.3.46. Dans ce passage de [Anna-Maria Hefe](#) à 29”. Il y a une basse commune f_1 .

The image displays a musical score for a passage from Anna-Maria Hefe. The score is written in a grand staff with a treble clef and a bass clef. The treble clef part consists of a sequence of notes with fingerings: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4. The bass clef part consists of a single note with a fingering of 1. Below the score is a spectrogram showing the frequency spectrum. The x-axis represents frequency in Hz, ranging from 0 to 3000 Hz. The y-axis represents amplitude in dB, ranging from -100 to -10 dB. The spectrogram shows a strong harmonic peak at 1629 Hz, which is the 10th harmonic of the fundamental frequency f_1 .

Exemple 2.3.47. Dans ce passage de [Anna-Maria Hefe](#) à 1’01”. La fréquence f_n de l’harmonique renforcée est fixe, mais le numéro n change, par conséquent la fréquence de la fondamentale f_1 change :

The image displays a musical score for a passage from Anna-Maria Hefe. The score is written in a grand staff with a treble clef and a bass clef. The treble clef part consists of a sequence of notes with fingerings: 5, 6, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 8, 6. The bass clef part consists of a sequence of notes with fingerings: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. The score illustrates how the frequency of the reinforced harmonic f_n remains constant while the fundamental frequency f_1 changes.

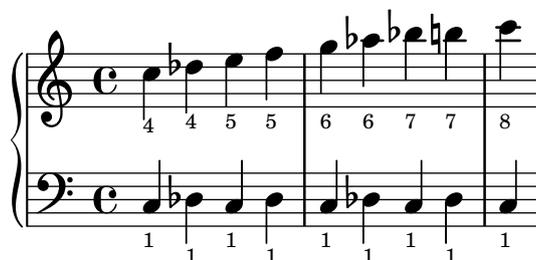


Exemple 2.3.48. Dans ce passage de [Anna-Maria Hefele](#) à 2'17". On fixe le numéro $n = 3$ de l'harmonique renforcée et f_1 varie de façon arbitraire, donc f_n varie aussi.

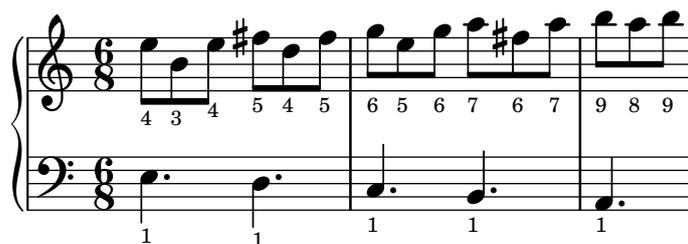
Exemple 2.3.49. Dans ce passage de [Anna-Maria Hefele](#) à 2'33". La note f_1 varie entre deux notes et le numéro n varie de sorte que l'harmonique renforcée f_n fait une mélodie.

Exemple 2.3.50. Dans ce passage de [Anna-Maria Hefele](#) à 2'44". La note f_1 varie entre deux notes et le numéro n varie de sorte que l'harmonique renforcée f_n fait une mélodie.

Exemple 2.3.51. Dans ce passage de *Anna-Maria Hefele* à 2'59". La note f_1 varie entre deux notes et le numéro n varie de sorte que l'harmonique renforcée f_n fait une mélodie.



Exemple 2.3.52. Dans ce passage de *Anna-Maria Hefele* à 3'29". La note f_1 descend et le numéro n varie de sorte que l'harmonique renforcée f_n fait une mélodie en arpèges.



2.3.5 Intervalles justes

[Video de cette section](#)

2.3.5.1 Définition

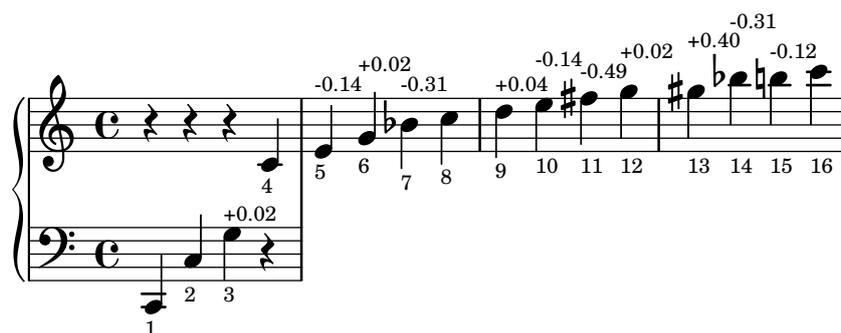
La définition suivante est très importante en musique.

Définition 2.3.53. Un **intervalle juste** est un rapport entre deux fréquences appartenant aux harmoniques $a, b \leq 16$ d'une note donnée.

$$\frac{f_a}{f_b} = \frac{af}{bf} = \frac{a}{b}, \quad a, b \text{ entiers inférieurs à } 16.$$

Autrement dit un **intervalle juste** est un intervalle entre deux harmoniques.

On rappelle la suite des harmoniques étudiée ci-dessus avec les corrections de pitch (et on rappelle que on est à peine sensible à ± 0.1 pitch) :



Il est arbitraire de limiter les harmoniques $a, b \leq 16 = 2^4$ ce qui fait 4 octaves. Cela pourrait être plus, et dépend de notre perception (voir chapitre perception).

Exemple 2.3.54. Par exemple, à partir de la figure précédente, on déduit une liste de quelques intervalles justes :

Harmoniques $a \rightarrow b$	Nom de l'intervalle	Fraction $\frac{f'}{f}$	Pitch x (en demi-tons)
1 \rightarrow 1	Unisson	$\frac{1}{1} = 1$	0
1 \rightarrow 2 ou 2 \rightarrow 4 etc	Octave	$\frac{2}{1} = 2$	12
2 \rightarrow 3	Quinte	$\frac{3}{2}$	$7 + 0,02..$
3 \rightarrow 4	Quarte	$\frac{4}{3}$	$5 - 0,02..$
4 \rightarrow 5	Tierce maj.	$\frac{5}{4}$	$4 - 0,14..$
5 \rightarrow 6	Tierce min. 1	$\frac{6}{5}$	$3 + 0.02 + 0.14 = 3 + 0.16$
6 \rightarrow 7	Tierce min. 2	$\frac{7}{6}$	$3 - 0.31 - 0.02 = 3 - 0.33$
7 \rightarrow 8	Ton 1	$\frac{8}{7}$	$2 + 0.31$
8 \rightarrow 9	Ton 2	$\frac{9}{8}$	$2 + 0.04$

Exercice 2.3.55. Vérifier les colonnes 3,4 de cette liste et continuer la liste.

Solution 2.3.56. :

Harmoniques $a \rightarrow b$	Nom de l'intervalle	Fraction $\frac{f'}{f}$	Pitch x (en demi-tons)
9 \rightarrow 10	Ton 3	$\frac{10}{9}$	$2 - 0.10$
10 \rightarrow 11	Ton 4	$\frac{11}{10}$	$2 - 0.35$
11 \rightarrow 12	Ton 5 ou demi-ton 1	$\frac{12}{11}$	$2 - 0.49 = 1 + 0.51$
12 \rightarrow 13	demi-ton 2	$\frac{13}{12}$	$1 + 0.38$
13 \rightarrow 14	demi-ton 3	$\frac{14}{13}$	$1 + 0.29$
14 \rightarrow 15	demi-ton 4	$\frac{15}{14}$	$1 + 0.19$
15 \rightarrow 18	demi-ton 5	$\frac{16}{15}$	$1 + 0.12$

2.3.5.2 Quasi justesse de la quinte et quarte tempérée :

On s'aperçoit donc que tous les intervalles justes ne sont pas tempérés à l'exception des **octaves qui sont justes**. Mais de façon remarquable **la quarte et la quinte sont proches d'un intervalle juste** respectivement $3/2$ et $4/3$ avec une erreur ± 0.02 pitch qui est imperceptible. Par contre les autres intervalles justes dévient du tempérament égal de façon très perceptible (erreur > 0.1 pitch).

- Ainsi grâce au choix de la division de l'octave en 12 on peut reproduire avec bonne précision les intervalles entre les 4 premières harmoniques (octave, quarte, quinte).
- Le nombre 12 a un autre avantage : il a de nombreux diviseurs : 2, 3, 4, 6 et ainsi on peut structurer le cercle dodécaphonique en parties égales de multiples façons, comme la journée que l'on a choisit de diviser en 12 heures. Mais cela ne semble pas avoir été un argument au départ en musique. Ça a été utilisé par la suite au XXIème siècle par les **modes symétriques** de Messiaen ou par la **musique sérielle**. (Dans la culture, le chiffre 12 est aussi important car il y a 12 mois lunaire dans l'année, cela est seulement du au mouvement relatif de la Terre et de la Lune)

Exercice 2.3.57. Accordage d'un piano en tempérament égal :

- Si f_1, f_2 sont les fréquences de deux notes du piano formant un intervalle de **quinte tempérée**, calculer la fréquence du battement entre l'harmonique 3 de f_1 et l'harmonique 2 de f_2 si $f_1 = 440\text{Hz}$. Ce battement est utilisé par les accordeurs de piano, voir cette **vidéo sur accordage des quintes**.

Solution 2.3.58. Une quinte tempérée est le rapport $f_2 = 2^{\frac{7}{12}} f_1$. La fréquence du battement entre l'harmonique 3 de f_1 et l'harmonique 2 de f_2 est la différence

$$(3f_1 - 2f_2) = f_1 \left(3 - 2 \times 2^{\frac{7}{12}} \right) = f_1 \times 0.0039 = 1.5\text{Hz}$$

Comme $1.5 = \frac{3}{2}$, cela correspond à 3 battements toutes les 2 secondes.

- Si f_1, f_2 sont les fréquences de deux notes du piano formant un intervalle de **tierce tempérée**, calculer la fréquence du battement entre l'harmonique 5 de f_1 et l'harmonique 4 de f_2 si $f_1 = 220\text{Hz}$. Ce battement est utilisé par les accordeurs de piano. **Video de l'accordage de la tierce** (écouter les battements mais attention le discours de la vidéo est plutôt incorrect).

Solution 2.3.59. Une tierce tempérée est le rapport $f_2 = 2^{\frac{4}{12}} f_1$. La fréquence du battement entre l'harmonique 5 de f_1 et l'harmonique 4 de f_2 est la différence

$$(5f_1 - 4f_2) = f_1 \left(5 - 4 \times 2^{\frac{4}{12}} \right) = f_1 \times (-0.039) = -8.7\text{Hz}$$

Cela correspond à 9 battements par seconde.

2.3.5.3 Vidéos sur les intervalles justes

- Jacob Collier explains that **Piano is not in tune** and shows that **major third is out of tune** by +0.14 pitch (half tone).
- Harmoniques de la voix
 - **Wave form de voyelles chantées** par Malik. Harmoniques et notes correspondantes en **Video**
 - **polyphonic overtone singing - Anna-Maria Hefe**

- [Conférence de Anna-Maria Hefe](#)
- Signaux périodiques ou pas :
 - [Lorenz Attractor as audio](#)
 - [Bassoon Multiphonics 01](#)
- [Video sur l'harmonie des sphères d'après Kepler.](#)
- [Video sur comment jouer des intervalles justes sur la guitare](#)

2.4 Le tonnetz et quelques tempéraments justes

Comme l'utilisation des intervalles justes est très importante en musique (musique ancienne et musique du monde) il est utile de représenter les intervalles justes de façon convenable pour ensuite étudier les accords justes, leurs progressions harmoniques et aussi représenter les “**tempéraments justes**” qui sont le choix précis de quelques intervalles justes sur un instrument donné (utilisé en musique ancienne et certaines musiques du monde, autre que “occidentale”). Cette représentation est appelée le réseau **tonnetz** et a été introduite par Euler (en 1739, il a 24 ans), dans son **livre** « Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae ». (“Une nouvelle théorie musicale qui est clairement exposée aux principes d’harmonie les plus fiables“)

2.4.1 Décomposition des intervalles justes en intervalles de base

En arithmétique, on peut décomposer chaque entier à partir des **nombre premiers** : 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... Par exemple $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ etc.

Ces nombres premiers correspondent à des “**intervalles juste de base**” à partir desquels on peut construire tout autre intervalle juste :

Harmoniques $a \rightarrow b$	Nom de l'intervalle	Fraction $\frac{f'}{f}$	Pitch x (en demi-tons)
1 \rightarrow 2	Octave	2	12
1 \rightarrow 3	octave + Quinte	3	12 + 7 + 0,02..
1 \rightarrow 5	2 octaves + Tierce maj.	5	2 \times 12 + 4 - 0,14..
1 \rightarrow 7	2 octaves + septieme min.	7	2 \times 12 + 10 - 0,33
1 \rightarrow 11	3 octaves + triton bas	11	3 \times 12 + 6 - 0,49
1 \rightarrow 13	3 octaves + sixte haute	13	3 \times 12 + 9 + 0,40

Exemple 2.4.1. Par exemple la **terce mineure** $5 \rightarrow 6$, mi \rightarrow sol, se décompose de la façon suivante en intervalles de base :

$$\underbrace{(\text{mi} \rightarrow \text{sol})}_{\text{terce min.}} = \underbrace{(\text{mi} \rightarrow \text{do})}_{-\text{terce maj.}} + \underbrace{(\text{do} \rightarrow \text{sol})}_{+\text{quinte}}$$

cela correspond au calcul suivant.

$$\frac{6}{5} = \frac{2 \times 3}{5} \equiv \text{oct.} + (\text{oct.} + \text{quinte}) - (2 \text{ oct.} + \text{terce}) = \text{quinte} - \text{terce}$$

Ou de façon équivalente et plus directe :

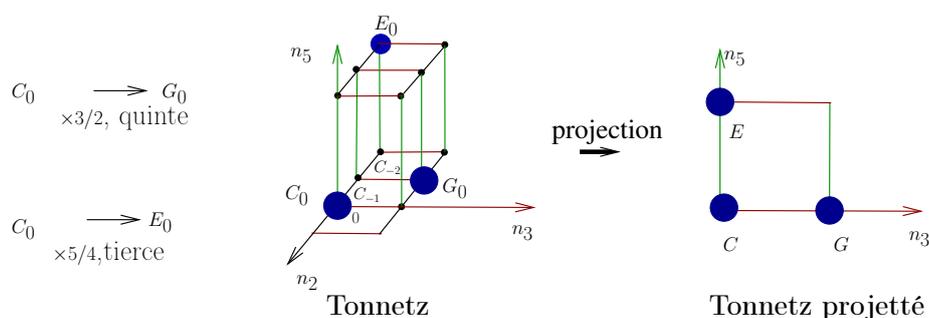
$$\frac{6}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} \equiv \text{quinte - tierce}$$

Lien :

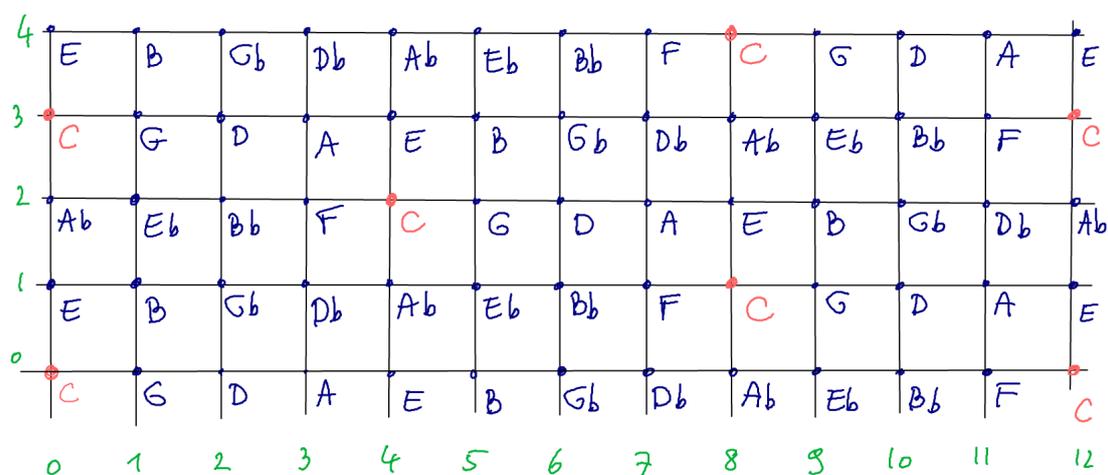
- Vidéo sur les nombres premiers sur [Arte, voyage au pays des maths, Conjecture de Riemann](#).

2.4.2 Le tonnetz 2, 3, 5

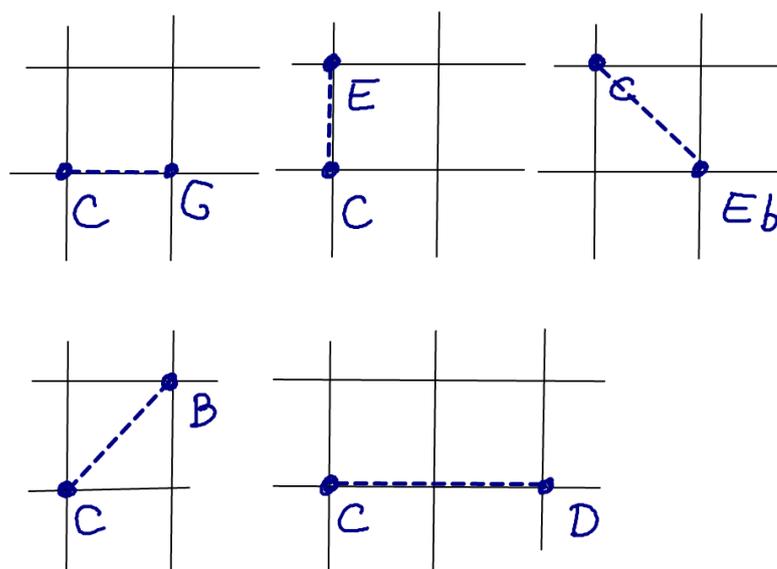
Dans le tonnete 2, 3, 5, par simplicité, on considère seulement les 3 premiers facteurs premiers 2, 3, 5 et comme changer d'octave n'affecte pas le nom de la note, on omettra de préciser l'octave (i.e. le facteur 2). Les axes n_2, n_3, n_5 correspondent respectivement aux changement de fréquence $\times 2, \times 3, \times 5$ à chaque étape, ce sont donc des axes logarithmiques. Le deuxième schéma est le premier où l'axe n_2 est orthogonal au plan (c'est une projection).



Dans la figure suivante, voici la représentation obtenue avec un **axe des quintes justes en horizontal** (facteur 3) et l'**axe des tierces majeures justes en vertical** (facteur 5). Pour aider à la discussion, on a mis des coordonnées en vert. Ce réseau est en fait infini et chaque note représentée a une fréquence différente des autres en principe. On a cependant utilisé les lettres A, B, \dots, G pour les notes. Ainsi en rouge, les différentes notes C sont différentes. On précisera ces différences dans la suite.



- Ce qui nous intéressera dans ce réseau, ce sont les **intervalles justes consonants** qui sont des paires de **notes voisines**. Par exemple



- C-G : quinte, facteur $\times 3$,
- C-E : tierce, facteur $\times 5$,
- C-Eb : tierce mineur, facteur $\times \frac{3}{5}$.
- C-D : ton, facteur $\times 3 \times 3 = \times 9$
- Le demi-ton $C - B$, facteur $\times 3 \times 5 = \times 15$ est plutôt dissonant, car ce facteur est trop grand.

Remarques :

- Dans ce réseau tous les intervalles sont justes en principe, chaque note est donc unique, ainsi les notes C en rouge sont en fait toutes différentes, mais proche de

l'unisson et sont appelées des **commas**. Par exemple partant du C en $(0, 0)$, il y a un autre C en $(4, 2)$.

- En terme de pitch (ou demi-ton), on rappelle que d'après le tableau ci-dessus,
 - pour une quinte juste, i.e. déplacement $(1, 0)$, il faut ajouter la correction $+0.02$ pitch.
 - pour une tierce majeure juste, i.e. déplacement $(0, 1)$, il faut ajouter la correction -0.14 pitch.
- Sur chaque ligne horizontale, appelé **le cycle des quintes**, qui ne se referme pas exactement : il apparaît le **comma pythagoricien** après le déplacement $(12, 0)$.
- Sur chaque ligne verticale, appelé **le cycle des tierces majeure**, qui ne se referme pas exactement : il apparaît un comma après le déplacement $(0, 3)$.
- La **quinte du loup** est le déplacement $(11, 0)$. Son pitch est donc $7 + 11 \times 0.02 = 7.22$ pitch. Rappelons que la quinte juste est 7.02 pitch. La quinte du loup est donc perçue comme dissonante.

2.4.2.1 Les commas

La définition suivante n'est pas conventionnelle. Cependant, nous ne connaissons pas de définition de comma en musique juste et celle ci nous semble cohérente avec la suite.

Définition 2.4.2. Un **comma** est un intervalle juste de hauteur plus petit que $1/4$ ton ($= 1/2$ pitch).

Remarque 2.4.3. Il y a donc une infinité de comma. Attention, les comma ne forment pas un sous réseau du tonnetz.

Par exemple :

- Le **comma pythagoricien** est le déplacement $(12, 0)$. C'est donc un intervalle de $12 \times 0.02 = 0.24$ pitch, ($= 1/4$ de demi-ton).
- Le **comma syntonique**, (**aussi appelé Ptolémé, Dydinis, standard**) est le déplacement $(4, -1)$. C'est donc un intervalle de $4 \times 0.02 - 1 \times (-0.14) = 0.22$ pitch.
- Par exemple le **schisma** est un comma pythagoricien moins un comma syntonique, soit le déplacement

$$(8, 1) = (12, 0) - (4, -1)$$

C'est donc un intervalle de $8 \times 0.02 + 1 \times (-0.14) = 0.02$ pitch, presque imperceptible.

- Le **comma enharmonique** est le déplacement $(0, 3)$.

Exercice 2.4.4. Calculer le pitch du comma $(0, 3)$ et l'exprimer comme combinaison des commas pythagoricien $(12, 0)$ et syntonique $(4, -1)$.

Remarque 2.4.5. le comma syntonique permet de transformer une **tierce pythagoricienne** qui est le déplacement $(4, 0)$ en une tierce juste qui est $(0, 1)$. En effet

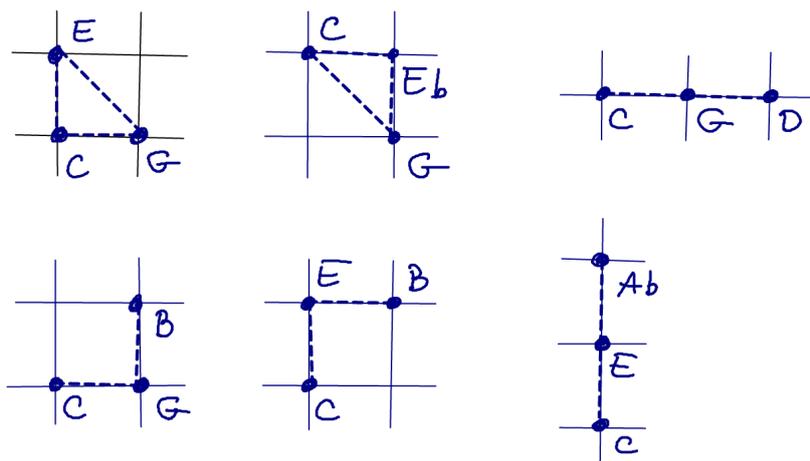
$$(4, 0) - (4, -1) = (0, 1).$$

Cela est utilisé pour construire le **Tempérament mésotonique $1/4$ comma**.

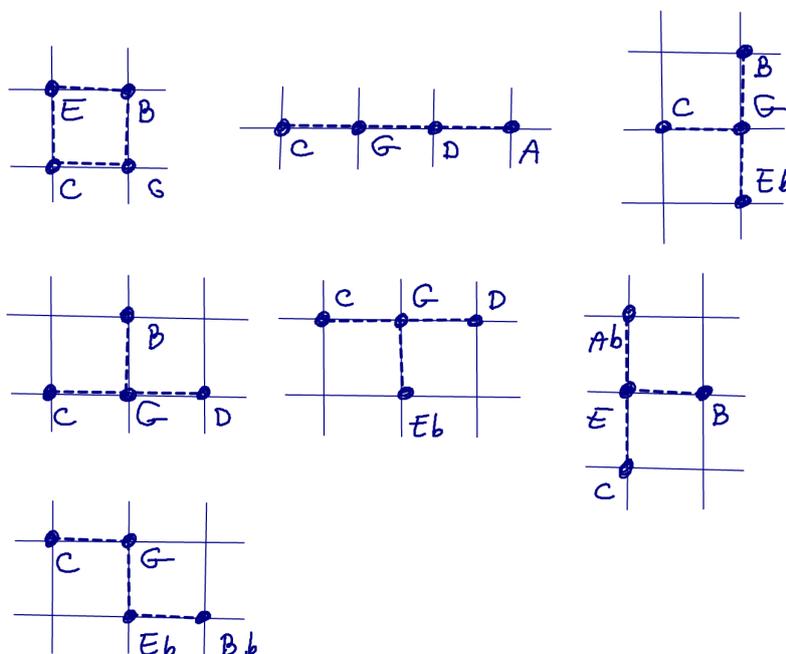
2.4.2.2 Quelques accords justes

Dans le réseau tonnetz 2,3,5, les **accords justes consonants** sont des ensemble de notes formés d'intervalles consonants listés ci-dessus.

Une **triade** est un accord contenant 3 notes. Voici quelques **triades consonantes** remarquables. On remarque la forme géométrique pour chacune d'elle, qui la caractérise.



Voici des accords à 4 notes consonants.



2.4.2.3 Profondeur d'un accord

Chaque accord est caractérisé par sa forme géométrique. Cependant il ressort des propriétés communes. En voici une que l'on appelle la profondeur. Observons :

- Dans la **triade majeure** C,E,G la note C est la fondamentale de toutes ses notes. Donc on perçoit une **sensation de stabilité**. [Video](#)
- Dans la **triade mineure** E,G,B aucune des notes présente n'est fondamentale de toutes. La fondamentale serait C, mais elle est absente. On perçoit donc une **sensation de manque**. [Video](#)

Plus précisément, on peut quantifier cela en mesurant la profondeur en pitch de la fondamentale commune aux notes présentes. (pour une définition précise, voir le cours pour physiciens)

2.4.2.4 Exemple de cadence harmonique en tempérament de Zarlino

Une **cadence harmonique** est un enchaînement d'accords.

Voici un exemple de cadence sur le tempérament de Zarlino, basé sur un mouvement répété de mouvement de demi-ton de déplacement $(-1, -1)$, sauf pour deux mouvements : 3 : ton de déplacement $(-2, 1)$ et 5 : demi-ton de déplacement $(1, -2)$.

The diagram shows a grid of notes in Zarlino temperament. The notes are arranged in a 3x4 grid with labels: A, E, B, Gb (top row); F, C, G (middle row); Db, Ab (bottom row). Red arrows indicate movements between notes, numbered 1 through 6. Below the grid is a musical staff in G-flat major (one flat) with six chords corresponding to the notes in the grid. Red arrows below the staff indicate the sequence of movements from one chord to the next, numbered 1 through 6.

Exercice 2.4.6. Composer une cadence harmonique sur le tonnetz 2,3,5 avec des accords de 4 ou 5 notes. Pour cela, choisir une liste de déplacements correspond avec une faible variation de pitch que l'on se permettra d'utiliser et partir d'un accord de départ.

2.4.2.5 Tempéraments justes

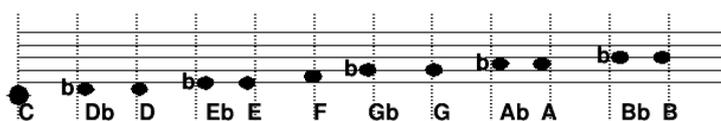
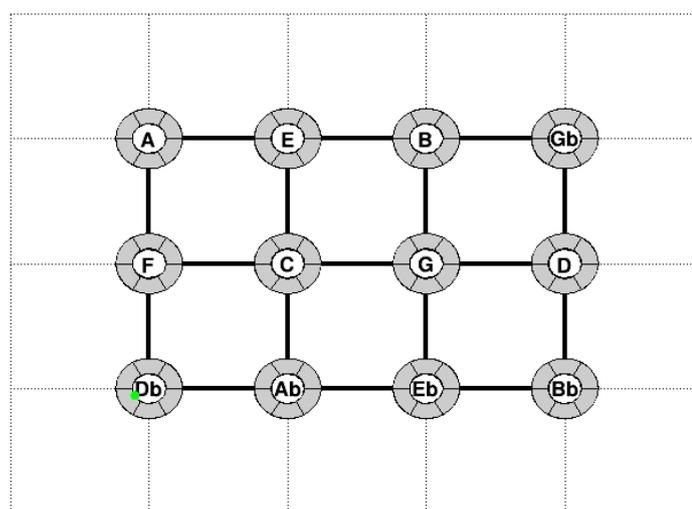
Comme le réseau tonnetz contient en principe une infinité de notes, cela pose des difficultés pour jouer ces notes. Sur un instrument traditionnel, en pratique pour jouer avec

des intervalles justes, il faut choisir les notes que l'on pourra utiliser. Ce choix s'appelle un tempérament juste.

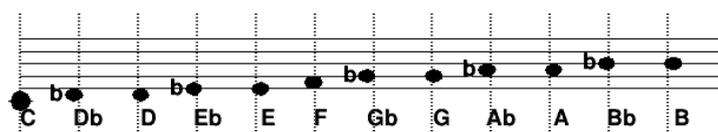
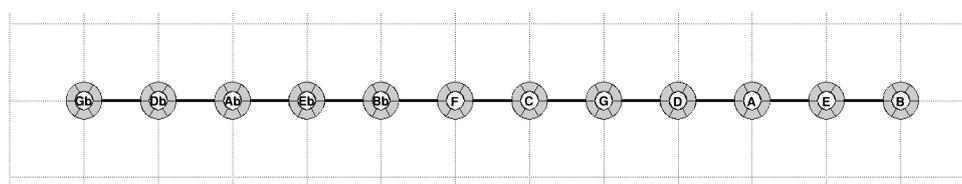
Définition 2.4.7. Un tempérament juste dans le tonnetz 2,3,5 est le choix des douze notes chromatiques C, Db, D, \dots, Bb, B parmi le réseau tonnetz ci-dessus. Ce choix doit être groupé afin de contenir des intervalles et accords justes résonnants que l'on pourra utiliser.

Voici quelques exemple historiques de tempéraments justes pour une certaine tonalité :

- Le **tempérament de Zarlino**, déjà présent dans le tempérament de cloches chinoises de 433 B.C. (ref : article de Cohn 1997, page 63, et Falkenhausen, "suspended music.." p.284) ([video](#)) :



- Le tempérament de Pythagore.



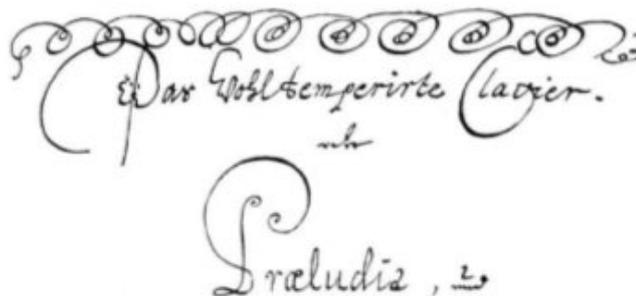
- Le tempérament de Kepler dans *Harmonices Mundi* 1619 ([video](#))



- Le **tempérament de Jean Jacques Rousseau** dans Dictionnaire de la musique” 1768 ([video](#))



- **J.S. Bach**, “Clavier bien tempéré”, 1722. (ref : Benson p.188)



The temperament of Vallotti and Young is probably closest to the intentions of J. S. Bach for his Well-Tempered Clavier. According to the re-

- Dans un tempérament juste (non égal), les transpositions donnent des gammes différentes. Voici des conseils de Christian Schubart en 1784, concernant un certain tempérament :

5.13. IRREGULAR TEMPERAMENTS

183

C major	Completely pure. Its character is: innocence, simplicity, naivety, children's talk.
C minor	Declaration of love and at the same time the lament of unhappy love.—All languishing, longing, sighing of the lovesick soul lies in this key.
D \flat major	A leering key, degenerating into grief and rapture. It cannot laugh, but it can smile; it cannot howl, but it can at least grimace its crying.—Consequently only unusual characters and feelings can be brought out in this key.
C \sharp minor	Penitential lamentation, intimate conversation with God, the friend and help-meet of life; sighs of disappointed friendship and love lie in its radius.
D major	The key of triumph, of Hallelujahs, of war-cries, of victory-rejoicing. Thus, the inviting symphonies, the marches, holiday songs and heaven-rejoicing choruses are set in this key.
D minor	Melancholy womanliness, the spleen and humours brood.
E \flat minor	Feelings of the anxiety of the soul's deepest distress, of brooding despair, of blackest depression, of the most gloomy condition of the soul. Every fear, every hesitation of the shuddering heart, breathes out of horrible E \flat minor. If ghosts could speak, their speech would approximate this key.

Vidéos :

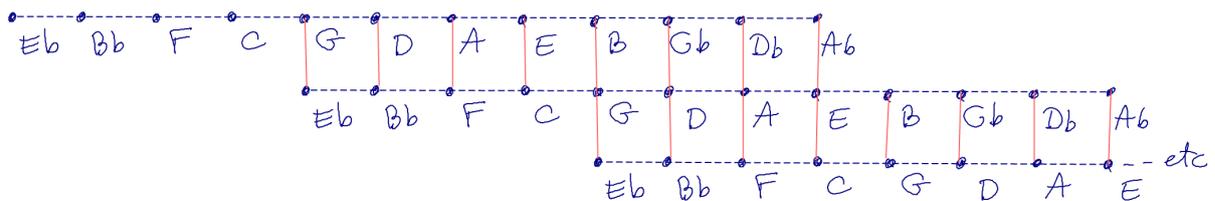
- En tempérament égal :
 - [Gymnopédie No. 1 –{ } Tonnetz Visualization](#)
 - [Tonnetz Analysis of Chopin E-major Prelude](#)
 - [Muse - Take A Bow \(Tonnetz harmonic analysis\)](#)
 - Limitations du tonnetz 2,3,5 : [How to create negative harmony using the Tonnetz tone grid](#)

2.4.2.6 Tempérament mésotonique

Le tempérament **Tempérament mésotonique 1/4 comma** n'est pas un tempérament juste, il n'est donc pas représentable sur le réseau tonnetz. Néanmoins c'est une sorte d'intermédiaire entre le tempérament égal et le tempérament juste de Zarlino ci-dessus. Voici sa définition.

Définition 2.4.8. “**Tempérament mésotonique 1/4 comma**” : Dans la suite du cycle des quintes justes $E_b, B_b, F, C, \dots, D_b, A_b$, on réduit chaque quinte juste par un facteur égal de sorte que la tierce $C - E$ devienne une tierce juste.

D'après la définition, dans la figure ci-dessous toutes les notes de même nom sont égales (i.e. même fréquence ou séparées par des octaves). Horizontalement, les traits pointillés sont des quintes réduites (non justes) de pitch $x = 7 - 0.03 = x_{\text{quinte.j.}} - 0.05$ de sorte que verticalement les traits pleins sont des tierces justes de pitch $x_{\text{tierce.j.}} = 4 - 0.14$. Ce schéma est périodique (se continue à gauche et à droite).



Exercice 2.4.9. Montrer que dans le tempérament mésotonique 1/4 comma défini ci-dessus, les intervalles de quinte qui ont été réduites ont un pitch de quinte juste -0.05 qui est à peine perceptible. Montrer que les 8 tierces suivantes sont justes : $E_b - G - B$, $B_b - D - G_b$, $F - A - D_b$, $C - E - A_b$.

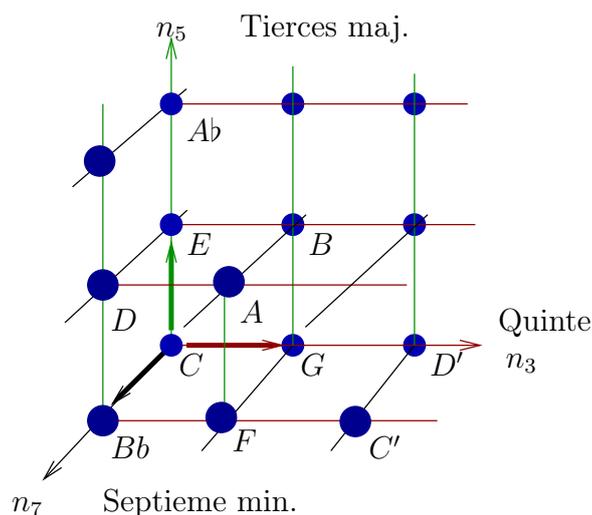
Solution 2.4.10. Dans la suite des quintes justes entre C et E on a : $C - G - D - A - E$ il y a 4 quintes justes. Cet intervalle $C - E$ s'appelle la **tierce de pythagore** et son pitch est : $x = (7 + 0.02) \times 4 \bmod 12 = 4 + 0.08$. Or la tierce juste est de pitch $x_{\text{tierce}} = 4 - 0.14$. Donc dans le tempérament mésotonique, il faut baisser le pitch de $-0.14 - 0.08 = -0.22$ (c'est le comma syntonique de déplacement $(4, -1)$ de pitch 0.22, vu plus haut). On partage cette correction sur les 4 quintes intermédiaires. La correction de chaque quinte est donc $-0.22/4 = -0.05$. Par conséquent après cette correction, dans la suite des quintes corrigées $C - G - D - A - E$ la tierce $C - E$ est juste. Plus généralement dans la suite des quintes corrigées $E_b, B_b, F, C, \dots, D_b, A_b$, les tierces $E_b - G$, $B_b - D$, $F - A$, $C - E$, $G - B$, $D - G_b$, $A - D_b$, $E - A_b$ sont justes.

Remarque 2.4.11. D'après wikipédia : c'est le théoricien Pietro Aaron qui aurait imaginé, en 1523 à Venise, le tempérament dit « mésotonique ». Les tempéraments mésotoniques ont été utilisés à la fin de la Renaissance et pendant toute la période baroque. L'intérêt des tempéraments mésotoniques est de pouvoir utiliser des tierces pures, ce qui est possible

avec l'exemple ci-dessus dans les huit tonalités majeures $E_b, G, B_b, D, F, A, C, E$ et dans leurs 8 tonalités relatives mineures $C, E, G, B, D, G_b, A, D_b$.

2.4.3 Le tonnetz 2, 3, 5, 7, tonnetz général et recherche musicale

Si on considère les 4 premiers facteurs premiers 2, 3, 5, 7 en omettant le facteur 2 de l'octave, on a la représentation suivante des intervalles justes :

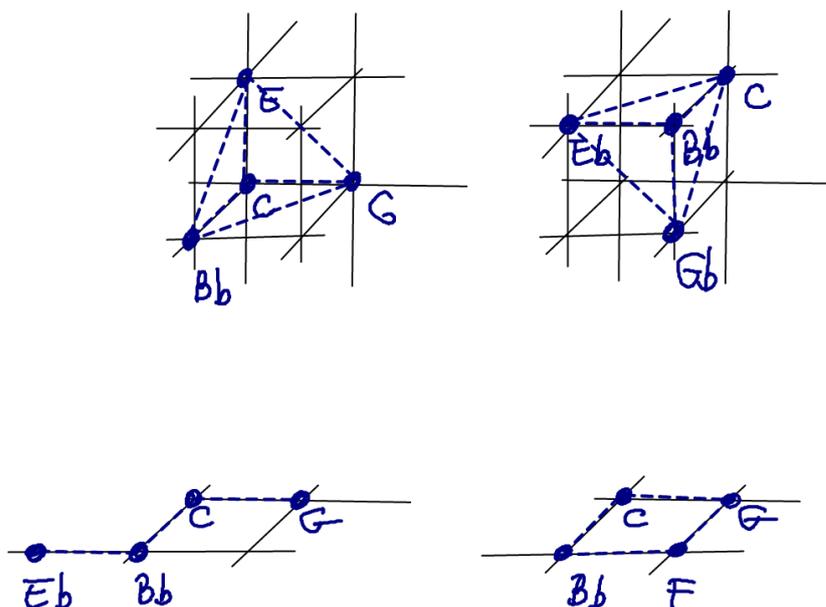


avec l'axe des quintes, l'axe des tierces majeures et l'axe des septièmes mineures.

Un intervalle juste est représenté par un déplacement selon les 3 axes. Par exemple

- La **septième** mineure est $(0, 0, 1)$ et correspond au facteur $\frac{7}{4}$.
- Le **triton** est $(0, -1, 1)$ et correspond au facteur $\frac{7}{5}$.

Comme avec le tonnetz 2, 3, 5, on peut énumérer les **accords justes consonants** sur le tonnetz 2, 3, 5, 7. Voici quelques exemples remarquables :



Remarque 2.4.12. Il apparaît des accords bien différents que l'on confondrait en musique à tempérament égal, comme C, Eb, G, Bb qui a une version dans le plan 3,7 et une version dans le plan 3,5.

2.4.3.1 Résolutions

- “**Résolution du triton $\frac{7}{5}$** ” vers la tierce majeure $\frac{5}{4}$: il y a un mouvement d’un demi-ton de $F \rightarrow E$ (en tirets bleus) dont la fraction est $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{21} \simeq (1.050)^{-1}$. Il y a aussi un mouvement d’un demi-ton $B \rightarrow C$ (en pointillés rouges) dont la fraction est $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{15} \simeq 1.066$. (On rappelle que le demi-ton chromatique est $2^{1/12} \simeq 1.059$). En musique ce dernier mouvement s’appelle “**{}** **résolution de la sensible**”.

[Video](#), et avec la basse virtuelle : [Video](#).

/home/faure/c++/musique/tonnetz/rapport_tonnetz

- (Cadences II-V-I Majeure : [Video](#) et mineure [Video](#).)

- **Enchaînement d'accords** basée sur trois “petits déplacements” $\frac{20}{21}, \frac{16}{15}, \frac{8}{9}$: [Video](#), et avec la basse virtuelle : [Video](#).

Exercice 2.4.13. Composer une cadence harmonique sur le tonnetz 2,3,5,7 avec des accords de 4 ou 5 notes. Pour cela, choisir une liste de déplacements correspond avec une faible variation de pitch que l'on se permettra d'utiliser et partir d'un accord de départ.

2.5 Échantillonnage d'un sinus, effet de repliement (ou effet stroboscopique), Aliasing

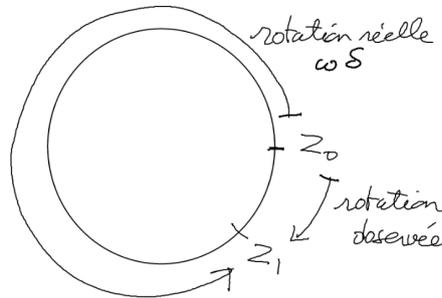
2.5.1 Rappels sur l'effet stroboscopique

L'**effet stroboscopique** correspond au fait qu'un mouvement de rotation $t \in \mathbb{R} \rightarrow z(t) = e^{i2\pi ft} \in \mathbb{C}$ avec une fréquence $f \in \mathbb{R}$, observé à des temps discrets $t_j = j\delta$ avec un pas de temps $\delta > 0$ et $j \in \mathbb{Z}$, donne une suite de valeurs discrètes $z_j = z(t_j) = e^{i2\pi f\delta j}$ qui peut être interprété comme provenant d'une autre fréquence f_k donnée par

$$f_k = f + \frac{1}{\delta}k \quad (2.5.1)$$

avec n'importe quelle valeur entière $k \in \mathbb{Z}$. En effet

$$e^{i2\pi f_k \delta j} = e^{i2\pi (f + \frac{1}{\delta}k)\delta j} = e^{i2\pi f\delta j + 2\pi k j} = e^{i2\pi f\delta j} = z_j.$$



La suite $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une **suite périodique de fréquences de période $\frac{1}{\delta}$** . Parmi celles ci, la fréquence perçue est souvent celle de valeur absolue minimale, donc comprise dans l'intervalle

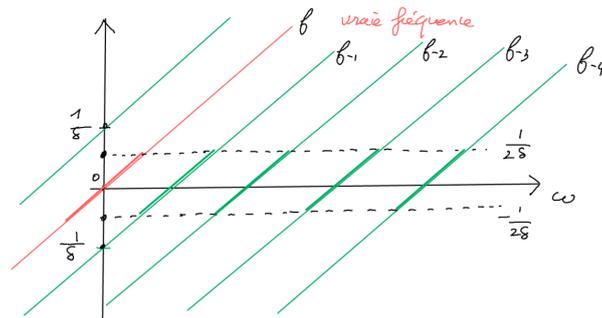
$$f_k \in \left[-\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2\delta} \right].$$

On appelle

$$F_{\text{Nyquist}} = \frac{1}{2\delta}$$

la **fréquence de Nyquist**. Supposons que $\delta > 0$ est fixé et ω augmente. Voici le graphe de f_k en fonction de ω en gras, les valeurs f_k qui seront sélectionnées par notre perception, i.e. les plus faibles en valeur absolue.

2.5. ÉCHANTILLONNAGE D'UN SINUS, EFFET DE REPLIEMENT (OU EFFET STROBOSCOPIQUE)



Exemple 2.5.1. Si on observe une roue qui tourne à la fréquence $f = 49$ tours/sec = 49Hz, éclairée par un néon, $\delta = \frac{1}{50}$ sec alors

$$f_k = f + 50k \text{ tours/sec}$$

et parmi cette liste de fréquences il y a pour $k = -1$, une fréquence faible, $f_{-1} = -1$ tour/sec que notre perception va interpréter comme le vrai mouvement. Il nous semblera donc que la roue tourne en sens contraire, lentement avec -1 tour/sec.

Exercice 2.5.2. (TP*) Faire un programme qui simule cet effet stroboscopique avec une animation. (Utiliser cet [exemple](#)).

Exercice 2.5.3. Une roue de vélo avec $N = 60$ rayons symétriquement répartis, tourne à une vitesse $f = 5$ tour/sec, éclairée par un néon de fréquence $\delta^{-1} = 50$ Hz. A quelle vitesse f_k nous semble t-il que la roue tourne ?

Solution 2.5.4. La périodicité est maintenant l'écart entre deux rayons soit $\frac{2\pi}{N}$. La condition est donc

$$g_k = g + \frac{1}{\delta N} k = 5 + \frac{50}{60} k$$

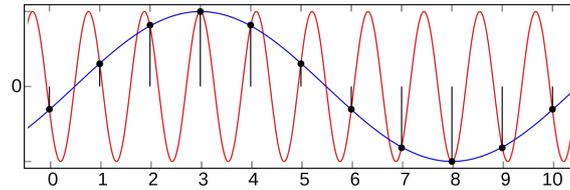
La valeur la plus faible de f_k est obtenue pour $k = -6$ donnant

$$f_{-6} = 5 - 6 \frac{50}{60} = 0$$

La roue paraît donc immobile.

2.5.2 Effet stroboscopique sur une fonction sinus ou cosinus échantillonnée

Observation : From wikipedia : ce graphique montre un signal sinusoïdal de fréquence $f = 0,9$ en rouge, échantillonné avec un pas s $\delta = 1,0$. L'échantillonnage pourrait aussi provenir du signal de fréquence $f' = 0,1$ en bleu (ou encore d'autres signaux de fréquences notées $\pm f_k$ dans l'explication ci-dessous). Remarquer ici que $f' = -(f - \frac{1}{\delta})$ noté $-f_{-1}$ ci-dessous.



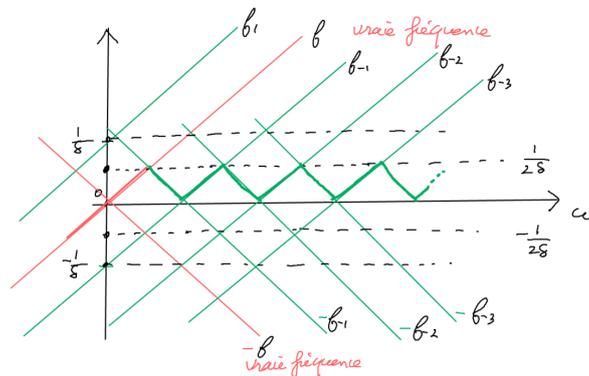
Explication : Le phénomène stroboscopique se produit sur un signal $t \rightarrow \cos(2\pi ft)$ échantillonné avec un pas de temps $\delta > 0$ car

$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2} (e^{i2\pi ft} + e^{-i2\pi ft})$$

est composé des deux fréquences $f, -f$. Donc d'après (2.5.1), après échantillonnage ce sera équivalent à deux séries de signaux de fréquences

$$\pm f_k = \pm \left(f + \frac{1}{\delta} k \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (2.5.2)$$

Voici le graphe de $\pm f_k$ en fonction de f avec δ fixé.



On observe une périodicité et du fait des fréquences négatives $-f_k$, on observe comme un **rebond du graphe des fréquences dans l'intervalle** $[0, \frac{1}{2\delta}]$ appelé **repliement des fréquences** aussi appelé **aliasing**. Rappel : $F_{\text{Nyquist}} = \frac{1}{2\delta}$ s'appelle la **fréquence de Nyquist**. On peut aussi interpréter le résultat comme une symétrie de la fréquence f par rapport à un axe $k\frac{1}{2\delta}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ de façon à se ramener dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2\delta}]$, mais le plus clair est de retenir que le spectre est composé des fréquences $(-f, f)$ périodisé avec une période $\frac{1}{\delta}$ en fréquence.

Exemple 2.5.5. Voici un signal sinus de fréquence f variable et échantillonné à la fréquence $F = 44100\text{Hz}$. Ecouter [sinus_aliasing.wav](#). Programme python [sinus_aliasing.py](#). Dessin gif animé [sinus_aliasing.gif](#).

2.5. ÉCHANTILLONNAGE D'UN SINUS, EFFET DE REPLIEMENT (OU EFFET STROBOSCOPIQUE)

2.5.3 Effet stroboscopique (aliasing) sur un signal périodique quelconque

Pour un **signal périodique quelconque** de fréquence fondamentale $f > 0$, on a vu en (2.3.1) qu'il se décompose en somme de cosinus de fréquences $f_n = nf$ avec $n \in \mathbb{N}$ et des amplitudes correspondantes A_n . Il donc réellement composé des fréquences $\pm f_n = \pm nf$. Par conséquent, en appliquant la formule (2.5.2) on obtient le résultat suivant.

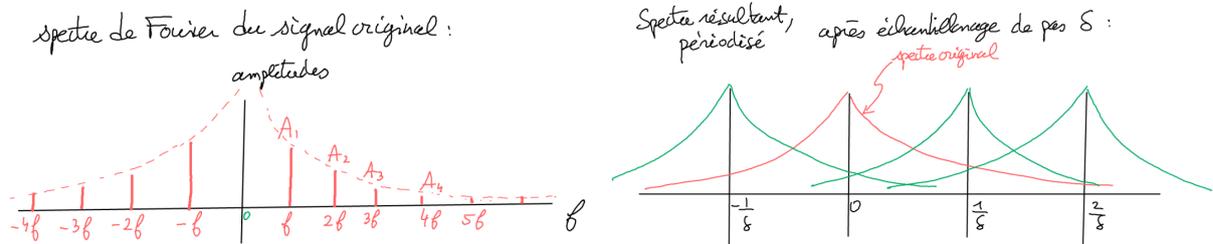
Proposition 2.5.6. *Un signal périodique de fréquence fondamentale $f > 0$ échantillonné avec un pas de temps $\delta > 0$, est composé des fréquences*

$$\pm f_{n,k} = \pm \left(nf + \frac{k}{\delta} \right), \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

c'est à dire que c'est le spectre original $\pm nf$ périodisé en fréquence avec une période $\frac{1}{\delta}$.

Remarque 2.5.7. On dit aussi qu'il y a un rebond ou repliement (aliasing) de toutes ces fréquences $\pm f_n = nf$ dans l'intervalle $[0, \frac{1}{2\delta}]$.

Voici le schéma que l'on peut faire de ce résultat, correspondant au repliement du spectre des fréquences :



Remarque 2.5.8. si f et $\frac{1}{\delta}$ ne sont pas commensurables, c.a.d. si $f\delta \notin \mathbb{Q}$ alors l'ensemble des fréquences $\pm f_{n,k}$ est dense dans \mathbb{R} . En pratique les amplitudes A_n décroissent de sorte que la mesure est finie.

Conclusion 2.5.9. D'après la figure précédente on observe que les hautes fréquences du signal original donnent composantes à basse fréquence dans le signal périodisé. Ce phénomène est appelé "**Aliasing**" et est **perçu comme des parasites**. Pour l'éviter il est **important de filtrer** le signal original en ne gardant que les fréquences $f \in [-\frac{1}{2\delta}, \frac{1}{2\delta}]$ (appelé filtre basse fréquence à la fréquence de Nyquist $F_{\text{Nyquist}} = \frac{1}{2\delta}$) avant de l'échantillonner.

2.6 Traitements particuliers du son musical

2.6.1 Modification d'un son périodique

Comme l'a montré la question 2 de l'exercice 2, un son parfaitement périodique n'est pas très agréable à l'écoute. Il est plus agréable de perturber ce son de différentes manières. Par exemple

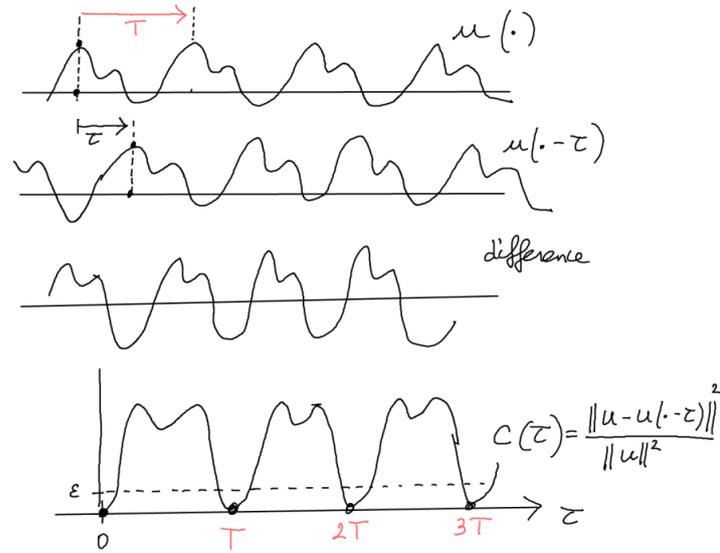
- Le **vibrato** est une modulation de la fréquence. Cela se fait au violon, au trombone, à la voix.
- Le **trémolo** est une modulation de l'amplitude. Ce se fait à la flûte, à la voix.

2.6.2 Détection du pitch d'un signal (presque) périodique

Un **signal monophonique** est un signal qui localement est presque périodique, i.e. correspond localement à une note de musique. Cela provient en général d'une voix humaine ou d'un instrument de musique seul. En musique il peut être intéressant de **connaître les notes jouées**, pour par exemple écrire la partition correspondante de façon automatique. Dans cette section, on explore cette question.

Question 2.6.1. *à partir d'un signal monophonique (i.e. un instrument seul) donné $t \rightarrow u(t)$ comment détecter automatiquement le pitch (i.e. hauteur de note) au cours du temps $x(t)$?*

Solution 2.6.2. (détails ci-dessous) Nous avons vu que le pitch d'une note seule $x(t)$ est défini par la « période locale » $T(t)$ du signal. Un algorithme efficace consiste, pour un instant t donné, à considérer un court extrait du signal noté $u(\cdot) : t \rightarrow u(t)$ et de le comparer à lui-même décalé d'une durée $\tau > 0$. Ce signal décalé est la fonction notée $u(\cdot + \tau) : t \rightarrow u(t + \tau)$. On note $C(\tau) = \frac{\|u(\cdot) - u(\cdot + \tau)\|^2}{\|u(\cdot)\|^2}$ la mesure relative de cette différence où $\|\cdot\|$ est une norme comme la norme L^2 définie ci-dessous. La période $T(t)$ est la valeur de τ qui minimise localement $C(\tau)$.



Remarque 2.6.3. Cet algorithme a une latence (i.e. un retard) inférieur à T_{\min} qui est la période minimale que l'on souhaite détecter. Par exemple si la note la plus grave à détecter est C_3 , de pitch $x_{C_3} = 36$, alors (2.3.7) donne $f_{\min} = 65.4\text{Hz}$, $T_{\max} = 0.015$ sec qui est une latence acceptable. Cet algorithme s'adapte donc très bien à une analyse audio en temps réel.

En peut ensuite faire une transformée de Fourier sur une période T et déduire les coefficients \hat{u}_n , appelé "timbre".

Cet algorithme est implémenté en langage wasm [ici, section 5](#), ce qui permet d'utiliser le programme dans un navigateur web.

2.6.2.1 Détail de l'algorithme et programme

On présente ici les détails de l'algorithme esquissé en section 2.6.2.

Entrée : Soit $t_{\max} > 0$ et une fonction $u : t \in [0, t_{\max}] \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}$ non identiquement nulle.

Question : On veut savoir si $u(t)$ se "répète" avec une période $T \in [0, \frac{t_{\max}}{2}]$.

Algorithme : Soit $0 < \tau < \frac{t_{\max}}{2}$. On note T_τ° l'opérateur de translation de τ

$$(T_\tau^\circ u)(t) = u(t + \tau).$$

Soit

$$C(\tau) := \frac{1}{\|u\|_{L^2(0, t_{\max})}^2} \|u - T_\tau^\circ u\|_{L^2(0, \frac{t_{\max}}{2})}^2$$

où par définition

$$\|u\|_{L^2(0,t_{\max})}^2 := \int_0^{t_{\max}} |u(t)|^2 dt.$$

On remarque que

$$0 \leq C(\tau) \leq 4$$

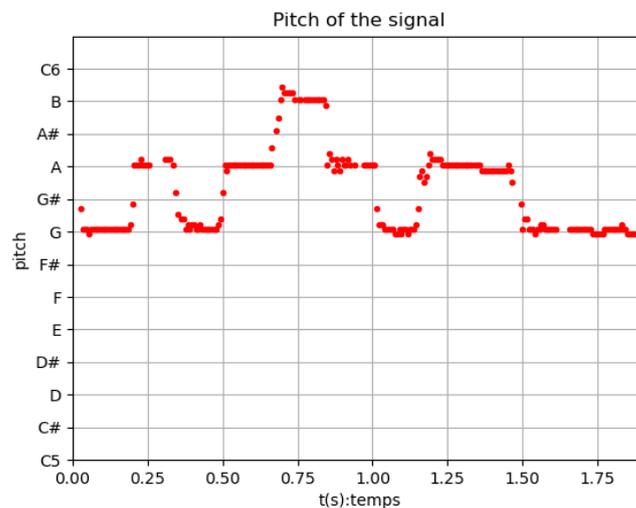
en effet $\|u - T_\tau^\circ u\|_{L^2(0, \frac{t_{\max}}{2})}^2 \leq \left(\|u\|_{L^2(0, t_{\max})} + \|u\|_{L^2(0, t_{\max})} \right)^2 \leq 4 \|u\|_{L^2(0, t_{\max})}^2$. Et $C(\tau) = 0$ implique que $u = T_\tau^\circ u$ c'est à dire que τ est une "période". Remarquer que pour $\tau = 0$, on a $C(0) = 0$.

En pratique on étudie numériquement la fonction $C(\tau)$ et on cherche un minimal local inférieur à un seuil donné, par exemple $C(\tau) < 0.1$ et avec

$$0 < T_{\min} < \tau < T_{\max}$$

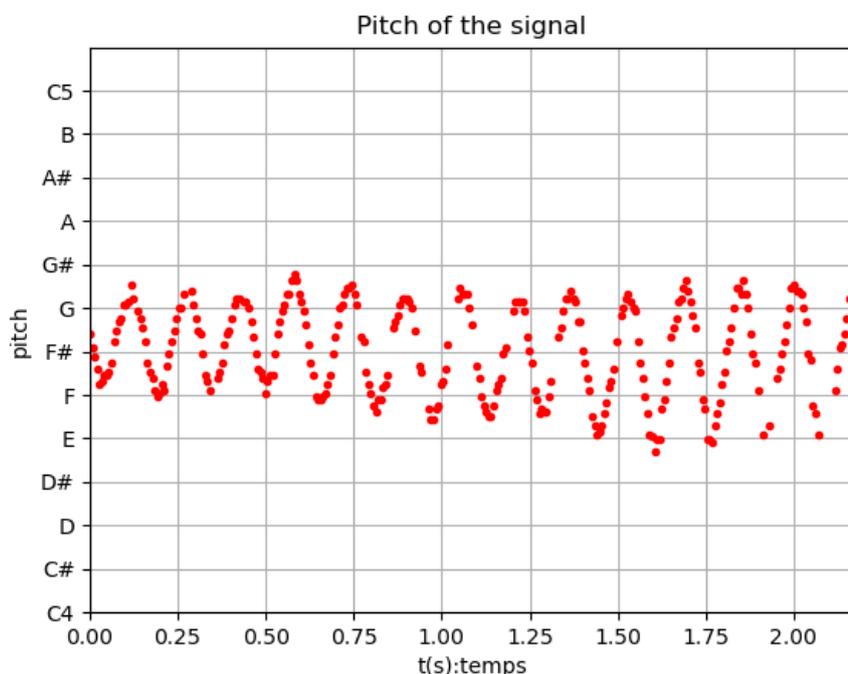
où $T_{\max} < \frac{t_{\max}}{2}$ sera la période maximale recherchée (donc fréquence minimal $f_{\min} = \frac{1}{T_{\max}}$) et $T_{\min} > 0$ sera la période minimale recherchée (donc fréquence maximale $f_{\max} = \frac{1}{T_{\min}}$). Autrement dit on détectera des fréquences de notes dans l'intervalle $f \in [f_{\min}, f_{\max}]$.

Exercice 2.6.4. (TP)"**Detection automatique du pitch**". Appliquer ce programme python `pitch_detection.py` pour détecter le pitch $x(t)$ de ce fichier `flute.wav`, puis à `trumpet.wav`.



Exercice 2.6.5. (TP*) Mesurer la fréquence et l'amplitude du vibrato (en 1/2 tons) de la chanteuse **Marian Anderson** sur cet **extrait** de « **They crucified my lord** », à $t = 1'12''$. Puis sur des notes tenues sans vibrato du Contre ténor James Bowman sur **stabat mater**. Enregistrer votre propre jeu à l'instrument ou à la voix et mesurer la justesse de votre jeu.

Solution 2.6.6. Solution Marian Anderson :



On observe une fréquence de 6Hz et une amplitude jusqu'à ± 1 ton.

(*) Améliorer l'algorithme et le programme de détection de pitch, en effectuant une interpolation quadratique pour la recherche du minimum local de $C(\tau)$.

Piste de recherche :

- Comment détecter les pitches d'un signal polyphonique? (mots clefs : multipitch detection)
- Comment écrire la partition automatiquement avec lilypond ou autre? Pour cela il faut détecter les changement de pitch, leur valeur et la date de début et de fin.

2.6.3 Filtres

2.6.3.1 Définition et propriétés d'un filtre ou opérateur

Un **filtre** est une opération T qui transforme un signal $u : t \rightarrow u(t)$ en un autre signal $v : t \rightarrow v(t)$. Mathématiquement c'est donc une application dans l'espace des fonctions. En mathématique on appelle cela un **opérateur**. Dans la suite, on utilisera donc le terme **opérateur** ou **filtre**, de façon équivalente, selon que le contexte est plutôt mathématique ou plutôt analyse du signal. On s'intéresse dans ce chapitre uniquement aux signaux sonores, donc aux fonctions dépendant d'une seule variable $t \in \mathbb{R}$, mais ce qui suit se généralise à des fonctions à plusieurs variables. En analyse des images, on utilise 2 variables x_1, x_2 , en analyse des vidéos, on utilise 3 variables x_1, x_2, t , etc

On va considérer des opérateurs T ayant les propriétés suivantes :

Opérateur linéaire si $\forall u, v$ fonctions et $\forall a, b \in \mathbb{C}$,

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$$

Physiquement, cette propriété apparaît de façon approximative dans le régime des faibles amplitudes (d'après le développement de Taylor). On peut alors penser à T comme une matrice et les signaux u, v comme des vecteurs, i.e. appliquer l'algèbre linéaire. Dans le cas d'un signal numérique échantillonné $u = (u_j)_{j=0 \rightarrow N-1}$, on peut écrire l'opérateur T sous la forme matricielle

$$(Tu)_i = \sum_{j=0}^{N-1} T_{i,j} u_j \quad (2.6.1)$$

dans le cas d'un signal discrétisé. Les coefficients $(T_{i,j})_{i,j=0 \rightarrow N-1}$ forment une matrice et caractérisent l'opérateur. Si $\delta_i = \left(0, \dots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \dots\right)$ désigne un vecteur de base, on a

$$T_{i,j} = \langle \delta_i | T \delta_j \rangle.$$

Dans le cas du temps continu $t \in \mathbb{R}$, on écrit

$$(Tu)(t) = \int T(t, t') u(t') dt' \quad (2.6.2)$$

et la fonction $T(t', t)$ s'appelle en mathématique le **noyau de Schwartz** de l'opérateur, et en théorie du signal s'appelle la **fonction de transfert en temps** du filtre. Si δ_t désigne la distribution de Dirac en t , on a²

$$T(t, t') = \langle \delta_t | T \delta_{t'} \rangle.$$

Remarque 2.6.7. D'après (2.1.1) on peut écrire $u(t) = \langle \delta_t | u \rangle$ et donc (2.6.2) s'écrit aussi

$$\langle \delta_t | Tu \rangle = \int \langle \delta_t | T \delta_{t'} \rangle \langle \delta_{t'} | u \rangle dt',$$

qui est analogue à (2.6.1).

Remarque 2.6.8. Avec des signaux d'amplitude trop forte des effets « non linéaires » peuvent apparaître, cad non modélisable par un opérateur linéaire, comme la génération d'harmoniques. Voir [Nonlinear_acoustics](#). En particulier la génération des sons dans les instruments de musique nécessitent des effets non linéaires (ex : instruments à vent, à archet. Les modèles linéaires suffisent pour les percussions et cordes pincées ou frappées), voir [ce cours d'acoustique musicale](#).

2. En effet $\langle \delta_t | T \delta_{t'} \rangle \stackrel{(2.6.2)}{=} \int T(t, t'') \delta_{t'}(t'') dt'' = T(t, t')$.

Opérateur causal pour toute fonction u , et pour tout instant t , la valeur $v(t) = (Tu)(t)$ ne dépend pas des valeurs ultérieures $u(t')$ avec $t' > t$. D'après l'écriture (2.6.1) cela s'exprime par $T_{i,j} = 0$ si $j > i$ et pour (2.6.2) cela s'exprime par $T(t, t') = 0$ si $t' > t$.

Remarque 2.6.9. Si on traite un signal sonore en « temps réel », on ne peut que utiliser des opérateurs causaux (car le signal futur n'est pas connu), mais si on travaille « en différé » c'est à dire avec un signal déjà enregistré, il est possible et parfois utile d'utiliser des opérateurs n'ayant pas la propriété de causalité. (Par exemple le décalage en temps, opérateur de convolution, transformée par ondelettes etc)

Remarque 2.6.10. La causalité en physique est un fait observé, fondamental et presque évident pour le bon sens appelé relation de « cause à effet », appelé en physique aussi **flèche du temps**. Cependant la compréhension de ce phénomène est loin d'être satisfaisante, car les équations de la physique sont symétriques, donc pourquoi on n'aurait pas $T(t, t') = 0$ si $t' < t$ au contraire? En art, cette question est évoquée dans le film récent « TeneT », 2020.

Opérateur stationnaire Un opérateur $T : u \rightarrow v = Tu$ est **stationnaire** si un décalage temporel de u a pour réponse le même décalage temporel de v . Par exemple un filtre d'un ingénieur du son, dont les paramètres sont fixés (ne changent pas au cours du temps), est un « filtre stationnaire ».

En termes mathématiques, si \mathcal{T}_τ est l'opérateur de décalage temporel par τ défini par

$$\mathcal{T}_\tau : u(t) \rightarrow (\mathcal{T}_\tau u)(t) = u(t - \tau)$$

alors l'opérateur T est stationnaire si

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad T\mathcal{T}_\tau = \mathcal{T}_\tau T. \quad (2.6.3)$$

Proposition 2.6.11. *si T est un opérateur linéaire stationnaire alors son noyau de Schwartz vérifie*

$$T(t, t') = T(t - t', 0) = \chi(t - t') \quad (2.6.4)$$

*qui est en fait une fonction χ à une seule variable appelée **réponse impulsionnelle du filtre** car c'est l'image de la distribution de Dirac δ_0 par l'opérateur :*

$$\chi(t) := T(t, 0) = (T\delta_0)(t) \quad (2.6.5)$$

Démonstration. on écrit

$$(T\mathcal{T}_\tau u)(t) = \int T(t, t') u(t' - \tau) dt' = \int T(t, t' + \tau) u(t') dt'$$

$$(\mathcal{T}_\tau Tu)(t) = \int T(t - \tau, t') u(t') dt'$$

donc (2.6.3) implique $T(t, t' + \tau) = T(t - \tau, t')$, $\forall t, t', \tau$. En particulier, posant $t'' = t' + \tau$ et $\tau = t$ cela donne

$$T(t, t'') = T(t - \tau, t'' - \tau) = T(0, t'' - t), \forall t, t''.$$

Si on applique l'opérateur T à la distribution de Dirac δ_0 , on obtient

$$(T\delta_0)(t) \stackrel{(2.6.2)}{=} \int T(t, t') \delta_0(t') dt' \stackrel{(2.1.1)}{=} T(t, 0).$$

□

Transformée de Fourier appliquée à un opérateur stationnaire Pour une fréquence $f \in \mathbb{R}$ donnée, notons $e^{i2\pi f \cdot} : t \in \mathbb{R} \rightarrow e^{i2\pi f t} \in \mathbb{C}$ la fonction appelée mode de Fourier de fréquence f . Considérons "l'élément de matrice" suivant de l'opérateur dans la base de Fourier :

$$\langle e^{i2\pi f \cdot} | T e^{i2\pi f' \cdot} \rangle = \int \int e^{-i2\pi f t} T(t, t') e^{i2\pi f' t'} dt dt'. \quad (2.6.6)$$

Dans le cas particulier d'un opérateur stationnaire, avec la réponse impulsionnelle $\chi(t) \stackrel{(2.6.5)}{=} T(t, 0)$, on introduit la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle appelée **fonction de transfert** en fréquence :

$$H(f) := (\mathcal{F}\chi)(f) = \int e^{-i2\pi f t} \chi(t) dt \quad (2.6.7)$$

Voici un résultat très important en théorie du signal montrant l'intérêt de la transformée de Fourier

Théorème 2.6.12. *Pour un opérateur stationnaire T de fonction de transfert H , on a*

$$\langle e^{i2\pi f \cdot} | T e^{i2\pi f' \cdot} \rangle = H(f) \delta(f' - f)$$

autrement dit l'opérateur est diagonal dans la base de Fourier.

Démonstration. On observe que

$$\langle e^{i2\pi f \cdot} | T e^{i2\pi f' \cdot} \rangle \stackrel{(2.6.6)}{=} \int \int e^{-i2\pi f t} T(t, t') e^{i2\pi f' t'} dt dt' \stackrel{(2.6.4)}{=} \int \int e^{-i2\pi f t} \chi(t - t') e^{i2\pi f' t'} dt dt'$$

On effectue le changement de variable $t \rightarrow t'' = t - t'$, et on utilisera que $\int e^{i2\pi(f' - f)t'} dt' = \delta(f' - f)$,

$$\begin{aligned} \langle e^{i2\pi f \cdot} | T e^{i2\pi f' \cdot} \rangle &= \int \int e^{-i2\pi f(t'' + t')} \chi(t'') e^{i2\pi f' t'} dt'' dt' = \int \int e^{-i2\pi f t''} \chi(t'') e^{i2\pi(f' - f)t'} dt'' dt' \\ &\stackrel{(2.6.7)}{=} H(f) \delta(f' - f) \end{aligned}$$

□

Remarque 2.6.13. Le Théorème 2.6.12 a été utilisé la première fois par Joseph Fourier pour étudier l'équation de la chaleur, dont le générateur (sur \mathbb{R}^n) est l'opérateur Laplacien Δ qui est un opérateur stationnaire. Il a découvert la transformée de Fourier dans ce but.

Manifestation de la causalité La propriété de causalité de l'opérateur T qui est que $\chi(t) = 0$ si $t < 0$, implique que $f \rightarrow H(f)$ est holomorphe sur $\text{Im}(f) \leq 0$. En effet en posant $f = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$H(f) \stackrel{(2.6.7)}{=} \int_0^{+\infty} e^{-i2\pi ft} \chi(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-i2\pi at} e^{2\pi bt} \chi(t) dt$$

qui est convergent pour tout $b \leq 0$. Voici une caractérisation complète de la propriété de causalité.

Théorème 2.6.14. (*Théorème de Paley-Wiener*). *Considérons un opérateur T stationnaire. T est causal, c'est à dire $\chi(t) = 0$ pour $t < 0$ si et seulement si $H \in H^2(\mathbb{C}_-) = L^2(\mathbb{C}_-) \cap \text{Hol}(\mathbb{C}_-)$ appelé *espace de Hardy* avec $\mathbb{C}_- := \{z \in \mathbb{C}, \text{Im}(z) \leq 0\}$.*

Définitions

— Le module

$$G(f) := |H(f)|$$

est appelé le **gain du filtre**. On peut aussi mesurer le **gain en décibels** :

$$G_{\text{dB}}(f) := 10 \log_{10} (|H(f)|^2) = 20 \log_{10} G(f).$$

Les courbe $f \rightarrow G_{\text{dB}}(f)$ et $f \rightarrow \arg(H(f)) \in]-\pi, \pi]$ (de la phase) s'appelle le **diagramme de Bode**.

— La bande passante est l'ensemble des fréquences f telles que

$$B := \left\{ f \in \mathbb{R} \text{ t.q. } G(f) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \max(G) \right\}$$

— Si on considère l'opérateur dérivée $(Tu)(t) = \frac{du}{dt}$ alors c'est un opérateur stationnaire et

$$\langle e^{i2\pi f \cdot} | T e^{i2\pi f' \cdot} \rangle = \int e^{-i2\pi ft} \frac{d}{dt} (e^{i2\pi f' t}) dt = i2\pi f' \int e^{i2\pi(f'-f)t} dt = i2\pi f' \delta(f' - f)$$

donc

$$H(f) = i2\pi f.$$

Inversement, un filtre stationnaire donc la fonction de transfert (localement) $H(f) = Cf$ avec $C \in \mathbb{C}$ est appelé **filtre dérivateur**.

- Si on considère l'opérateur intégration $(Tu)(t) = \int_0^t u(t') dt'$ alors c'est un opérateur stationnaire et

$$\langle e^{i2\pi f \cdot} | T e^{i2\pi f' \cdot} \rangle = \int e^{-i2\pi f t} \int_0^t e^{i2\pi f' t'} dt' dt = \frac{1}{i2\pi f'} \int e^{i2\pi(f'-f)t} dt = \frac{1}{i2\pi f'} \delta(f' - f)$$

donc

$$H(f) = \frac{1}{i2\pi f}.$$

Inversement, un filtre stationnaire donc la fonction de transfert (localement) $H(f) = C \frac{1}{f}$ avec $C \in \mathbb{C}$ est appelé **filtre intégrateur**.

2.6.3.2 Filtres actifs avec les amplificateurs opérationnels

Référence : <http://courelectr.free.fr/AOP/AOP.HTM> qui fait partie d'un cours plus général d'électronique pratique.

2.6.3.3 Exemple d'un filtre d'ordre 1 à temps continu

Exercice 2.6.15. Considérons le circuit électronique analogique suivant avec une résistance R et un condensateur C :



Le signal en entrée est la tension $u(t)$ et le signal en sortie est la tension $v(t)$. L'opérateur (ou filtre) qui nous intéresse est ici la transformation $T : u \rightarrow v$.

1. Montrer que v est solution de l'équation différentielle ordinaire d'ordre 1 (cad faisant intervenir la dérivée première de v)

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau}v(t) + u(t) \quad (2.6.8)$$

avec $\tau = \frac{1}{RC}$.

2. En supposant $u(t') = 0$ et aussi $v(t') = 0$ pour tout $t' < t_0$ (avec t_0 date de départ donnée), montrer que la solution est

$$v(t) = \int_{-\infty}^t e^{(t'-t)/\tau} u(t') dt'. \quad (2.6.9)$$

Remarque 2.6.16. D'après cette expression, remarquer que $v(t)$ s'obtient comme une moyenne de $u(t')$ sur les temps t' antérieurs et un poids exponentiellement décroissant. Ce moyennage efface les fluctuations de u à petites périodes et ne conserve que les fluctuations de grandes périodes $T \gg \tau$ (ou basses fréquences $f = \frac{1}{T} \ll \frac{1}{\tau}$). Ainsi on appelle T un **filtre passe bas** de **fréquence de coupure** $f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$.

3. Posant $v = Tu$, T est-il un opérateur linéaire? Quelle est l'expression du noyau de Schwartz (ou fonction de transfert) $T(t, t')$ de T ? T est-il un opérateur causal?
4. Calculer la **réponse impulsionnelle** du filtre $\chi(t)$, c'est à dire la solution v , si en entrée on impose une distribution de Dirac $u = \delta_0$?
5. Calculer la fonction de transfert en fréquence $H(f)$ du filtre et son module $|H(f)|$.

Solution 2.6.17.

1. Si $i(t)$ est le courant dans le circuit, on a $i = C \frac{dv}{dt}$ et $u = Ri + v$ donc

$$\begin{aligned} u &= RC \frac{dv}{dt} + v \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\tau} v + u \end{aligned}$$

avec $\tau = \frac{1}{RC}$.

2. On peut utiliser la méthode de **de la variation de la constante** ou **principe de Duhamel**. L'équation homogène $\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau} v$ a pour solution $v(t) = v(0) e^{-t/\tau}$. On pose alors $v(t) = C(t) e^{-t/\tau}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\tau} v + u \Leftrightarrow \dot{C} e^{-t/\tau} - \frac{1}{\tau} C e^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau} C e^{-t/\tau} + u \\ \Leftrightarrow \dot{C} &= e^{t/\tau} u \end{aligned}$$

donc en supposant $u(t') = 0$ si $t' < t_0$ par exemple,

$$C(t) = \int_{-\infty}^t e^{t'/\tau} u(t') dt'$$

et

$$v(t) = C(t) e^{-t/\tau} = \int_{-\infty}^t e^{(t'-t)/\tau} u(t') dt'.$$

satisfait bien la condition limite $v(t) = 0$ si $t < t_0$.

3. On a bien $T(u_1 + u_2) = Tu_1 + Tu_2$ et $T(\lambda u) = \lambda u$ d'après la linéarité de l'intégrale donc T est bien un opérateur linéaire. D'après la définition (2.6.2), on écrit

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t, t') u(t') dt'$$

avec le noyau de Schwartz

$$T(t, t') = \begin{cases} e^{(t'-t)/\tau} & \text{si } t' \leq t \\ 0 & \text{si } t' > t \end{cases}$$

Donc T est bien un opérateur causal.

4. Si $u = \delta_0$, alors

$$\chi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t, t') \delta_0(t') dt' = T(t, 0) = \begin{cases} e^{-t/\tau} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (2.6.10)$$

appelée réponse impulsionnelle du filtre.

5. La fonction de Transfert est la transformée de Fourier de χ :

$$\begin{aligned} H(f) &= \int e^{-i2\pi ft} \chi(t) dt \stackrel{(2.6.10)}{=} \int_0^{+\infty} e^{-i2\pi ft} e^{-t/\tau} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(-i2\pi f - \frac{1}{\tau})t} dt = \frac{1}{(-i2\pi f - \frac{1}{\tau})} \left[e^{(-i2\pi f - \frac{1}{\tau})t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{i2\pi f + \frac{1}{\tau}} \end{aligned}$$

Alors

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + (2\pi f)^2} = \frac{\tau^2}{1 + \left(2\pi \frac{f}{(1/\tau)}\right)^2}$$

est une **Lorenzienne** centrée en $f = 0$ de largeur en fréquence $f_c = \frac{1}{\tau}$. La fonction

$$f \in \mathbb{C} \rightarrow H(f) = \frac{1}{i2\pi f + \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{i2\pi \left(f - \frac{i}{2\pi\tau}\right)}$$

est méromorphe sur \mathbb{C} et admet un pôle en $f = \frac{i}{2\pi\tau}$.

Remarque 2.6.18. En théorie du signal on dit que T est un **filtre linéaire d'ordre 1** car v est solution d'une l'équation différentielle d'ordre 1, (2.6.8).

2.6.3.4 Filtre numérique, temps discret, signaux échantillonnés $(u_j)_j$

Si $v = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ est un signal échantillonné, avec pas de temps $0 < \delta < \tau$, on définit la dérivée discrète par

$$v'_j := \frac{1}{\delta} (v_{j+1} - v_j), \quad j = 0 \dots N - 2$$

Remarque 2.6.19. C'est en fait le taux d'accroissement de la fonction $v(t)$ sur un intervalle de temps δ appelé aussi **différence finie**. On aurait aussi pu définir $v'_j := \frac{1}{\delta}(v_j - v_{j-1})$ ou $v'_j := \frac{1}{2\delta}(v_{j+1} - v_{j-1})$ qui sont des définitions différentes mais deviennent équivalentes dans le limite des « variations lentes » de v .

L'analogie de l'équation différentielle ordinaire (2.6.8) est l'équation suivante appelée équation aux différences finies ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta}(v_{j+1} - v_j) &= -\frac{1}{\tau}v_j + u_j, \quad \forall j, \\ \Leftrightarrow v_{j+1} &= v_j + \delta \left(-\frac{1}{\tau}v_j + u_j \right), \quad \forall j \\ &= v_j \left(1 - \frac{\delta}{\tau} \right) + \delta u_j \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Cette dernière formule permet de construire le signal v à partir du signal u par récurrence sur j .

Exercice 2.6.20. (TP) **”Filtre discret d'ordre 1”**. Utilisant la formule (2.6.11), programmer en python une fonction qui en entrée prend le signal $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ et en sortie renvoie le signal $v = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$ défini par (2.6.11). Appliquer ce filtre à un signal sonore (pour une fréquence de coupure f_c bien choisie) et écouter.

Exercice 2.6.21. (*) Exprimer la solution de l'équation 2.6.11, c'est à dire exprimer v_j à partir du signal en entrée $(u_j)_j$. Retrouver (2.6.9) dans la limite $\delta \rightarrow 0$. Commenter.

Solution 2.6.22.

1. On a

$$\begin{aligned} v_j &= v_{j-1} \left(1 - \frac{\delta}{\tau} \right) + \delta u_{j-1} \\ v_{j-1} &= v_{j-2} \left(1 - \frac{\delta}{\tau} \right) + \delta u_{j-2} \end{aligned}$$

etc donc

$$\begin{aligned} v_j &= \delta u_{j-1} + \delta \left(1 - \frac{\delta}{\tau} \right) u_{j-2} + \delta \left(1 - \frac{\delta}{\tau} \right)^2 u_{j-3} + \dots \\ &= \delta \sum_{k \geq 0} \left(1 - \frac{\delta}{\tau} \right)^k u_{j-k-1} \end{aligned}$$

qui est une série convergente si $0 < \delta < \tau \Leftrightarrow 0 < \left(1 - \frac{\delta}{\tau} \right) < 1$.

2. Dans la limite $\frac{\delta}{\tau} \ll 1$, vérifions que l'on retrouve l'expression en temps continu (2.6.9). On écrit

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\delta}{\tau}\right)^k &= e^{k \ln\left(1 - \frac{\delta}{\tau}\right)} \\ \ln\left(1 - \frac{\delta}{\tau}\right) &= -\frac{\delta}{\tau} + O\left(\left(\frac{\delta}{\tau}\right)^2\right) \\ v_j &= \delta \sum_{k \geq 0} \left(1 - \frac{\delta}{\tau}\right)^k u_{j-k-1} = \delta \sum_{k \geq 0} e^{k\left(-\frac{\delta}{\tau} + O\left(\left(\frac{\delta}{\tau}\right)^2\right)\right)} u_{j-k-1} \end{aligned}$$

Posant $t_k = \delta k$, et $v_j = v(t_j)$

$$\begin{aligned} v(t_j) &= \delta \sum_{k \geq 0} e^{\frac{t_k}{\delta} \left(-\frac{\delta}{\tau} + O\left(\left(\frac{\delta}{\tau}\right)^2\right)\right)} u(t_{j-k-1}) \\ &= \delta \sum_{k \geq 0} e^{-t_k/\tau} e^{t_k O\left(\frac{\delta}{\tau^2}\right)} u(t_{j-k-1}) \end{aligned}$$

Or $e^{t_k O\left(\frac{\delta}{\tau^2}\right)} = 1 + t_k O\left(\frac{\delta}{\tau^2}\right)$ et $\delta \sum_{k \geq 0} w(t_k) = \int w(t') dt' (1 + O(\delta))$ donc

$$v(t_j) = \delta \sum_{k \geq 0} e^{-t_k/\tau} \left(1 + t_k O\left(\frac{\delta}{\tau^2}\right)\right) u(t_{j-k-1})$$

Le passage à la limite $\delta \rightarrow 0$ donne

$$v(t) = \int_0^\infty e^{-t'/\tau} u(t-t') dt'$$

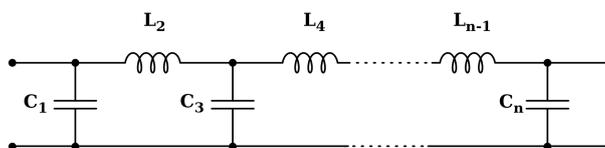
qui est (2.6.9).

Remarque 2.6.23. C'est un cas particulier de ce qui s'appelle **Filtre à réponse impulsionnelle infinie** ou **IIR, Infinite_impulse_response**. En théorie du signal numérique ce sont des filtres très utilisés car ils sont inspirés des phénomènes physique (comme ici un circuit électronique ou filtre analogique) et « sonnent » donc réalistes ou naturels. Le filtre précédent est d'ordre 1, car v_{j+1} dépend de u_j, v_j . Dans un filtre d'ordre n , v_j dépend de v_{j-k}, u_{j-k} avec $k = 1, \dots, n$.

Exercice 2.6.24. (TP) « **perception des voyelles et du langage** » Dans Audacity, charger le fichier **Voyelles_Par_Malik.wav**, l'écouter. Avec Menu/Analyse/Tracer le spectre et choisissant l'option axe fréquence logarithmique, vérifier que la fréquence des voyelles émises est $f_1 = 160\text{Hz}$, soit C_4 . Quelles sont les fréquences de harmoniques f_2, f_3, f_4 ?

1. Avec Menu/Effets/Filtres classiques.. appliquer un **filtre Butterworth passe bas**, d'ordre 6, et de fréquence de coupure $f_c = 500\text{Hz}$. Tracer le spectre et vérifier que les harmoniques hautes sont coupées. Ecouter. Reprenez le signal de départ et appliquer le même filtre **passe haut**. Que remarquez vous ?
2. Essayez de même avec votre propre voix enregistrée. Conclusion où se situe l'information perçue sur les voyelles ?

Exercice 2.6.25. (*) Le schéma électronique du **filtre Butterworth** d'ordre n est le suivant.



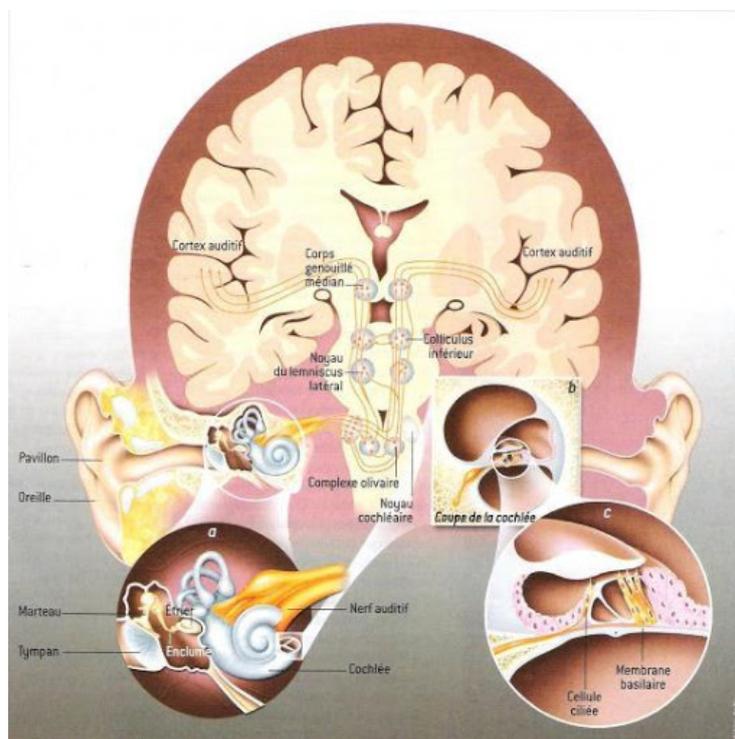
Ecrire l'équation différentielle ordinaire associée (analogue à (2.6.9)) et écrire l'équation aux différences finies analogue à (2.6.11). Ecrire une fonction en python pour ce filtre.

Chapitre 3

Perception du son

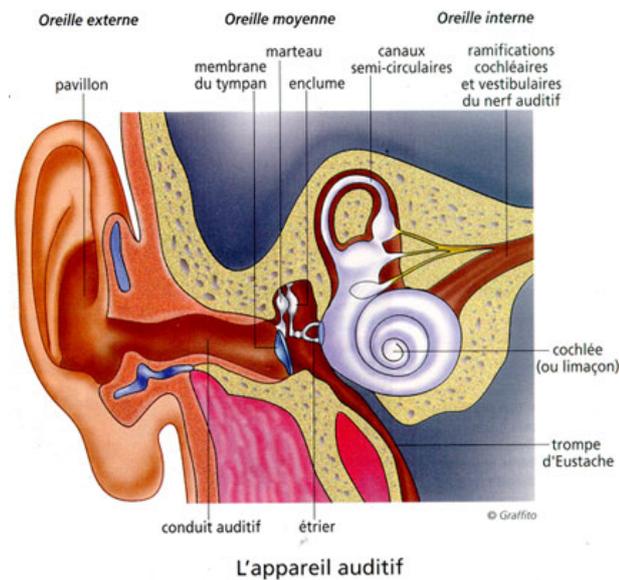
Dans ce chapitre on décrit le transfert d'information entre un signal sonore $p(t)$, i.e. **variation de pression**, à l'entrée d'une oreille (ou de chaque oreille) jusqu'à la **perception consciente d'un son** et ses caractéristiques par l'individu. Tous les mécanismes physiologiques qui participent à ce transfert d'information, s'appelle le **système auditif**. Cette description sera en fait très partielle pour la principale raison que la plupart des mécanismes sont encore mal compris voir totalement inconnus comme ce qu'est la "la conscience" qui est l'étape finale de ce transfert. De plus le signal n'est pas vraiment transféré mais plutôt "analysé", "filtré" et "transformé" de façon assez complexe par les étapes situés entre l'oreille et le conscient, appelé "inconscient". Seuls quelques unes des caractéristiques du signal sont extraites et transformées de multiples façon. Cela conduit à des illusions auditives que nous décrirons.

3.1 Description du système auditif

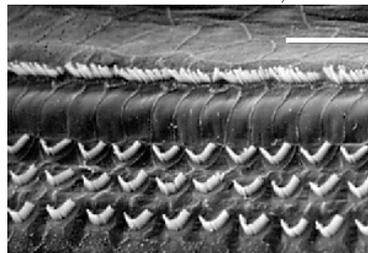


Voici une description rapide des différentes étapes (plus détaillées ensuite) :

- Une partie de l'onde de pression (le son) qui arrive au voisinage des oreilles est diffusée par **le pavillon** (voir aussi **pavillon**). Une partie de l'onde entre dans le conduit auditif et atteint la membrane du tympan.
- La **membrane du tympan** se met en mouvement et transmet ce mouvement à la cochlée via trois os qui sont articulés : marteau, enclume, étrier. Il semblerait que la présence de ces os intermédiaires permette une bonne transmission de l'énergie sonore qui seraient réfléchi sinon. Un autre rôle de ces petits os est qu'ils servent de "fusible" : si le signal est trop fort, les os se bloquent et évitent de transmettre une énergie trop forte aux organes auditifs suivants.



- Dans la cochlée il y a un fluide qui reçoit les mouvements de vibration de la part de l'enclume, et ces mouvements pénètrent dans la **cochlée** qui est formée de conduits enroulés en colimaçon. Le long de la cochlée, il y a une membrane appelée **membrane basilaire** dont la taille dépliée est 10cm par 1cm, et qui est en contact de tout son long avec des milliers de petits cils, appelées **cellules ciliées**. Les fréquences aiguës restent au début de la cochlée alors que les fréquences graves pénètrent tout le long de la membrane basilaire jusqu'au bout de la cochlée.
- Chaque cil est comme un résonateur. Il peut se mettre en mouvement sous l'influence de la membrane basilaire. Il libère alors des ions qui excitent des terminaisons nerveuses de **neurones**, des dendrites. Photo de cils, à l'échelle = $15\mu m$:



- Il y a donc des milliers de **dendrites** issues de ces cils (i.e. fils conducteurs) qui transmettent des influx nerveux venant spécifiquement de chaque cil. Toutes ces dendrites sont regroupées en parallèle dans le “nerf auditif” qui envoie cette information très riche au cerveau.
- L'information nerveuse est analysée par différentes parties du cerveau. Ne nombreux calculs sont effectués par des algorithmes mal connus ou non connus. Tout cela est inconscient, c'est à dire non perçu par la personne elle même. Certains résultats de tous ces calculs et analyses sont convoyées vers des zones du cerveau qui participent à la “conscience”, c'est à dire aux événements perçus par la personne.

Voici une description de quelques aspects de cette analyse du son depuis son entrée dans

le pavillon de l'oreille jusqu'à ce qu'il atteigne la conscience.

3.1.1 Le pavillon de l'oreille

Nous avons deux oreilles, chacune captant un signal sonore et le pavillon de chaque oreille est très “sculpté”. Cela semble essentiel à la perception tri-dimensionnelle du son.

- Regarder cette [vidéo](#) et les liens donnés qui suggère que la forme complexe du pavillon est utile à la localisation 3 dimensionnelle du son. En particulier regarder cette [expérience](#) que vous pouvez faire vous même : elle consiste à coller de la pâte à modeler sur son oreille pour modifier sa géométrie et remarquer, les yeux bandés, que l'on ne sait plus localiser l'origine spatiale des sons. Il paraît que si on garde la nouvelle géométrie quelques semaines, le cerveau se reprogramme, grâce à la synchronisation avec la vue, et la perception spatiale revient (mais re-disparaîtrait si on revenait à la forme initiale de l'oreille!).



- Dans cette [vidéo de la BBC](#), on voit un renard qui se concentre sur la localisation 3 dimensionnelle de sa proie cachée sous une épaisse couche de neige.



Ref: Labo de Brams

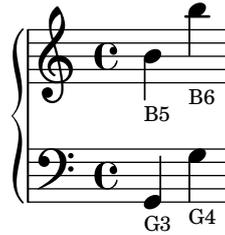
Exercice 3.1.1. (TP) “Pavillon de l'oreille et localisation du son”. Essayer de reproduire les expériences ci-dessus.

3.1.2 Cils

Les cils sont situés dans la cochlée et fonctionnent comme des résonateurs. On a étudié le modèle d'un résonateur en Section C.7. Les paramètres importants sont la fréquence de résonance f_0 et la largeur de résonance Δf_0 . On peut convertir f_0 et Δf_0 en unité de

pitch, c'est à dire demi-ton, d'après (2.3.5), donnant respectivement $x_0, \Delta x_0$. Voici l'ordre de grandeur pour différents cils, d'après Rossing [Fletcher & Rossing \(2012\)](#), p.74 :

f (Hz)	100	200	500	1000	2000	5000	10000
Δf (Hz)	90	90	110	150	280	700	1200
x_0 (en note)	G_3	G_4	B_5	B_6	B_7	Eb_8	Gb_8
Δx_0 (en $\frac{1}{2}$ ton)	15	7	4	2.5	2	2	3



Il est important de remarquer dans ces données que la précision Δx_0 en unité de pitch (demi-ton) est supérieure à 1 alors que la perception consciente donne une précision bien meilleure, de l'ordre de $1/10$ pitch, voir Section 3.3.4. Cela suggère que le raffinement de la précision se fait dans une étape ultérieure de l'analyse, dans le cerveau.

3.1.3 Physiologie du cerveau

A la date actuelle (2021), on connaît très peu, voire pas du tout, les mécanismes précis d'analyse du son dans le cerveau. Le fonctionnement collectif du cerveau est encore mystérieux¹. Par exemple on ne sait pas du tout où et comment fonctionne la mémoire, ni même ce qu'est précisément la "conscience" et où et comment fonctionne t-elle. Référence : [Dehaene \(2014\)](#). Voici cependant quelques observations et considérations.

- Noter que le temps de réponse d'un neurone est supérieures à $20ms$ soit une fréquence inférieure à $50Hz$. Ainsi l'analyse du timbre d'un signal audible $u(t)$ sur des fréquences $f \geq 100Hz$ ne peut pas être une analyse temporelle faite dans le cerveau mais serait plutôt une analyse de la transformée de Fourier $|(\mathcal{F}u)(f)|$? Cela se confirme par le fait que notre perception est insensible aux phases? Ce temps de réponse détermine la **latence acceptable en musique** : $\Delta t = 20ms$, i.e. un décalage temporel perceptible. On a déjà vu que sur cette durée Δt le son se propage dans l'air sur une distance $L = c\Delta t = 343 \times 20 \cdot 10^{-3}m = 7m$. C'est donc une distance au dessus de laquelle la latence peut être perceptible.

1. Remarquer par exemple que par rapport à il y a 10000 ans, les progrès de la connaissance scientifique ont apporté des bouleversement dans nos conditions de vie : transport, logement, nourriture, médecine de la plupart des organes de notre corps. Une exception notable est le cerveau qui reste totalement mystérieux. Une conséquence est que tous les problèmes reliés aux mauvais fonctionnement du cerveau, états d'humeur des personnes, personnalités extravagantes, anxiété, maladie mentales, affectant les relations humaines, tous ces problèmes sont présents de nos jours comme il y a 10000 ans. Quasiment aucun progrès n'a eu lieu sur cet aspect déterminant de la qualité de vie.

- Par imagerie IRM, on observe que les calculs liés à la parole et la résolution temporelle du son sont effectués dans la partie gauche du cerveau, alors que l'analyse de la résolution fréquentielle, dont la musique sont effectués dans la partie droite, cf [Conférence de Christine Petit](#) à 32'.

3.2 La voix et les signaux periodiques

L'appareil auditif est très adapté à la perception de la voix humaine. Pour cette raions, dans cette section nous décrivons la voix humaine, comment elle est générée et perçue.

Chez les humains, la voix est apparue entre -2 millions d'années (sons) et -50000 ans (parole). Des [recherches récentes](#) font remonter l'apparition de la parole à -20.10^6 ans. La parole a un rôle social pour la communication, pour palabrer, pour l'échange d'informations

...



On peut imaginer que notre cerveau est programmé (de façon inné et/ou acquise) pour percevoir particulièrement (i.e. analyser) certains sons qui nous sont importants comme :

- Sons de la voix humaine
- Sons d'une source d'eau, de la pluie, de l'orage
- Bruits inquiétants dans le silence : craquements de branches, respirations
- Bruits du cœur de sa maman, de la respiration ...

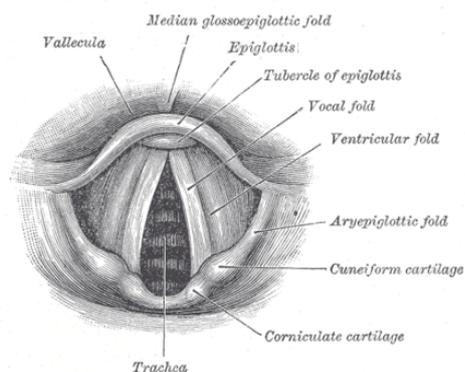
Références :

- voir cet article sur [l'origine du langage](#).
- Ce livre de Harari [Dauzat & Harari \(2015\)](#) sur l'histoire et les aptitudes de l'espèce Homo Sapiens.
- [Schroeder et al. \(2007, chap.16\)](#).

3.2.1 Observations générales sur la voix

3.2.1.1 Cordes vocales, forme de la cavité buccale

La voix est générée par la mise en vibration des “**cordes vocales**” qui ne sont pas véritablement des “cordes” mais des muscles sous tension, sous le flux d’air venant des poumons :

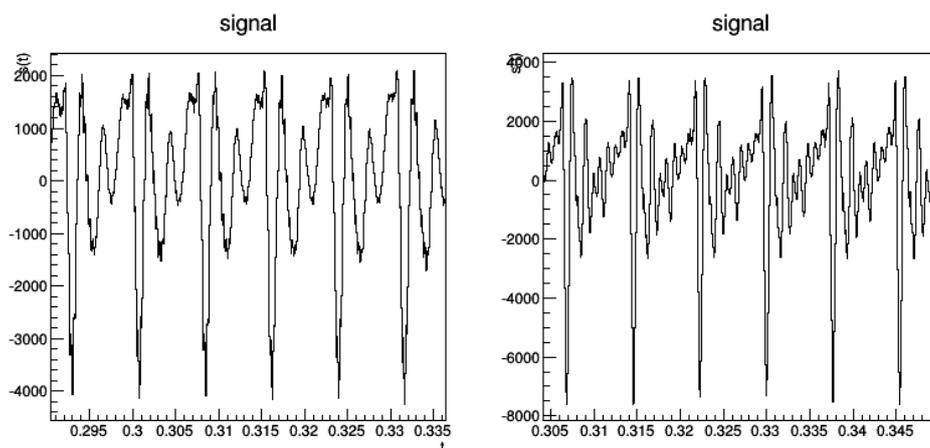


Video des “cordes vocales” en action.

Les cordes vocales produisent un signal sonore (presque) périodique que l’on qualifie de **voyelle**. Voir Section 2.3 sur les signaux périodiques. En fait toute la cavité buccale participe à sculpter ce signal. Cela correspond à des positions précises de la langue, du palais, etc.. Voir cette **Video**.

Le signal sonore produit et donc la voyelle prononcée dépend de la forme de la cavité buccale.

Exemple 3.2.1. Par exemple, voici des **voyelles chantées par Malik Mezzadri** sur une fréquence fixe de $f = 130\text{Hz}$ (note C_4). Voici le signal (mesuré avec un micro) pour les voyelles “ON” et “A” sur quelques périodes $T = 1/f = 7\text{ms}$. On observe en effet que le signal est (presque) périodique et dépend de la voyelle :



Remarque 3.2.2. la vitesse du son dans l'air étant $v = 330\text{m/s}$ la longueur d'onde est donc $\lambda = v/f = 2,50\text{m}$. L'intensité est de l'ordre de 70dB.

On a expliqué dans la Section 2.3 toutes les propriétés des signaux périodiques, en particulier que la transformée de Fourier est discrète et répartie sur les multiples $f_n = n f, n \geq 1$, appelées harmoniques. Pour chaque harmonique $n \geq 1$, il y a un coefficient de Fourier de module $|\hat{u}_n| \geq 0$. Cet ensemble $(|\hat{u}_n|)_{n \geq 1}$ s'appelle le **timbre** du signal.

On peut aussi communiquer en parlant sans les cordes vocales, i.e. en "chuchotant". L'avantage de la voix chantée (i.e. avec les cordes vocales) est peut être qu'elle est mieux perçue parmi d'autres sons ou bruits.

3.2.1.2 Les formants

Pour la voix humaine, on observe que l'enveloppe des coefficients de Fourier $(|\hat{u}_n|)_n$ possède quelques maxima à des fréquences F_1, F_2, \dots appelés **formants**. Ces fréquences F_1, F_2, \dots dépendent de la voyelle prononcée.

D'après Chevalier p.53, la valeur des deux premiers formants F_1, F_2 suffit à déterminer la voyelle prononcée d'après le schéma suivant. Les formants F_3, F_4 apportent des nuances. Certains chanteurs ont un formant supplémentaire spécial entre F_3 et F_4 .

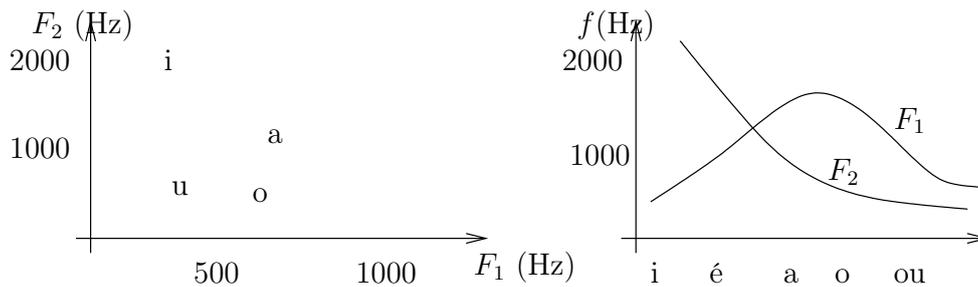


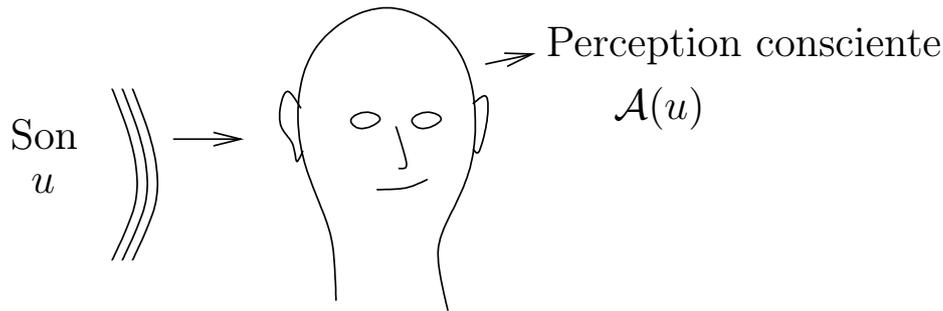
FIGURE 3.2.1 – Valeurs des formants F_1, F_2 en Hz, pour différentes voyelles.

3.3 Du signal sonore à la perception consciente

Dans la section 3.1, on a décrit le système auditif. Dans cette Section, on va considérer le système auditif comme une "boîte noire", c'est à dire dont on ne connaît ni le contenu ni le fonctionnement. Seulement, on va considérer que le système auditif reçoit en entrée : un signal sonore, c'est à dire une fonction $t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}$ et donne en sortie une "perception consciente" c'est à dire des sensations que l'on peut exprimer.

3.3.1 Définition de la perception sonore

Question 3.3.1. Pour un son donné u , identifier les caractéristiques $\mathcal{A}(u)$ qui sont détectées au niveau de la perception consciente et les représenter, et décrire l'association $u \rightarrow \mathcal{A}(u)$.



On notera $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t)$ l'espace des fonctions $t \rightarrow u(t)$ en entrée (précisément c'est l'espace de Schwartz (C.3.1), mais cela n'a pas d'importance ici).

On notera \mathcal{E} l'espace des perceptions conscientes des sons et

$$\mathcal{A} : \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}_t) & \rightarrow \mathcal{E} \\ u & \rightarrow \mathcal{A}(u) \end{cases}$$

l'application qui à un signal sonore u associe une perception consciente $\mathcal{A}(u)$.

Remarque 3.3.2.

- L'espace d'entrée $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t)$ est bien défini. (il faudrait cependant rajouter une norme, ce que l'on fera). Mais la suite est très vague et pas bien définie : quel est cet espace \mathcal{E} ? quelle est cette application \mathcal{A} ? Comme mieux les définir ?
- On peut déjà remarquer que \mathcal{E} et \mathcal{A} doivent dépendre de l'individu. On a sûrement pas tous les même perceptions des sons, même si de nombreux aspects sont partagés (comme le fait que personne ne perçoit les ultrasons, $f \gg 20000\text{Hz}$ et les infra sons $f \ll 20\text{Hz}$).
- Pour deviner l'espace \mathcal{E} et l'application \mathcal{A} on peut effectuer des expériences de **psychoacoustique**.

Voici une définition de \mathcal{A} et \mathcal{E} très grossière mais qui nous permettra de progresser vers leur recherche.

Définition 3.3.3. Pour une personne donnée, on définit la relation d'équivalence \sim entre deux signaux sonores :

$$u_1 \sim u_2$$

si la personne ne les distingue pas consciemment. On définit l'**espace des perceptions sonores** \mathcal{E} comme l'**espace quotient**

$$\mathcal{E} := \mathcal{S}(\mathbb{R}_t) / \sim$$

et l'application **perception sonore** $\mathcal{A} : u \rightarrow [u] \in \mathcal{E}$.

Commençons donc à explorer cette relation d'équivalence \sim par quelques observations.

3.3.2 Perception du temps

On estime que l'on perçoit la position temporelle d'un signal avec une précision supérieure à

$$\Delta t \geq 0.1s \quad (3.3.1)$$

3.3.3 Perception de l'intensité

En Section 1.3.6 on a défini l'intensité d'un signal sonore en décibels (dB). L'intervalle maximal de perception à $f \sim 1000\text{Hz}$ est

$$I \in [0, 120] \quad \text{dB.}$$

où $I = 0\text{dB}$ est le seuil minimal de perception, $I = 120\text{dB}$ est le maximum (ensuite c'est intolérable, voir destructeur) et la précision de perception vers 1000Hz est

$$\Delta I \geq 1 \text{ dB}$$

C'est à dire que l'on ne distingue pas de différence entre deux signaux $u_2 = \lambda u_1$ avec une constante de proportionnalité

$$\frac{1}{10^{1/10}} = 0.8 < \lambda < 10^{1/10} = 1.26.$$

.

3.3.3.1 Courbes isophones

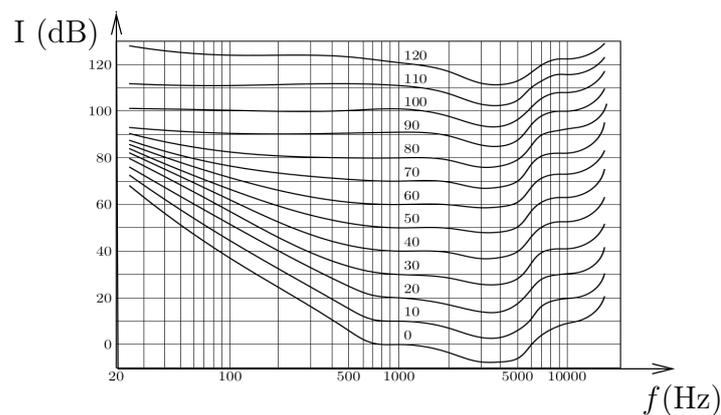


FIGURE 3.3.1 – Ce diagramme appelé courbes isophones de Fletcher-Muson montre des valeurs (f, I) dans le plan fréquence-Intensité qui donne la même perception d'intensité. Par exemple un signal $I = 40\text{dB}$ à $f = 100\text{Hz}$ est à peine audible, comme $I = 0\text{dB}$ à $f = 1000\text{Hz}$.

Voir aussi la définition des **décibels dBA SPL**, voir [Benson \(n.d., p.10\)](#). Les courbes de la figure [3.3.1](#) sont mesurées par des expériences de psychoacoustiques avec des signaux sinusoïdaux : $u(t) = A \sin(\omega t)$, avec $\omega = 2\pi f$

Observer que sur la figure [3.3.1](#) l'écart entre les courbes isophones dépend de la fréquence. Une conséquence importante est que en musique, pour un "mixage" de deux (ou plus) instruments jouant à des hauteurs (fréquences) différentes, si l'on souhaite réduire l'ensemble de "10dB" par exemple, il faudra réduire différemment les intensités de chacun selon sa fréquence.

3.3.3.2 Réverbération

Par définition, en acoustique musicale, si un signal s'éteint progressivement, on dit qu'il y a de la **réverbération**. Plus précisément

Définition 3.3.4. Si un signal décroît exponentiellement comme

$$u(t) = u(0) 10^{-t/\tau}$$

alors on appelle

$$\tau_{\text{reverb}} := 6\tau$$

le **temps de réverbération**. De façon équivalente

$$u(t + \tau_{\text{reverb}}) = 10^{-6} u(t)$$

$$I(t + \tau_{\text{reverb}}) = I(t) - 60 \text{ dB}$$

3.3.3.3 Mesure de l'intensité dans les synthétiseurs

Les synthétiseurs communiquent avec le langage MIDI. L'intensité d'un son est codé par le paramètre appelé "vitesse" $v \in [0, 127]$, qui est proportionnel à l'amplitude du signal d'après les spécifications MIDI. Cela est curieux, on penserait plutôt à v fonction affine du log de l'amplitude?

— Voir ce [document](#).

3.3.3.4 Effet de masquage

Un son grave suffisamment intense masque un son aigu plus faible, c'est à dire que l'on ne perçoit plus le son aigu. Mais l'inverse n'est pas vrai : un son grave faible est toujours perçu même en présence d'un fort son aigu.

Exemple 3.3.5. si il passe un train générant des sons graves forts très de nous, alors on ne s'entend plus parler. Mais si une alarme aiguë sonne, on s'entend encore parler.

L'explication physiologique de ce phénomène serait que le long de la membrane basilaire dans la cochlée, les capteurs des sons aigus sont à l'entrée et ceux des sons graves sont au

bout terminal. Le signal d'un son grave passe devant les capteurs des sons aigu pour aller au bout, mais pas l'inverse.

3.3.4 Perception du pitch des notes (fréquences)

On entend seulement les fréquences f comprises dans l'intervalle

$$f \in [20 \text{ Hz}, 20000 \text{ Hz}] .$$

Cela dépend des animaux [Benson \(n.d., p.9\)](#).

Pour des notes pures (i.e. signal périodique sinusoïdal qui est un mode de Fourier) la précision de perception de la fréquence f est en unité de pitch

f (Hz)	250	500	1000	2000	8000
Δx (pitch)	0.17	0.03	0.05	0.04	0.16

Cela est extrêmement précis, largement inférieur à la précision en fréquence des cils, voir Section [3.1.2](#), par exemple à $f = 1000 \text{ Hz}$:

$$\Delta x = \frac{1}{40} (\Delta x)_{cils}$$

On pense que cette grande précision de perception du pitch est obtenue grâce à des algorithmes dans le cerveau, non encore observés ni compris.

Remarque 3.3.6. La précision de perception du pitch indiquée dans le tableau précédent montre que l'échelle des notes tempérées, Définition [2.3.37](#), écartées de $\Delta x = 1$ pitch, est très grossière par rapport à notre perception.

Remarque 3.3.7. A cause de cette grande précision en pitch de notre perception, la fabrication d'un instrument de musique demande une grande précision, inférieure à 10^{-2} mm [Hirschberg et al. \(1996\)](#). (ref : [article 1996, Aeroacoustics of Musical Instruments](#))

3.3.5 Perception et principe d'incertitude en temps-fréquence

Nous avons mentionné en Section [??](#), le principe d'incertitude en temps fréquence, concernant la quantité d'information limitée par la mesure $dt df$.

Par exemple, considérons une note C_5 de pitch $x = 60$ avec une précision $\Delta x = 0.5$ (quart de ton) soit $\frac{\Delta f}{f} = 0.057 \Delta x$, et de durée $\Delta t = 0.2 \text{ s}$, supérieure au plus petit intervalle de temps perceptible ([3.3.1](#)). Cela donne $f = 260 \text{ Hz}$ et

$$\Delta t \Delta f = 0.2 \times 260 \times 0.057 \times 0.5 \sim 1.5 \geq 1$$

juste supérieure à 1 donc à la limite du principe d'incertitude. Cela montre que notre perception de l'information dans le plan temps-fréquence est quasi optimale.

La formule générale en fonction du pitch x est

$$\Delta t \Delta f \underset{(2.3.7)}{=} 0.057 \times \Delta t \Delta x 2^{\frac{1}{12}(x-x_{A_5})} f_{A_5}$$

et cela montre que pour les notes graves, i.e. x petit, la limite $\Delta t \Delta f = 1$ est plus facilement atteinte. Par exemple il est impossible en principe de détecter le pitch précis (au demi-ton) des notes d'une contrebasse qui joue un **walking bass** rapide.

3.3.6 Non perception de la phase

La transformée de Fourier d'un signal périodique $u(t)$ donne des coefficients de Fourier complexes $\hat{u}_n \in \mathbb{C}$, en (??) que l'on peut écrire

$$\hat{u}_n = |\hat{u}_n| e^{i\phi_n} \tag{3.3.2}$$

avec une phase $e^{i\phi_n}$. D'après (??), le signal temporelle s'écrit alors

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\hat{u}_n}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{i2\pi n \frac{t}{T}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{|\hat{u}_n|}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{i(2\pi n \frac{t}{T} + \phi_n)}$$

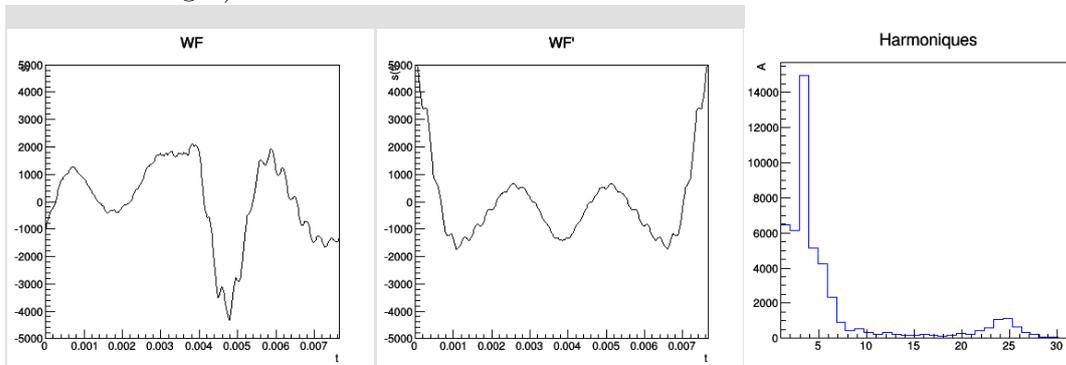
montrant que la phase induit un décalage temporel spécifique à chaque harmonique n .

Proposition 3.3.8. “Non perception de la phase”. Dans les exemples suivants on observe que nous ne percevons pas du tout les phases $(\phi_n)_n$ de (3.3.2), autrement dit on ne distingue pas le signal u du signal suivant

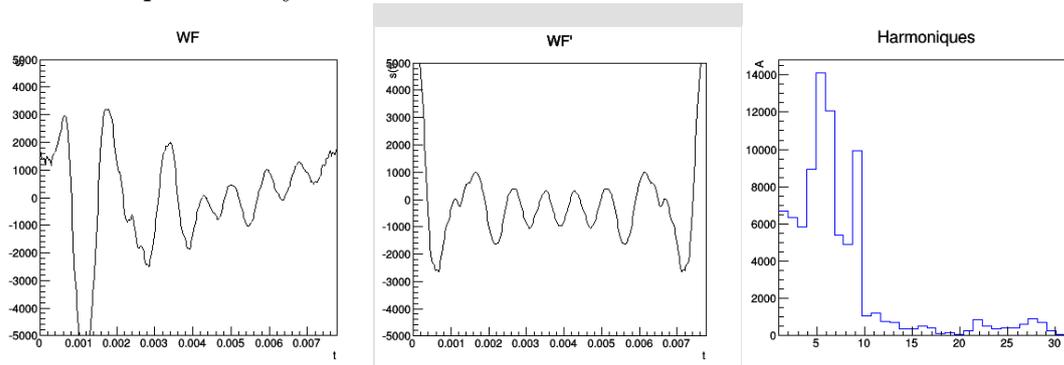
$$v(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{|\hat{u}_n|}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{i(2\pi n \frac{t}{T} + \varphi_n)}$$

qui a les même modules $|\hat{u}_n|$ mais des phases $(\varphi_n)_n$ différentes et arbitraires.

Exemple 3.3.9. Voici un **Son** $u(t)$. Voici maintenant un **Son** $v(t)$ où toutes les phases sont mises à $\varphi_n = 0, \forall n$. Voici pour la voyelle « on », les formes d'ondes d'origine $u(t)$ et $v(t)$ sur une période, ainsi que les modules des coefficients de Fourier $|\hat{u}_n|$ pour $0 \leq n \leq 32$ (qui sont inchangés) :



De même pour la voyelle « a » :



On remarque que $u(t)$ et $v(t)$ sont très différentes. En particulier $v(t)$ a un pic en $t = 0$ à cause du choix particulier $\varphi_n = 0$.

Exemple 3.3.10. Voici un **autre exemple** de son artificiel $u(t)$, où chaque harmonique $n = 1, 2, \dots, 30$ a un module $|\hat{u}_n| = 1/n$ et une **phase ϕ_n aléatoire**. On représente aussi le signal $u(t)$ sur une période. Remarquer que lorsque les phases sont nulles, le signal $u(t)$ est en « dent de scie ». On le perçoit légèrement, peut être à cause de la « singularité » en zéro qui fausse le rendu.

Remarque 3.3.11. Cette non perception des phases ϕ_n suggère que parmi toute l'information du signal, le cerveau perçoit des notes pures quasi-indépendantes $|\hat{u}_n| e^{i(2\pi n \frac{t}{T} + \phi_n)}$ et mesure seulement leur fréquence $f_n = \frac{n}{T}$ et intensité $|\hat{u}_n|$.

Exercice 3.3.12. « La phase est imperceptible » (TP) Comme dans l'exercice 1, avec python, créer le signal suivant qui est la superposition de deux sinus de fréquences respectives f_1 et f_2 , avec une phase φ :

$$u(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t + \varphi)$$

1. Fixer $f_1 = 100\text{Hz}$, $f_2 = 150\text{Hz}$, $A_1 = A_2 = 0.5$ par exemple et $\varphi = 0$ puis observer et écouter le signal. Recommencer avec une autre valeur de φ , par exemple $\varphi = 1$. Qu'est ce qui a changé? est-ce perceptible à l'écoute? Si vous changez A_1, A_2 ou f_1, f_2 est-ce perceptible?
2. (*) Faire que la phase φ change lentement avec le temps, par exemple : $\varphi(t) = 10t$ (ainsi $\Delta\varphi = 1$ radian pour $\Delta t = 0.1\text{sec.}$). Observer et écouter.

3.3.7 Perception du timbre

On a observé dans la Section précédente, que en présence d'un signal périodique $u(t)$, appelé **note** (d'après la Définition 2.3.1), nous ne percevons pas la phase des coefficients de Fourier. Cependant que perçoit on? On ne perçoit pas individuellement chaque harmonique mais un effet collectif de $|\hat{u}_n|_{n \geq 0}$, que l'on appelle le **timbre** et la fréquence fondamentale $f_1 = \frac{1}{T}$, équivalente à un pitch $x = x_1$ d'après (2.3.5) appelé le **pitch de la note**. Dans cette section, on discute de la perception du timbre et du pitch x .

3.3.7.1 Le timbre et les voyelles

Définition 3.3.13. Pour un signal périodique $u(t)$, (appelé **note** d'après la Définition 2.3.1), de pitch $x \in \mathbb{R}$, (2.3.5), le **timbre** est la suite des modules

$$(|\hat{u}_n|)_{n \geq 1} = (|\hat{u}_1|, |\hat{u}_2|, |\hat{u}_3|, \dots)$$

i.e. le module des coefficients de Fourier de $u(t)$, (??), sans la phase que l'on ne perçoit pas d'après la proposition 3.3.8.

Dans la voix parlée, le timbre est associé à des voyelles, voir l'exemple 3.3.9.

Question 3.3.14. Comment associer une suite $(|\hat{u}_n|)_{n \geq 1}$ à une certaine voyelle ?

Observations : Considérons cet **enregistrement** d'un signal $u(t)$ de voyelles différentes, i.e. timbres différents mais de même pitch $x = 48$, i.e. $f = 130\text{Hz}$, la note est C_4 .

— Dans cet **exemple**, le signal $u(t)$ est filtré, ne gardant que avec les harmoniques 1,2,3 seulement, i.e. on entend le signal

$$v(t) = \sum_{n=1,2,3} \left(\frac{\hat{u}_n}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{i2\pi n \frac{t}{T}}$$

On constate que **on ne perçoit plus les voyelles**. On perçoit toujours le même pitch x .

— Dans cet **exemple**, le signal $u(t)$ est filtré, ne gardant que avec les harmoniques $n \geq 5$, i.e. on entend le signal

$$v(t) = \sum_{n \geq 5} \left(\frac{\hat{u}_n}{\sqrt{2\pi}} \right) e^{i2\pi n \frac{t}{T}}$$

On constate que **l'on perçoit les voyelles**. De façon plus surprenante, on perçoit toujours le même pitch x , i.e. la fréquence f_1 alors qu'elle n'est pas présente dans la transformée de Fourier. La perception des voyelles est surtout liée aux formants expliqués en Section 3.2.1.2.

3.3.7.2 Paradoxe de la basse virtuelle

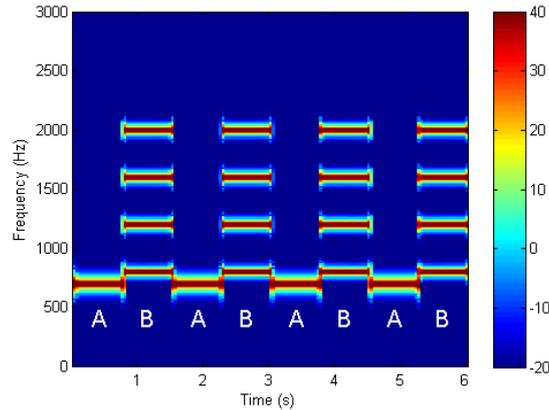
La conclusion importante de observations précédentes est que :

Conclusion 3.3.15. Lorsqu'on entend un signal périodique, on perçoit le timbre

$$(|\hat{u}_n|)_{n \geq 1} = (|\hat{u}_1|, |\hat{u}_2|, |\hat{u}_3|, \dots)$$

et le pitch x même si les premiers coefficients sont nuls, par exemple $|\hat{u}_1| = 0, |\hat{u}_2| = 0, |\hat{u}_3| = 0, |\hat{u}_4| = 0$.

Exemple 3.3.16. Dans cet exemple on entend successivement deux notes A, B . La note A est une note pure de une fréquence fondamentale $f_1(A) = 700\text{Hz}$. La note B est une note timbrée avec $f_1(B) = 400\text{Hz}$, mais pour la note B on a enlevé l'harmonique $f_1(B) = 400\text{Hz}$ (en posant $\hat{u}_1 = 0$) de sorte que la fréquence la plus basse émise est $f_2(B) = 800\text{Hz}$. A l'écoute on entend $f_1(B) = 400\text{Hz}$ qui n'est pas présente. Remarquer que $f_1(A)/f_1(B) = 7/4$ de pitch $x_1(A) - x_2(B) = \frac{12}{\ln 2} \ln\left(\frac{7}{4}\right) = 9.68 \sim 10$ qui est une septième mineure.



Exercice 3.3.17. (TP) « Illusion de la basse fondamentale manquante ». Avec audacity Menu/Générer/Tonalité, créer différents signaux sinusoïdaux d'amplitude $A = 0.1$ et de fréquences $f_1 = 200\text{Hz}$, $f_5 = 1000\text{Hz}$, $f_6 = 1200\text{Hz}$, $f_7 = 1400\text{Hz}$. Remarquer que ce sont des harmoniques de la fréquence fondamentale f_1 . Ecouter simultanément les signaux de fréquence f_5, f_6, f_7 . Entendez vous la fréquence f_1 ? Cela s'appelle le **mystère de la fondamentale manquante** actuellement pas très bien compris. On pense que le mécanisme est au niveau du cerveau, et serait utile pour analyser les stimuli venant d'une voix humaine incomplète (dans la nature, la fondamentale peut être brouillée par d'autres bruits).

Remarque : le phénomène du « **troisième son** » ou **Combination tone** est différent : il fait ressort $f_2 - f_1$ (effets non linéaire dans l'oreille?). Ecouter par exemple **ex. de 3eme son** avec $f_1 = 440 (A_5)$, $f_2 = 704 (F_6)$, on perçoit $f_2 - f_1 = 264 (C_5)$, mais ici la basse manquante serait $f = f_2/8 = f_1/5 = 88 (F_4)$.

3.3.7.3 Hypothèse d'une reconnaissance inconsciente des rapports rationnels de fréquences

Ce phénomène est assez paradoxale car d'après la structure de l'oreille interne, on pense que l'information qu'il y a un signal sur les fréquences $f_n = n f_1$ des différentes harmoniques est envoyé de façon séparée au cerveau par des neurones. Mais cependant le cerveau arrive à détecter que ces différentes fréquences sont multiples d'une fréquence f_1 pourtant absente. Comment le fait-il? En arithmétique, on utiliserait le fait que étant donné $f_5 = 5 f_1$, $f_6 = 6 f_1$, $f_7 = 7 f_1$ on peut retrouver f_1 en observant que $f_6/f_5 = 6/5$ et $f_7/f_5 = 7/5$ sont des (petits) nombres rationnels et supposer donc que $f_1 = f_5/5 = f_6/6 = f_7/7$.

Hypothèse 3.3.18. Une hypothèse avancée par des neurologues est que le cerveau procède ainsi, grâce à des algorithmes inconscients de reconnaissance de rapports rationnels

$$\frac{f'}{f} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{N} \text{ "petits" i.e., } a, b \leq 11, 13 \quad (3.3.3)$$

entre les fréquences des signaux perçus.

On peut imaginer que cette capacité soit arrivée par adaptation évolutive, car serait bien utile pour détecter une voix humaine parmi d'autres voix ou parmi du bruit.

Résumé 3.3.19.

- A la sortie des oreilles (oreille interne), et à l'entrée du cerveau, on a effectué (inconsciemment) une décomposition du son en "notes pures" (mode de Fourier) et on ne retient que les modules $|\hat{u}_n|$.
- Ensuite le cerveau effectue un "traitement complexe" de cette information. [Schnupp et al. \(2011, p.138\)](#) (dans le cerveau il y a un processus de reconnaissance de pattern arithmétique?)
- Au final on est conscient de l'ensemble du spectre : "le timbre" et son "pitch" (fondamentale), et non pas des fréquences individuelles.

3.3.7.4 Fréquences aléatoires :

Voici un exemple artificiel, où des notes pures sont d'amplitude $A_k = 1/k$, de phase nulle, et de fréquence $f_k = k \cdot f_1 \cdot (1 + \epsilon_k)$ avec $f_1 = 130\text{Hz}$ (do) et $\epsilon_k \in [-\epsilon, \epsilon]$ aléatoire. On [écoute et représente](#) (f_k, A_k) pour différentes valeurs de ϵ qui mesure la fluctuation des fréquences. Remarquer que l'on perçoit parfois plusieurs notes (par exemple pour $\epsilon = 0.084$). Remarquer que les pics de fréquences f_k, f_{k+1} peuvent se croiser si $\epsilon > 1/k$.

Est-ce en rapport avec l'expérience suivante ?

Y. Menuhin, racontant un étrange concert dans un champ de fleurs à Mykonos :

Référence : "La légende du violon", Y Menuhin, Flammarion

« Je m'arrêtais pour écouter ce bourdonnement entêtant quand, soudain, je m'aperçus qu'il ne s'agissait pas d'un bruit confus et désordonné, mais bien au contraire d'un accord secret de la création : les abeilles émettaient deux notes, et qui plus est ces deux notes formaient une quinte. Je ne sais comment analyser ce prodige de la nature. Toujours est-il que la recherche de la quinte semble constituer une nécessité primitive de l'univers : nous émettons et nous recevons des vibrations. Ces vibrations obéissent à un ordonnancement secret. Une harmonie occulte se met en place. Certains prétendent même que les intervalles des planètes, c'est-à-dire les distances qui les séparent les unes des autres, sont en correspondance intime avec les intervalles de la musique : quintes, tierces, octaves ne seraient que des images musicales des intervalles célestes. »

3.4 Perceptions des intervalles justes et accords justes

Voir la section C.1.2 en appendice, concernant la représentation de fractions rationnelles $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

3.4.1 Perception des intervalles justes

Comme les rapports de fréquence rationnels $\frac{f'}{f} = \frac{a}{b}$ en (3.3.3) correspondent aux intervalles juste, voir Section ??, l'hypothèse (3.3.3) signifierait que nous percevions particulièrement les intervalles justes.

- **Rappel** : pour une note individuelle, i.e. un signal périodique provenant d'une voix ou d'un instrument, on ne perçoit pas ses harmoniques individuelle, mais on perçoit le timbre $|\hat{u}_n|_{n \geq 1}$ qui donne une impression collective, interprétée par le cerveau.
- **Question** : que perçoit-on si deux notes (timbrées) de fréquences $f_1 \leq f_2$ sonnent ensemble ?

Voici quelques exemples.

3.4.1.1 Exemples

- **Video** qui montre une résonance à l'unisson $\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1}$.
- **Video** qui montre une résonance à l'octave $\frac{f_2}{f_1} = \frac{2}{1}$.
- **Video** qui montre une résonance à la quinte $\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$.
- **Video** qui montre les résonances $\frac{f_2}{f_1} = \frac{a}{b}$ importantes.
- **Video** qui montre les résonances $\frac{f_2}{f_1} = \frac{a}{b}$ dans l'ordre descendant.
- **Video** qui montre les résonances $\frac{f_2}{f_1} = \frac{a}{b}$ avec le rajout de la "basse" $f_b = \frac{f_2}{a} = \frac{f_1}{b}$. (la fondamentale manquante en rouge)
- **Video** qui montre les résonances $\frac{f_2}{f_1} = \frac{a}{b}$ avec la "basse" $f_b = \frac{f_2}{a} = \frac{f_1}{b}$ en rouge et le "sifflet" $f_s = af_1 = bf_2$ en vert.

Résumé 3.4.1. un **intervalle juste** est un ensemble de deux notes dont le rapport des fréquences est $f_2/f_1 = a/b$ avec a, b petits entiers. On ressent cet intervalle comme "résonant" ou "consonant".

3.4.1.2 Perception des intervalles justes

Sur cette [page web](#).

3.4.2 Perception des accords justes

Voir la Section C.1.3 qui définit le réseau tonnetz, permettant de représenter les accords justes.

Chapitre 4

Les instruments de musique

4.1 Introduction

On a vu en Définition 2.3.1 que de façon très schématique une “note musicale” est un signal périodique. Voir exemple ???. On a vu en Section 3.2 que la raison de s’intéresser aux signaux périodiques est que la voix humaine émet des signaux périodiques, or nous sommes sensible à la voix humaine.

L’objectif d’un “instrument de musique harmonique” est donc de produire de façon contrôlée des signaux périodiques. On parlera aussi des instruments de percussion (non harmoniques).

Une autre propriété pratique et importante d’un instrument est de transmettre l’énergie sonore à son environnement, on parle de “rayonnement ou diffusion des ondes”.

On suivra un classement des instruments basé sur le **mécanisme physique** de l’émission du son. On considérera ainsi différents cas d’instruments harmoniques :

1. L’objet se met en mouvement périodique car attiré par un **cycle limite**. Il émet donc une note musicale. C’est le cas par exemple de la flûte ou du violon.
2. L’objet **oscille selon ses modes propres** qui peuvent être presque harmoniques dans certains cas, par exemple si l’objet est proche du modèle idéal d’une onde 1 Dim sur $x \in [0, L]$ étudié en Section 1.3.4. C’est le cas par exemple du piano ou de la guitare.
3. Synthèse de signal périodique par un ordinateur.

4.1.1 Classement de Sach-Hornbostel 1914

Il existe un classement “officiel” des instruments, appelé **classement de Sach-Hornbostel 1914**, plus basé sur “l’apparence de l’instrument”, et que l’on ne suivra donc pas **Benson** (n.d., p.83).

1. **Idiophones** : Ce sont les instruments où un objet autre qu’une membrane vibre. Exemples : **xylophone**, **cymbales**, **mbira**, **bol chantant**.

2. **Membranophones** : Ce sont les instruments où une membrane vibre. Exemple : drums, **friction drums**, **kazoo**, **mirliton**.
3. **Cordophones** : Ce sont les instruments à corde vibrante. Exemple : violon, guitare, piano, clavecin, guitare électrique.
4. **Aérophones** : Ce sont les instruments où l'air est en vibration. Exemples : flûtes, clarinette, saxophone, trompette, ocarina, accordéon.
5. **Electrophones** : Ce sont les instruments qui utilisent un appareil électrique ou ordinateur. Exemple : synthétiseurs.

4.2 Instruments harmoniques par cycles limites

4.2.1 Introduction

L'objectif d'un instrument de musique est de **produire des notes**, qui sont des **signaux périodique** en temps. Pour ce faire, un instrument acoustique (non électronique) devra donc mettre un objet en **mouvement périodique** à des fréquences dans l'intervalle musical [20Hz, 5000 Hz]. Comment faire ? Une partie des instruments fonctionnent selon le principe de l'apparition d'un cycle limite, que l'on va décrire en commençant par des exemples.

4.2.1.1 Apparition spontanée d'oscillations par relaxation

Exemple 4.2.1. Faites l'expérience suivante. On pose une règle sur nos deux doigts écartés. On rapproche les doigts en exerçant une force constante. On observe que la règle glisse sur l'un puis l'autre doigt en alternance et reste toujours en équilibre. A la fin les doigts se retrouve sous le centre de gravité G de la règle. effectuer l'expérience vous même.



Observer la **vidéo** de cette expérience. Voici une autre vidéo avec **un balai**.

Question 4.2.2. *que se passe t-il si une fois que les deux doigts se trouve sous le centre de gravité G , on écarte les doigts ? retrouve t-on la situation initiale ? y a t-il des oscillations ?*

4.2.1.2 Modélisation

Essayons de modéliser l'expérience précédente afin d'expliquer le mécanisme. Pour cela on utilise le **modèle de Coulomb des frottements** statiques et dynamiques qui suppose que l'on du contact entre le doigt et la règle la force exercée par le doigt sur la règle est

$$F = F_x + F_z$$

où F_x est la composante tangente au contact et F_z la composante normale au contact.

- Si le contact est **statique**, c'est à dire sans glissement, $v_x = 0$, $v_x \in \mathbb{R}$ étant la vitesse tangentielle de la règle par rapport au doigt, alors

$$\|F_x\| \leq \mu_S \|F_z\|$$

avec un paramètre $\mu_S > 0$ qui dépend de la nature des surfaces.

- Si le contact est **dynamique**, c'est à dire avec glissement, $v_x \neq 0$, alors

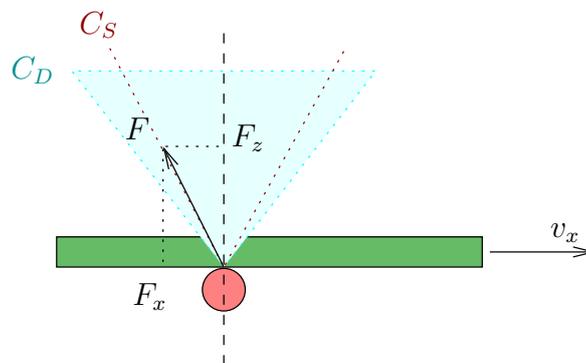
$$\|F_x\| = \mu_D \|F_z\|$$

avec

$$0 < \mu_D < \mu_S.$$

De plus la force F_x est opposée à v_x .

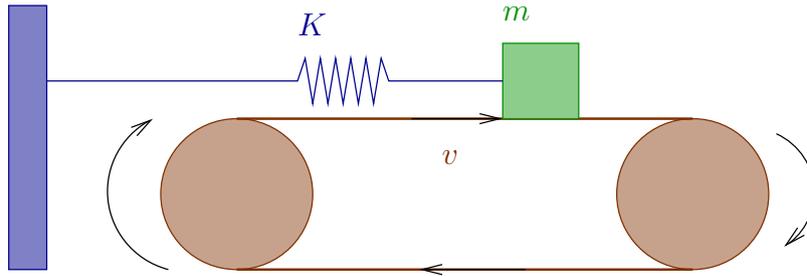
- Le passage du cas dynamique au cas statique se fait si $v_x = 0$ et du cas statique au cas dynamique si $v_x \neq 0$.



Observer que graphiquement, dans le cas statique, la force F se trouve à l'intérieur d'un cône C_S autour de la verticale et dans le cas dynamique, F se trouve sur un cône C_S inclus dans C_D .

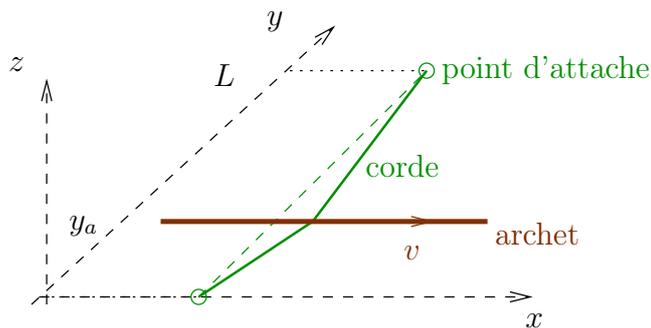
Exercice 4.2.3. Modéliser la règle posée sur deux doigts, exemple 4.2.1, où le mouvement des deux doigts est imposé à $x_{\pm}(t) = \mp L \pm vt$, $t \in [0, L/v]$. Initialement la position du centre de gravité de la règle est $x_G(0) = 0$. Prédire la position du centre de gravité de la règle $x_G(t)$ pour $t \in [0, L/v]$ et observer les oscillations.

Exemple 4.2.4. Voici une autre expérience d'une situation simple. Voir figure. Une masse m est attachée à ressort horizontal de raideur K et posée sur un tapis roulant qui avance à une vitesse constante horizontale $v > 0$. Il y a un contact avec frottements entre la masse et le tapis. On imagine que la masse va être entraînée sans glissement vers la droite, jusqu'au moment où il y a glissement à cause de la force de rappel du ressort. Elle va revenir vers la gauche avant d'être à nouveau immobile par rapport au tapis et repartir. Il va donc s'établir un mouvement périodique.



Exercice 4.2.5. Modéliser l'expérience précédente et prédire la position $x(t)$ de la masse et le **timbre** (i.e. l'intensité des coefficients de Fourier $|\hat{u}_n|_{n \in \mathbb{Z}}$). Déduire la **fréquence** $f = 1/T$ des oscillations. Comment produire une note A_5 de fréquence $f = 440\text{Hz}$ à partir de ce modèle ?

Exemple 4.2.6. On modifie le modèle précédente, en remplaçant le tapis par un archet de violon et la masse par une corde de violon transverse à l'archet, i.e. selon l'axe y . Voir figure. Une corde de violon de longueur L est attachée à deux extrémités parallèle à l'axe y et a une certaine tension interne T . Un archet parallèle à l'axe x et en $y = y_a$ avec $0 < y_a < L$ est posé sur la corde. L'archet exerce une force verticale F_z selon z sur la corde (c'est le rôle du violoniste de bien doser cette force F_z). L'archet se déplace à la vitesse constante $v > 0$ selon x .



On modélise la position de la corde par une fonction $u_x(y)$ qui donne Modéliser cette expérience et prédire la position $x(t)$ de la masse.

Le violoniste choisit la vitesse v de l'archet et la force verticale F_z exercée sur la corde. Expliquer pourquoi la vitesse détermine l'intensité du son produit et la force F_z doit être

bien dosée. Si $F_z < F_{\min}$ est trop faible, le son produit semble filandreux, aéré, on dit “en dehors”. Si $F_z > F_{\max}$ est trop fort, le son “craquouille” on dit que le son est “arraché”. Tracer l’intervalle $[F_{\min}(v), F_{\max}(v)]$ pour avoir un son correct, en fonction de v .

- Observer l’amplitude des cordes sur cette [vidéo](#). Attention les images sont capturée spatialement selon un certain ordre temporel qui dépend de la caméra, ainsi les oscillations spatiales observées ne sont sans doute pas réelles. Seule l’amplitude est correcte.

4.2.2 Oscillateurs de relaxation ou par cycle limite

On va présenter un modèle mathématique général en de systèmes dynamique modélise la production de notes musicales.

Considérons un système dynamique à temps continue, comme définit en C.9.1, c’est à dire une loi d’évolution :

$$\frac{dx}{dt} = V(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \quad (4.2.1)$$

déterminant une unique trajectoire dans l’espace des phases $x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ partant d’un point quelconque $x(0)$.

Définition 4.2.7. Un système dynamique comme (4.2.1) possède un **cycle limite** γ si

1. γ est une trajectoire périodique, i.e. si $x(0) \in \gamma$ alors $x(t) \in \gamma$ et

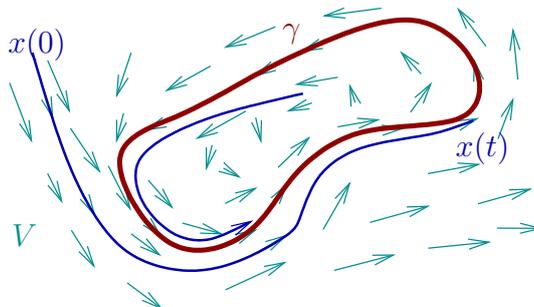
$$\exists T > 0, x(t+T) = x(t), \forall t.$$

On dit que T est la période du cycle γ .

2. Il existe un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, voisinage de γ , appelé **bassin d’attraction de** γ , tel que toute trajectoire partant de $x(0) \in \Omega$ est attirée exponentiellement vite vers γ , i.e. $\exists C > 0, \exists \lambda > 0, \forall x(0) \in \Omega$,

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq C e^{-\lambda t}$$

avec $\tilde{x}(t) \in \gamma$ autre trajectoire. $\tau = \frac{1}{\lambda}$ s’appelle le temps de relaxation.



Conséquence : Si

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \rightarrow u(x) \end{cases}$$

est une fonction que l'on appelle "observable", alors comme $x(t)$ se rapproche d'un comportement périodique, $u(t) = u(x(t))$ va converger vers une fonction périodique et va donc donner un signal périodique ou **note de musique**.

4.2.2.1 Exemple, forme normale sur \mathbb{R}^2 .

On va étudier une famille d'exemples simples qui dépend d'un paramètre μ et présente un cycle limite si $\mu > 0$. On dit que en $\mu = 0$, il y a une "bifurcation de Hopf". Ce modèle est une "**forme normale**", c'est à dire que c'est un modèle universel.

Remarque 4.2.8. On peut imaginer que ce modèle décrive la production d'une note de musique par une flute et $\mu > 0$ est le seuil lorsque le flux d'air est assez fort pour créer la note. Pour un violon, $\mu > 0$ est le seuil de la force exercée par l'archet sur la corde pour produire une note.

Ref : [Arnold \(1974\)](#), Arnold, ODE, p.52.

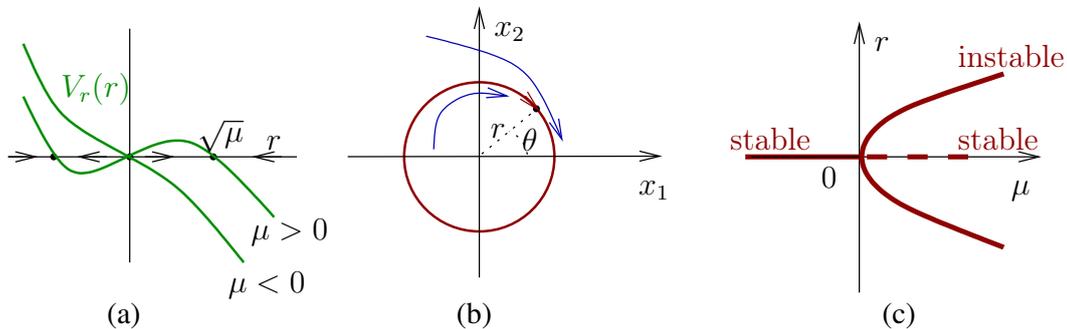


FIGURE 4.2.1 – (a) En vert, la fonction $V_r(r) = r(\mu - r^2)$ et le champ de vecteur $\frac{dr}{dt} = V_r(r)$. Pour $\mu > 0$ il y a un point fixe attracteur en $r = \sqrt{\mu}$.

(b) Cas $\mu > 0$. Le champ de vecteur et le flot dans le plan (x_1, x_2) . Il y a un cycle limite, i.e. trajectoire stable sur le cercle de rayon $r = \sqrt{\mu}$. Le point $r = 0$ est instable.

(c) Diagramme de bifurcation des points fixes et cycles limites stables/instables en fonction de μ .

Dans le plan $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on utilise les coordonnées polaires définies par

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Et le champ de vecteur V défini par des composantes $V_\theta = -1$, $V_r(r)$, c'est à dire les équation de mouvement

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -1, \quad \frac{dr}{dt} = V_r(r).}$$

Alors en coordonnées cartésiennes, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_r}{r} r \cos \theta + r \sin \theta \\ &= x_2 + x_1 \frac{V_r(r)}{r} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_r}{r} r \sin \theta - r \cos \theta \\ &= -x_1 + x_2 \frac{V_r(r)}{r} \end{aligned}$$

Si on choisit le paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ et la fonction

$$\boxed{V_r(r) = r(\mu - r^2)}$$

cela donne

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

Conclusion 4.2.9. dans ce modèle simple qui est une “forme normale”, pour toute condition initiale donnée $x(0) \in \mathbb{R}^2$, si $\mu < 0$ la trajectoire converge exponentiellement vite vers le point fixe

$$x(t) \rightarrow 0.$$

Si $\mu > 0$, la trajectoire converge exponentiellement vite vers le cycle limite γ situé en $r = \sqrt{\mu}$, c'est à dire la trajectoire en coordonnées polaires :

$$\theta(t) = t + \theta(0), \quad r = \sqrt{\mu}$$

et en coordonnées cartésiennes :

$$x_1(t) = \sqrt{\mu} \cos(t + \theta(0)), \quad x_2(t) = \sqrt{\mu} \sin(t + \theta(0)),$$

formant **un cycle limite** qui est un cercle. Dans ce modèle très simple $\omega = 1$ donc la **fréquence** est $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$.

4.2.2.2 Exemples dans le modèle de Lorenz.

L'exemple précédent est le plus simple que l'on peut réaliser pour obtenir un cycle limite.

Voici un exemple un peu plus compliqué qui présente parfois un cycle limite et parfois un attracteur plus complexe, chaotique, appelé **attracteur étrange**. Ce modèle appelé **modèle de Lorenz** détermine les trajectoires d'un point $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ d'après :

$$\frac{dx_1}{dt} = \sigma(-x_1 + x_2), \quad (4.2.2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \quad (4.2.3)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1x_2 - bx_3 \quad (4.2.4)$$

avec trois paramètres $\sigma, r, b > 0$ que l'on supposera positifs.

- Dans ce **chapitre**, extrait de ce **cours**, on présente une étude de ce système dynamique ainsi que des références.
- Voici une **simulation numérique** qui génère un signal sonore $u(t) = u(x(t))$. On entend bien une note timbrée lorsque l'attracteur est un cycle (car $u(t)$ est alors une fonction périodique) et un son plus dissonant lorsque l'attracteur est chaotique.
- Les même type de son se retrouve en pratique avec le basson, selon les doigtés, voir **Bassoon Multiphonics 01**. On pourrait supposer que il y a parfois un système dynamique chaotique avec attracteur étrange.

4.2.2.3 Equations de Kepler des orbites planétaires

4.2.3 Exemples d'instruments de musique

4.2.3.1 Caractéristiques importantes pour obtenir un cycle limite et des notes musicales

On a présenté des modèle mathématiques idéalisés présentant des cycles limites. Dans cette Section on discute de façon heuristique des caractéristiques physiques générales que doit posséder un système réel pour manifester un cycle limite. Il faut :

- **Système dynamique, degrés de liberté** : identifier les degrés de liberté physiques qui sont en mouvement. Ce peut être un fluide (air), un matériau (corde de violon, table d'harmonie du violon), une partie du corps humain (lèvres, cavité bucale, cordes vocales) ou tout cela couplés.
- **Instabilités** : il ne faut pas que toutes les trajectoires convergent vers un point fixe. Pour cela il faut qu'il y ait des "instabilités" dans le système physique.
- **Dissipation** : il faut qu'il puisse y avoir des attracteurs dans l'espace des phases. Pour cela dans le système physique, il doit y avoir des frottements, de la dissipation. Dans le modèle mathématique, il faut que le champ de vecteur ait la propriété d'être dissipatif : $\operatorname{div}V < 0$.

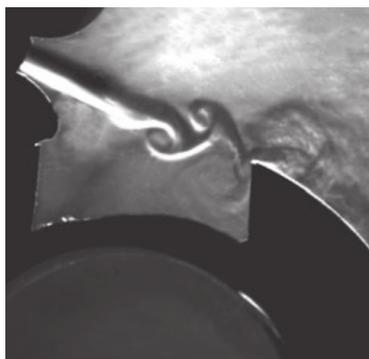
- **Source d'énergie** : sans source d'énergie, il y aurait un point fixe attracteur, le repos du système. On souhaite un cycle limite, il faut donc une source d'énergie pour contrecarrer la dissipation d'énergie.
- **Cycle limite** : finalement, on souhaite que l'attracteur ne soit pas un simple point fixe (cela ne génère pas de son), ni un attracteur étrange trop complexe (cela génère un son dissonant comme un "canard"), mais un cycle limite qui générerait donc un signal périodique, donc une note de musique.
- **Fréquence audible et ajustable à l'aide d'un résonateur** : finalement, si on a un cycle limite, on souhaite contrôler sa fréquence, et qu'elle soit dans le domaine musicale $f \in [50, 2000]$ Hz. Pour cela il peut être utile qu'il y ait la présence d'un "résonateur" dans le système physique, c'est à dire un système physique un spectre de fréquences propres ajustables.

4.2.3.2 Flûtes, Ocarina, Bouteille, trompette, sifflement, Voix, Clarinette, Saxophone etc



Référence : [Hirschberg et al. \(1996\)](#).

- **Système dynamique** : dans ces exemples, le système dynamique est essentiellement l'air, dans la bouche, dans l'instrument (ex dans la flute) couplé aux lèvres pour la trompette, aux anches pour le saxophone et clarinette, aux cordes vocales pour la voix.
- **Instabilité** : Ce sera le phénomène d'**instabilité de Bénard- Van Karman** (ou **Kelvin-Helmholtz**). Voir **Video de structures périodiques** de l'air dans une flute. Dans la flute, le flux d'air contre un biseau crée une instabilité et des tourbillons. Dans le sifflement, c'est à la sortie des lèvres. Dans la voix c'est au contact des cordes vocales. Dans la trompette, c'est au passage des lèvres.



- **Dissipation** : due au rayonnement du son, à la viscosité de l'air contre les parois, à la turbulence et la viscosité de l'air créant de la dissipation à petites échelles.
- **Source d'énergie** : le flux d'air des poumons.
- **Résonateur** : le tube de la flûte ou de la trompette, la cavité buccale pour la voix, le résonateur de Helmholtz, cf Appendice C.8, pour l'ocarina. Dans les instruments, on ajuste le résonateur par les clefs ou la position des trous.

Remarque 4.2.10. Il faut ajuster correctement tous ces paramètres pour faire apparaître un cycle limite comme souhaité :

1. Si il y a trop de dissipation, il n'y a pas de son. Exemple de la bouteille de plastique froissée.
2. Si il y a trop d'instabilité ou trop d'énergie, l'attracteur peut être plus compliqué qu'un simple cycle limite, e.g. attracteur chaotique. On observe cela avec le basson, selon les doigtés, voir [Bassoon Multiphonics 01](#), et voir "[The Not-Quite-Harmonic Overblowing of the Bassoon](#)", article de James B. Kopp.
3. Voir la [vidéo à 39'28](#) de Benoît Fabre qui concerne l'étude physique du jet d'une flûte.

Remarque 4.2.11. Le basson est un instrument réputé pour son son qui est “doux”, “non brillant”. Cela signifie que le module des harmoniques $|\hat{u}_n|_n$ décroît vite avec $n \geq 1$. La raison est que considéré comme un résonateur, son spectre naturel est non harmonique : ce sont les notes G_1, G_2, Eb_3, A_4 . On vérifie cela par les doigtés. Ce spectre est donc non excité par le forçage périodique du cycle limite.

- [Documentaire sur l'art du sifflement.](#)

Remarque 4.2.12.

- La physique des anches n'est pas bien comprise.
- Dans la nature, on observe souvent le **mouvement des herbes ou des feuilles dans le vent**, le **mouvement d'une branche qui trempe dans une rivière**. Tout cela correspond à des phénomènes similaire (bien que plus complexe).
- **Nage des poissons** : Ici le souffle continu d'air sur un biseau génère des tourbillons périodiques appelés [tourbillons de Karman](#). Il est intéressant de savoir que

le phénomène inverse est utilisé par les poissons pour se déplacer : ils imposent un mouvement périodique à leur nageoire caudale qui va générer des tourbillons périodiques qui à leur tour vont générer un déplacement continu du fluide qui va alors les propulser. Cela s'appelle l'allée inverse de Karman. [Référence](#), voir aussi [Thèse de Florine Paraz](#).

4.2.3.3 Violon, Verre frotté, Bol bouddhiste, tambour frotté



Vidéo de [verre frotté et résonances](#). Vidéo de [corde de violon au ralenti](#), [idem](#).

- **Système dynamique** : dans ces exemples, le système dynamique est essentiellement la corde du violon, le bois du violon, le matériau du verre, etc
- **Instabilité** : accrochage de la corde par l'archet et décrochage, grâce à la présence de colophane. Voir cette [vidéo](#). Accrochage du doigt sur le verre.
- **Dissipation** : frottements sur l'archet, dissipation des ondes dans le violon, rayonnement du son.
- **Source d'énergie** : mouvement continu de l'archet actionné par le bras.
- **Résonateur** : la corde du violon, la table d'harmonie du violon (le dessus), couplés par le chevalet.

Référence : [modèle des cordes avec archet](#). [Thèse sur la physique de l'archet](#). [Article de 1974](#) sur la physique du violon.

Question 4.2.13. *est-ce que le [Guiro](#) entre dans ce modèle, sa fréquence est supérieure à 20Hz ?*

4.2.3.4 Quelques modèles d'instruments

Il y a une grande variété d'instruments selon les cultures, les époques et les lieux. Voici quelques exemples remarquables

- Flûte de -35000 ans (trouvée près de Ulm en Allemagne). [Référence](#).



- Il est observé que dans certaines grottes (-40000,-30000 en Europe), l'emplacement des dessins muraux (ou taches) coïncident avec les lieux où l'écho et la résonance sont maximaux, Igor Reznikoff musicologue. Réf : émission arte "[Sapiens et la musique fut](#)", juin 2021.
- [Flûtes chinoises](#) de -9000 ans que l'on peut jouer.

4.2.3.5 La voix humaine comme instrument

Histoire de la voix (et de la musique) : d'après émission arte à 45' "[Sapiens et la musique fut](#)", juin 2021, chercheuse Anne MAcLarnaune, London pense que la possibilité de chanter et vocaliser est liée au contrôle du diaphragme et pour cela il faut un diamètre du trou dans les os de la colonne vertébrale assez grand pour faire passer les nerfs (Moelle épinière). Cela remonte à -100 000 ans, et cela est commun chez Homo-sapiens et Neanderthal, mais pas présent chez homo erectus. Question ouverte : musique/langage sont apparus de façon simultanée ? Une hypothèse de certains chercheurs : la mélodie berceuse de la mère à son enfant pour le rassurer a pu faire naître la voix et le langage.

Voix de poitrine et de tête : Le passage de la voix de poitrine à la voix de tête est physiologique. Dans le chant lyrique, on apprend à effacer le passage (ne pas le percevoir). Dans le chant des pygmés aka, le passage est prononcé au contraire. Référence : [Conférence de Michele Castellengo sur le son](#) à 12'.

4.3 Instruments harmoniques par résonance

On présente ici un deuxième type d'instruments de musique, ou les notes musicales (i.e. signal périodique) et produit par la vibration naturel d'un objet. Pour que le signal produit soit (presque) périodique cela nécessite une géométrie particulière à l'objet.

4.3.1 Cordes excitées (pincées ou frappées)

Les vibrations linéaires d'un **objet idéal unidimensionnel** sont **périodiques**. C'est le modèle d'onde étudié en Section 1.3.4. Pour cette raison les instruments musicaux fonctionnant de la sorte utilisent des **cordes tendues**, que l'on excite pour les mettre en mouvement.

Ensuite pour transmettre la vibration sous forme d'onde sonore à l'environnement, la corde est couplée à une plaque appelée **table d'harmonie**.

Exemple : le piano, la guitare, la harpe, le clavecin, le cymbalum.

— ref : [Benson \(n.d.\)](#) benson p15 , benson p85, p89, p.91

Remarque 4.3.1.

- Comme le son n'est pas entretenu, et que la production du son ne fonctionne pas sur le principe d'un cycle limite, le signal ne sera pas parfaitement périodique. On peut l'observer en effet en étudiant le spectre du piano ou de la guitare. Par exemple le spectre du piano est plus écarté qu'un spectre harmonique, cf Proposition 1.3.30.
- De plus le signal varie avec le temps, car l'énergie se dissipe en général plus vite pour les fréquences élevées.
- Finalement, l'énergie dans chaque fréquence, i.e $|\hat{u}_n|$, dépend de la condition initiale, c'est à dire de la façon de frapper ou pincer la corde.

- **Vidéo** d'une corde frappée au ralenti. Observer que le mouvement est presque périodique en temps. Il y a un amortissement sur les temps longs.

Exercice 4.3.2. “Modèle de bend pour une guitare”. Considérons le modèle suivant très simple d'une corde de guitare ou piano. La corde est de longueur L et sa force de tension est noté F . On note μ la masse de la corde par unité de longueur.

1. En appliquant la loi de Newton de la mécanique, démontrer que l'amplitude de vibration de la corde $u(x, t)$ est solution de l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$$

avec $c^2 = \frac{F}{\mu}$. Aide : consulter ce **document** qui considère le cas d'une surface de tambour.

Solution 4.3.3. L'angle entre la tangente de la corde au point x et l'axe initial est noté $\alpha(x)$ et donné par $\tan \alpha(x) = \frac{du}{dx}(x)$. On supposera $|\alpha(x)| \ll 1$. On considère un petit segment de corde $[x, x + dx]$. Au point $x + dx$, ce segment subit une force de composante normale à l'axe

$$\begin{aligned} F \sin(\alpha(x + dx)) &\approx F\alpha(x + dx) \approx F\alpha(x) + (dx) F\alpha'(x) \\ &\approx F\alpha(x) + (dx) F \frac{d^2 u}{dx^2}(x) \end{aligned}$$

De même au point x , ce segment subit une force de composante normale $-F \sin(\alpha(x)) \approx -F\alpha(x)$. Donc au total la force normale est $F_{\text{tot}} = (dx) F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x)$. Par ailleurs la position normale est $u(x, t)$, donc l'accélération est $\partial_t^2 u(x, t)$ et la masse de l'intervalle est $dm = \mu dx$. L'équation de mouvement de Newton donne

$$\begin{aligned} (dm) \partial_t^2 u(x, t) &= F_{\text{tot}} \\ \Leftrightarrow \mu(dx) \partial_t^2 u(x, t) &= (dx) F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) \\ \Leftrightarrow \partial_t^2 u &= c^2 \partial_x^2 u \end{aligned}$$

avec $c^2 = \frac{F}{\mu}$.

2. En appliquant la solution de d'Alembert de l'équation d'onde (voir Section 1.3.4.1), montrer que la note émise est de fréquence $f = \frac{c}{2L}$.

Solution 4.3.4. D'après La proposition 1.3.22, la solution d'Alembert est

$$u(x, t) = R(x - ct) + R(-x - ct)$$

avec une fonction R arbitraire mais périodique : $R(x + 2L) = R(x)$. Cela implique que $u(x, t + T) = u(x, t)$ avec la période $T = \frac{2L}{c}$, donc fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{c}{2L}$.

3. La longueur de la corde tendue s'écrit $L = L_0 + x$ avec L_0 la longueur de la corde non tendue, x son élongation sous l'effet de la force de tension $F = Kx$ et K la constante de raideur de la corde. Montrer que si l'on effectue un "bend" de la corde, c'est à dire que l'on tire la corde sur une distance l en son milieu (en $L/2$) dans une direction orthogonale à la corde, et supposant $l \ll L$, alors la variation d'élongation est $dx = \frac{2l^2}{L}$. Montrer que la variation de fréquence df est donnée par

$$\frac{df}{f} = \frac{1}{2} \frac{dx}{x}.$$

Solution 4.3.5. D'après le théorème de Pythagore, la nouvelle longueur de corde est

$$\begin{aligned} L' &= 2\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + l^2} = L\sqrt{1 + \left(\frac{2l}{L}\right)^2} \\ &\approx L\left(1 + \frac{2l}{L}\right) = L + \frac{2l^2}{L} = L + dx \end{aligned}$$

avec une élongation

$$dx = \frac{2l^2}{L}.$$

D'après les questions précédentes $c^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{Kx}{\mu}$ et

$$f = \frac{c}{2L} = \sqrt{\frac{Kx}{\mu}} \frac{1}{2(L_0 + x)}$$

Donc

$$\ln f = \frac{1}{2} \ln x - \ln(L_0 + x) + C$$

avec C indépendant de x . Ainsi une variation de l'élongation x implique une variation de la fréquence f de la note d'après

$$\begin{aligned} \frac{df}{f} &= \frac{1}{2} \frac{dx}{x} - \frac{dx}{L_0 + x} = dx \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{L} \right) \\ &= dx \left(\frac{L - 2x}{2xL} \right) \end{aligned}$$

En général $L - 2x > 0$ donc $dx > 0$ implique $df > 0$, i.e. la fréquence de la note monte en tirant sur la corde.

4.3.2 Cloches

Les cloches sont construites pour avoir le bas du spectre presque harmonique.

4.3.3 Xylophones

Chaque lamelle a un spectre quasi harmonique.

Lithophone : pierre qui résonne. Utilisés à la préhistoire. Voir le film à 22' : “**Sapiens et la musique fut**”, juin 2021. Chaque pierre peut émettre deux notes différentes, selon le lieu d’impact.

4.4 Instruments percussifs

Beaucoup d’instruments percussif sont “timbrés”, c’est à dire qu’ils ont des fréquences propres quasi- harmoniques. Exemple : les congas, le tambour paroleur.

Exemple : Toma Gouband qui fait des **percussions sur pierres sonnantes**.

Remarque 4.4.1. la basse en reggae/funk a un rôle entre percussion et harmonie.

4.5 Musique assistée par ordinateur (MAO)

4.5.1 Traitement audio

4.5.2 Messages MIDI

Chapitre 5

Théories et pratiques de la musique

5.1 Introduction

5.1.1 Aspects culturels de la musique

La musique est avant tout une pratique culturelle.

5.1.2 La musique chez d'autres espèces ?

5.1.3 Aspects commerciaux de la musique

5.2 Harmoniques et intervalles justes en musique

Quelques rappels sur les intervalles justes et fractions rationnelles :

Dans la définition 2.3.1, on a défini une “**note musicale**” comme étant un **signal périodique** en temps. Voir exemple ???. Sa période est notée T , sa fréquence $f = \frac{1}{T}$. On a vu dans le théorème ??? que le spectre de Fourier d'un signal périodique en temps est “**harmonique**”, i.e. contient uniquement des fréquences de la forme $f_n = nf$, appelées harmoniques, avec $n \geq 1$ entier. On a vu en Section 3.4 que notre “perception” est sensible à ce spectre d'harmoniques, en particulier en fait que les rapports de fréquences des premières harmoniques

$$\frac{f_{m'}}{f_m} = \frac{m'}{m} \in \mathbb{Q}$$

sont des “petits nombres rationnels” c'est à dire avec m', m entiers pas “très grands” (disons < 20 , cette limite est subjective). Un tel rapport de fréquence $\frac{f_{m'}}{f_m} = \frac{m'}{m} \in \mathbb{Q}$ est appelé **intervalle juste**.

Nous avons observé en Section 2.3.5 que ces intervalles justes ont une importance en musique. Parmi les intervalles justes, on a identifié des intervalles bien connus en musique comme l'octave $\frac{f'}{f} = \frac{2}{1}$, la quinte $\frac{f'}{f} = \frac{3}{2}$, la quarte $\frac{f'}{f} = \frac{4}{3}$, l'unisson $\frac{f'}{f} = \frac{1}{1}$.

5.2.1 Dissonance d'un intervalle juste

On souhaite associé une valeur positive à un intervalle juste qui correspondrait à sa “dissonance” (opposé de la consonance ou résonance). La définition suivante signifie géométriquement que la dissonance d'un intervalle juste est la longueur pour parcourir l'intervalle en suivant les arêtes du réseau, avec les poids $\ln p$ sur chaque axe n_p . En mathématiques, cela s'appelle aussi la **distance l^1** ou **distance de Manhattan**.

Définition 5.2.1. La **dissonance** d'un intervalle juste $\frac{m'}{m} = P^n$ est

$$\text{Dis} \left(\frac{m'}{m} \right) := \sum_{p \in P} |n_p| \ln p$$

On notera aussi $\text{Dis}(n) := \sum_{p \in P} |n_p| \ln p$, pour $n \in \mathbb{Z}^P$.

Remarque 5.2.2. :

- $\text{Dis}(-n) = \text{Dis}(n)$.
- $\text{Dis} \left(\frac{m'}{m} \right) = \ln(m'm)$ si fraction irréductible.
- On retiendra les quelques valeurs approximatives

$$\ln 2 = 0,7.., \quad \ln 3 = 1,1.., \quad \ln 5 = 1,6.., \quad \ln 7 = 2, \dots, \quad \ln 11 = 2,4.., \quad \ln 13 = 2,6..$$

Ainsi

$$\text{Quinte} : \text{Dis} \left(\frac{3}{2} \right) = \text{Dis}((1, -1)) = 1 \cdot \ln 2 + 1 \cdot \ln 3 = 1,8..$$

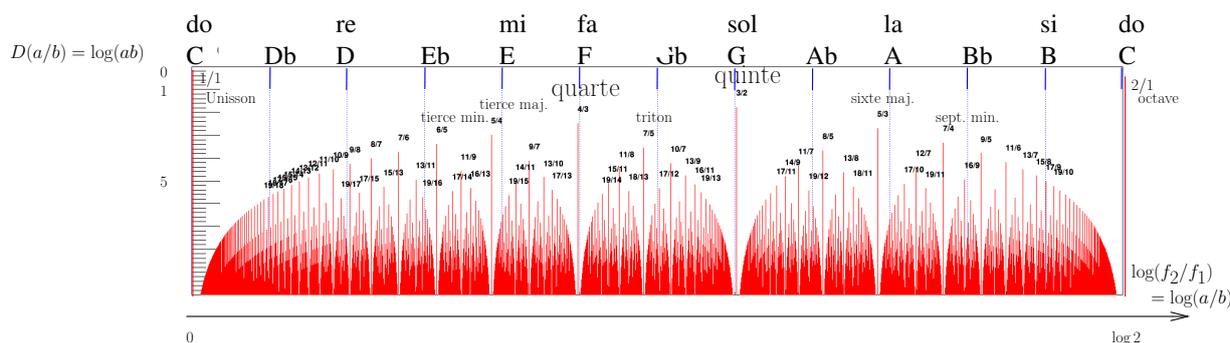
$$\text{Octave} : \text{Dis} \left(\frac{2}{1} \right) = \text{Dis}((1)) = \ln 2 = 0,7..$$

$$\text{Unisson} : \text{Dis} \left(\frac{1}{1} \right) = 0.$$

On conviendra d'appeler la **résonance** ou **résonance** l'opposé de la dissonance : $R \left(\frac{m'}{m} \right) := -\text{Dis} \left(\frac{m'}{m} \right) \leq 0$.

5.2.2 Fractale de Farey des nombres rationnels et intervalles justes

La **fractale de Farey** s'obtient en traçant la résonance $-\text{Dis} \left(\frac{m'}{m} \right) = -\ln(m'm)$ en fonction du pitch $\ln \left(\frac{m'}{m} \right)$. (voir aussi Figure C.1.5 en annexe).



Ecoute : vous pouvez écouter les intervalles juste selon la fraction sélectionnée sur la fractale dans cette [application](#).

Remarque 5.2.3. Sur le schéma, on a représenté en bleu, les intervalles tempérés (i.e. nombre entier de demi-tons). On associe sans problème les fractions $2/1$ à l'octave tempérée, $\frac{3}{2}$ à la quinte tempérée et $\frac{4}{3}$ à la quarte tempérée. Cette association n'est pas toujours évidente. Par exemple,

- la tierce mineure tempérée (3 demi-tons) peut être identifier comme $\frac{f'}{f} = \frac{6}{5}$ ou $\frac{f'}{f} = \frac{7}{6}$,
- la septième mineure (10 demi-tons) peut être identifier comme $\frac{f'}{f} = \frac{7}{4}$ ou $\frac{f'}{f} = \frac{9}{5}$,

Sachant que la perception est précise à $\frac{1}{10}$ de demi-ton, on observe que les fréquences du tempérament égal en bleu, propose un choix très limité par rapport aux possibilités des intervalles justes en rouge.

Remarque 5.2.4. Près de l'unisson, (mais aussi de la quinte) il y a tout un voisinage avec absence d'autres intervalles justes. Cela est un phénomène purement arithmétique, mais clair sur la figure du verger d'Euclide [C.1.2.1](#). Cela implique qu'un intervalle $\frac{f'}{f}$ proche de l'unisson ou de la quinte, mais différent, sonnera très dissonant. On verra que cela se manifeste dans les pratiques musicales.

Intervalles justes au delà de l'octave :

- Les nombres 7, 11, 13 ont une importance dominante dans les intervalles juste plus grand que $\frac{2}{1}$. Cela s'explique par exemple par le fait que la dissonance $\text{Dis}\left(\frac{7}{1}\right) = \ln 7 = 2, \dots$ de la fraction $4 < \frac{7}{1} < 8$ située dans la 3ème octave est plus faible que $\text{Dis}\left(\frac{7}{4}\right) = 2 \ln 2 + \ln 7 = 3, 4$ de la fraction $1 < \frac{7}{4} < 2$ situé dans la première octave. Par exemple dans la figure suivante pour les intervalles compris entre 1 et 2 octaves



`/home/faure/c++/musique/tonnetz/rapport_tonnetz/octave_1.png`

- et pour les intervalles compris entre 2 et 3 octaves, on y voit dominer localement le rôle des nombres premiers 11, 13, 17, 19.



`/home/faure/c++/musique/tonnetz/rapport_tonnetz/octave_2.png`

5.3 Accords justes

Dans la suite, on ne considérera que des notes formant des intervalles justes entre elles. Étant donné une note de référence, de fréquence f_{ref} , associée au point $n = (0, 0, \dots)$ origine du tonnetz \mathbb{Z}^P , toute autre **note est représentée par un point $n \in \mathbb{Z}^P$ du tonnetz**, montrant son décalage par rapport à la note de référence. Son pitch est donné

par la formule (2.3.5) ou (??) :

$$x = x_{\text{ref}} + \frac{12}{\ln 2} \sum_{p \in P} n_p \ln(p).$$

Définition 5.3.1. Un **accord juste** est un ensemble de N notes formant deux à deux des intervalles justes :

$$A = (n(1), n(2), \dots, n(N)), \quad n(j) \in \mathbb{Z}^P.$$

La **dissonance de l'accord** A est la somme des dissonances de chaque intervalle le composant (le $\frac{1}{2}$ est là car la double somme qui suit compte deux fois chaque intervalle) :

$$\text{Dis}(A) := \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \text{Dis}(n(j) - n(k)).$$

Ainsi on peut penser à un accord composé de N notes, comme une molécule composée de N atomes, et la dissonance de l'accord suit la même formule que l'énergie de liaison d'une molécule qui est la somme des énergie mutuelles entre atomes.

Exercice 5.3.2. “Recherche du renversement qui minimise/maximise la dissonance”.

1. Considérons la triade majeure C_5, E, G . Trouver le renversement qui minimise la dissonance? Si on rajoute la contrainte que E, G sont dans les octaves 4, 5 (i.e. autour du C_5), trouver le renversement qui minimise et maximise la dissonance?
2. De même pour la triade mineure C, Eb, G , puis l'accord de dominante C, E, G, Bb et l'accord semi-diminué C, Eb, Gb, Bb ?
3. Écrire un algorithme général qui trouve le renversement qui minimise/maximise la dissonance?

Solution 5.3.3.

1. Considérons la triade $A = (C, E, G)$. Fixons la note C à l'origine 0 du tonnetz. Alors E est en $(n_E, 0, 1) \in \mathbb{Z}^P$ et G est en $(n_G, 1, 0) \in \mathbb{Z}^P$ avec $n_E, n_G \in \mathbb{Z}$ que l'on recherche. La dissonance de l'accord est

$$\begin{aligned} \text{Dis}(A) &= \text{Dis}(C, E) + \text{Dis}(C, G) + \text{Dis}(G, E) \\ &= \text{Dis}(n_E, 0, 1) + \text{Dis}(n_G, 1, 0) + \text{Dis}(n_G - n_E, 1, -1) \\ &= (|n_E| + |n_G| + |n_G - n_E|) \ln 2 + 2 \ln 3 + 2 \ln 5 \end{aligned}$$

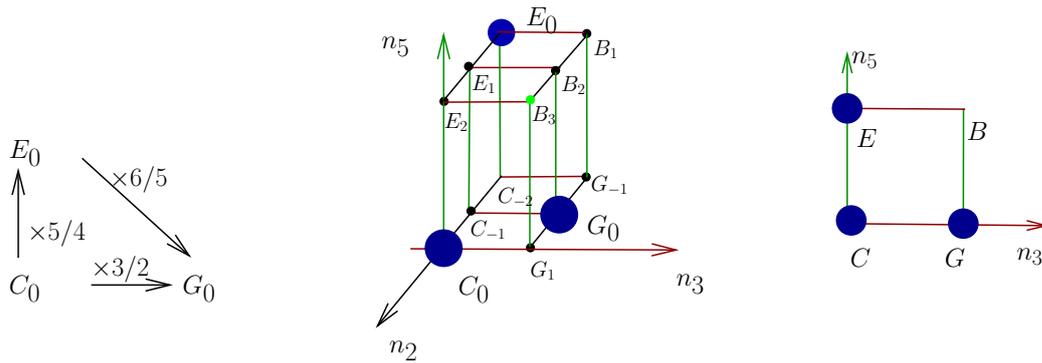
- Donc pour minimiser la dissonance il faut minimiser $|n_E| + |n_G| + |n_G - n_E|$. La solution est $n_E = n_G = 0$. Donc la répartition C_5, G_6, E_7 .

- Avec la contrainte d'utiliser les octaves 4, 5, cela impose $n_G \in \{-2, -1\}$ et $n_E \in \{-3, -2\}$. Alors le renversement qui minimise la dissonance est $n_E = -2$, et $n_G = -2$ ou $n_G = -1$, soit G_4, C_5, E_5 ou C_5, E_5, G_5 (le premier a l'intervalle G_4, E_5 plus résonance et le deuxième a l'intervalle C_5, G_5 plus résonance).
 - La dissonance est maximisée pour le renversement E_4, G_4, C_5 ou E_4, C_5, G_5
2. Pour la triade $A = (C, Eb, G)$. On écrit de même E_b est en $(n_{E_b}, 1, -1) \in \mathbb{Z}^P$ et G est en $(n_G, 1, 0) \in \mathbb{Z}^P$ avec $n_{E_b}, n_G \in \mathbb{Z}$ que l'on recherche.

$$\begin{aligned} \text{Dis}(A) &= \text{Dis}(C, E_b) + \text{Dis}(C, G) + \text{Dis}(G, E_b) \\ &= \text{Dis}(n_E, 1, -1) + \text{Dis}(n_G, 1, 0) + \text{Dis}(n_G - n_{E_b}, 0, 1) \\ &= (|n_E| + |n_G| + |n_G - n_E|) \ln 2 + 2 \ln 3 + 2 \ln 5 \end{aligned}$$

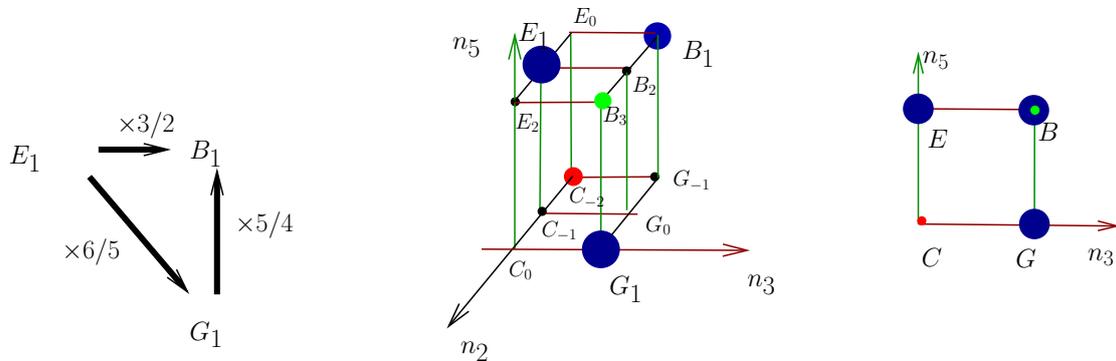
Donc pour minimiser la dissonance il faut minimiser $|n_{E_b}| + |n_G| + |n_G - n_{E_b}|$. La solution est $n_{E_b} = n_G = 0$. Donc la répartition E_{b3}, C_5, G_6 .

Exemple 5.3.4. Pour la triade majeure $C_0 - E_0 - G_0$:



$$\text{Dis}(A) = \ln(5.4) + \ln(3.2) + \ln(6.5) = 4 \ln(2) + 2 \ln(3) + 2 \ln(5) = 8.18$$

Noter que la triade mineure $E_1 - G_1 - B_1$ a la même dissonance car est constituée des même intervalles justes.



$$\text{Diss} = \log(5.4) + \log(3.2) + \log(6.5) = 8.18$$

5.3.1 Chambre, basse virtuelle, sifflet et profondeur d'un accord juste

On a vu que la triade majeure et la triade mineure ont la même valeur de dissonance. Géométriquement, on observe que ces deux accords n'ont pas la même forme géométrique dans le tonnetz. À l'écoute on ressent que la triade majeure est plus stable, la triade mineure est plus flottante, semble manquer de fondement. Voici une façon quantitative de les distinguer, en complément de la dissonance.

Définition 5.3.5. La **basse virtuelle** $\text{Bass}(A)$ d'un accord $A = (n_{(1)}, n_{(2)}, \dots, n_{(N)})$ est la note la plus haute qui contient A dans ses harmoniques. Ainsi

$$\text{Bass}(A) = (n_2, n_3, n_5, \dots) \in \mathbb{Z}^P$$

avec

$$n_p = \min_{j \in [1, N]} (n_p(j)), \quad \forall p \in P.$$

De même, le **sifflet virtuelle** $\text{Siff}(A)$ de l'accord A est la note la plus grave qui est harmonique de toutes les notes de A . Ainsi

$$\text{Siff}(A) = (n_2, n_3, n_5, \dots) \in \mathbb{Z}^P$$

avec

$$n_p = \max_{j \in [1, N]} (n_p(j)), \quad \forall p \in P.$$

Plus généralement, la **chambre de l'accord** est l'ensemble des notes

$$\text{Room}(A) := \left\{ n = (n_2, n_3, \dots) \in \mathbb{Z}^P, \quad \forall p, \quad \min_{j \in [1, N]} (n_p(j)) \leq n_p \leq \max_{j \in [1, N]} (n_p(j)) \right\}$$

Ainsi la basse et le sifflet sont les extrémités de la chambre. Toutes les notes de l'accord sont dans la chambre.

— Par exemple pour la triade majeure

$$\begin{aligned} A &= "C_5 - E_5 - G_5" \\ &= ((0), (-2, 0, 1), (-1, 1)) \end{aligned}$$

on obtient que

$$\text{Bass}(A) = (-2, 0, 0 \dots) = \frac{1}{2^2} \equiv C_3$$

$$\text{Siff}(A) = (0, 1, 1, 0 \dots) = 3.5 = \frac{3}{2} \frac{5}{4} 2^3 \equiv B_8$$

— Par exemple pour la triade mineure

$$A = "C_5 - Eb_5 - G_5"$$

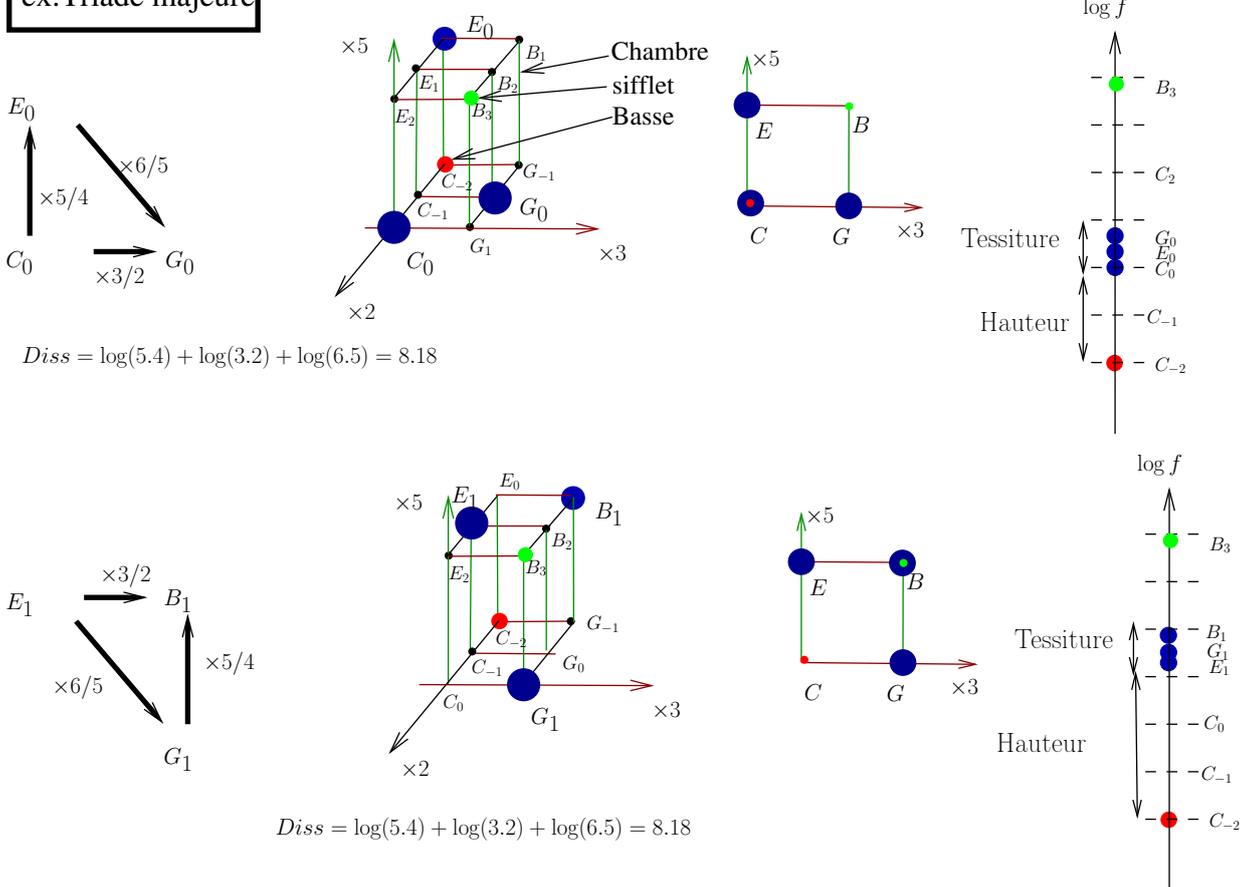
$$= ((0), (1, 1, -1), (-1, 1))$$

on obtient que

$$\text{Bass}(A) = (-1, 0, -1, 0 \dots) = \frac{1}{2.5} = \frac{1}{2^3 (5/4)} \equiv Ab_1$$

$$\text{Siff}(A) = (1, 1, 0 \dots) = 2.3 = 2^2 \frac{3}{2} \equiv G_7$$

ex: Triade majeure



On remarque donc que

- la **triade majeure** C,E,G possède sa basse virtuelle qui est C. → **sensation de stabilité.** [Video](#)
- la **triade mineure** $E_m = E, G, B$ n'a pas sa basse virtuelle qui est C. → **sensation de manque.** [Video](#)

5.4 Les intervalles et accords justes dans les pratiques musicales

La section précédente nous a donné quelques indications pour analyser les intervalles justes et les accords justes. Considérons maintenant les pratiques musicales. On reviendra plus tard sur les théories musicales. On observe que les intervalles justes sont très présents dans tous les styles de musique, de tout temps et de toute culture. Voici quelques exemples.

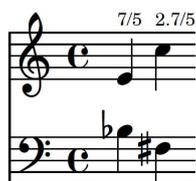
- Par ex. l’octave $2/1$, la quinte $3/2$, la quarte $4/3$, sont des intervalles universels dans les cultures humaines. La quarte $4/3$ est le premier intervalle de la marseillaise. **Son** ou **Son** :



- Dans la fractale de Farey, on a observé des “gaps” de résonance, i.e. des intervalles dissonants, tout près des fractions simples, voir remarque 5.2.4. Par exemple, la **ganga** en Dalmatie sont des chants populaires, avec intervalles de notes qui “frottent” (pour le plaisir), ref : **carnet de voyage** avec Anne-Florence Borneuf. **Son**



- **Organum** est un genre musical à deux voix, du IX^{ème} au XII^{ème} siècle en **Europe**, constitué d’octaves ($2/1$), quintes ($3/2$) et quartes ($4/3$). Les tierces ($6/5$) et sixtes ($5/3$) peuvent être entendues à partir du XI^{ème} siècle. ref : **Musica Enchiriadis**. C’est l’origine du **contrepoint**. **Video** de Organum duplum : Alleluia, hic Martinus (“organum fleuri”).
- L’**intervalle** $7/5$ qui est aussi une fraction proche du triton et remarquable dans la fractale de Farey C.1.5, est revisité par les bee boppers (Charlie Parker, Dizzy Gillespie .., 1940’), par ex. dans l’introduction de “salt peanuts” en 1942. Dans cet exemple, il y a un intervalle de quinte diminuée $7/5$, puis $14/5$ ou $11/4$?, puis l’oc-



tave 2/1. **Son**

- Les **chants bulgares** (musique traditionnelle actuelle) font entendre des des voix très timbrées (i.e. riches en harmoniques) avec des résonances $\frac{f'}{f} = \frac{a}{b}$ bien marquées qui se concluent souvent par des unissons. On remarque aussi des rythmes en $2+2+3=7$. **Video**.
- En **musique indienne**, on apprécie les résonances entre la **tampura** (riche en harmoniques) et la **flûte**.

Dans cet exemple, on remarque que les rapports rationnels amènent des **relations entre les notes** et pas seulement avec la basse fixe (tampura). Ces relations sont schématisées sur la partition par les traits en noir. On a aussi mis en valeur la proximité de hauteur en rouge. On discutera de cela après.

- Qu'observez vous de particulier concernant le ré (qui est peu joué)? réponse : c'est le seul dont le dénominateur de la fraction (ici $5/3$) n'est pas une puissance de 2. On verra plus loin que si le musicien joue le ré de façon trop insistante, il

5.4. LES INTERVALLES ET ACCORDS JUSTES DANS LES PRATIQUES MUSICALES 167

ressort une couleur « mineur ».

— [Video](#)

- Des intervalles justes faisant intervenir les entiers 11 et 13 sont présents dans les **chants suisses, et le cor des alpes**. **Son** (avec la “11#” à 45”, et la “13b” à 1’56”). Remarquer que les musiciens évitent soigneusement de jouer l’harmonique 7 et $14 = 2 \times 7$.



- Composition **Stimmung** de Karlheinz Stockhausen. [Ecouter](#).

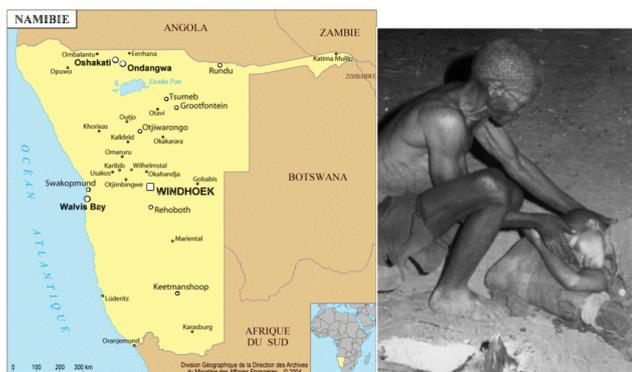
5.4.1 Quelques gammes et modes

5.4.1.1 La gamme pentatonique majeure

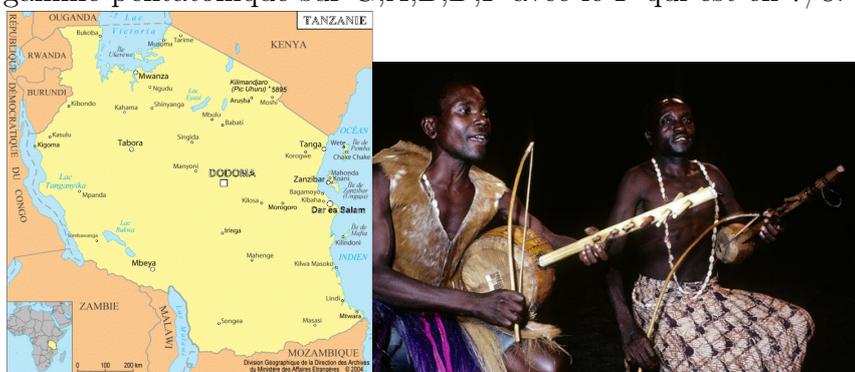
Utilisée partout dans le monde.

F	C	G	D	A
---	---	---	---	---

- jouée dans l’ordre croissant des fréquences, cela donne : **F,G,A,C,D,(F)** , utilisé par ex. en musique irlandaise.
 - Le mode **C,D,F,G,A,C** est appelé **Raga Suddha Saveri** en musique indienne, et mode Bac en **musique vietnamienne** (aussi utilisé en musique chinoise).
 - Le mode **G,A,C,D,F** est le **raga Madhyamavati** en musique indienne.
 - Le mode **D,F,G,A,C,D** est le raga **Udayaravichandrika** en musique indienne. (aussi utilisé en musique d’amérique du sud)
- [Video](#) de Bobby McFerrin sur l’universalité de la gamme pentatonique (colloque notes&neurons 2009)
- Gamme pentatonique mineure en namibie, D,F,G,A,C, ref : **carnet de voyage** avec Emmanuelle Olivier. **Son**

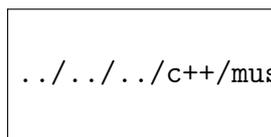


- **Carnet voyages avec Pollo Vallejo**, wagogo tanzanie, Rituel d’initiation. à 7’25” : gamme pentatonique sur G,A,B,D,F avec le F qui est en 7/8. **Son**



- Gamme pentatonique majeure sur le tonnetz : C,E,F,G,Bb **Video**

5.4.1.2 Gamme pentatonique mineur



../../../c++/musique/tonnetz/rapport_tonnetz/gamme_penta_mineur.png

- Dans l’ordre : C,Eb,F,G,Bb,(C).
- elle n’est pas équivalente à la gamme pentatonique majeur Eb,F,G,Bb,C,Eb qui n’utilise que l’axe *3.
- Gamme pentatonique mineure sur le tonnetz : C,Eb,F,G,Bb **Video**.

5.4.1.3 La Gamme de Zarlino

- Zarlino, XVIeme siècle. Mise en valeur de la quinte juste et tierce juste.

A	E	B	
F	C	G	D

- Contient les notes justes des triades de Fa,Do,Sol, cad : (F,A,C),(C,E,G),(G,B,D).
- Cette gamme F,A,C,E,G,B,D est appelée gamme de “l’intonation juste”.

— Le problème par ex. est que l'accord $Dm=(D,F,A)$ sonne faux.

5.4.1.4 Gamme Pythagoricienne à 7 notes (heptatonique)

— Ce sont 7 notes en rapport de $3/2$ (quinte juste).

F	C	G	D	A	E	B
---	---	---	---	---	---	---

— Utilisée au moyen age et renaissance, jusqu'au XVIe siècle, en théorie et en pratique.
(rem : Il y a 6 gammes à 7 notes qui contiennent C,G.)

— Utilisé en musique indienne : **Raga Kalyani** :

C	G	D	A	E	B	F#
---	---	---	---	---	---	----

Raga Thodi :

Db	Ab	Eb	Bb	F	C	G
----	----	----	----	---	---	---

5.4.1.5 Mode indien carnatique **Shankarabharana**

A'	E	B		
F	C	G	D	A

Référence : **Pham (2003)**.

Remarques :

— Le problème est que la tierce F-A est fausse.

— A s'appelle "chatusruti dha". Il est "lumineux, exultant, acidulé. A' s'appelle "trisruti dha" est calme, apaisé, triste.

— Ex cité par F. Pham p.10 **Pham (2003)** : Si C,D ; A',G ; G,F,E,D,C est joué plusieurs fois, puis C,D ; A,G ; G,F,E,D,C : joué à la fin. Alors le A sonne

5.4.1.6 Raga indiens

— Le **Raga carnatique Mohana** est

E			
C	G	D	A

— C'est une gamme pentatonique.

— Le **raga carnatique Hindolan** (aussi en musique hindoustanie , où il s'appelle Malkauns) ?

Exemple 5.4.1. Exemple d'utilisation du raga **Manirangu**, is a janya raga, derived from **Kharaharapriya** which is 22nd on the **Melakarta** scale : **raga Manirangu**

5.5 Les intervalles et accords justes dans les théories musicales

On a vu la présence des intervalles justes $\frac{f'}{f} = \frac{a}{b}$ dans les pratiques musicales. Parlons maintenant du "discours théorique" concernant la musique et concernant particulièrement les intervalles justes.

Remarque 5.5.1. On a décidé de séparer cette section, car il ne s'agit pas de “**théories scientifiques**”, i.e. validées : leur pertinence ou véracité n'est pas certaine (et même souvent douteuse). Elles ont cependant un intérêt historique et culturel.

- La **théorie musicale** de **pythagore** (à la suite des babyloniens) ne considérait que les intervalles a/b construits à partir des entiers 2, 3. Ex : $\frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3}$. Contre-exemple : $\frac{5}{4}, \frac{7}{5}$. D'après la figure suivante, cette théorie ne permet de décrire que très peu d'intervalles résonants.



`/home/faure/c++/musique/tonnetz/rapport_tonnetz/octave_0,primes_23.png`

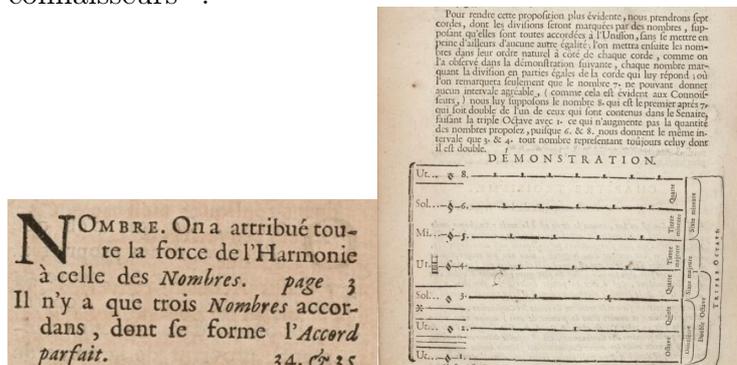
On peut donc observer qu'elle n'est pas pertinente musicalement.

- La **théorie musicale** de **Zarlino (1558)** ne considérait que les intervalles a/b construits à partir 2, 3, 5. Ex : $\frac{4}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3}$, $\frac{6}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5}$. Contre-exemple : $\frac{7}{5}$.

/home/faure/c++/musique/tonnetz/rapport_tonnetz/octave_0,primes_235.png

On peut observer que la plupart des intervalles juste importants sont bien décrits, même si il manque 3 rationnels importants : $\frac{7}{6}$ (tierce mineure), $\frac{7}{5}$ (triton) et $\frac{7}{4}$ (septième mineure).

- J.P. Rameau, “**Traité de l’harmonie**” (1722), qui est encore une référence, écrit p.xv que la musique repose sur les chiffres (2, 3, 5) seulement. Page 4 il exclut le nombre 7 car “ne pouvant donner aucun intervalle agréable, c’est évident aux connaisseurs” :



Cette affirmation pas vraiment justifiée peut nous surprendre.

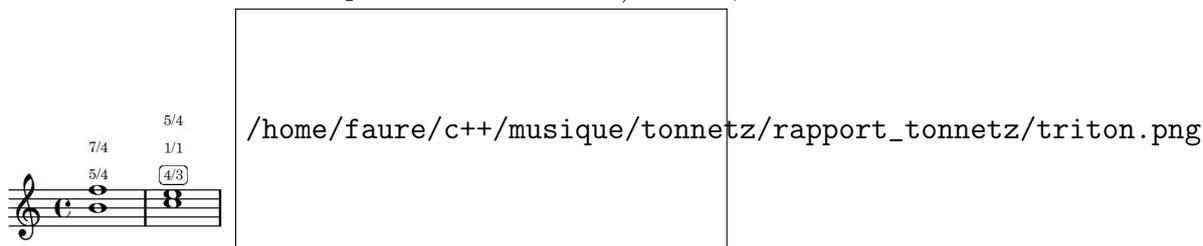
- Ces rapports $\frac{11}{2}$ ou $\frac{13}{2}$ en “quarts de tons”, semblent être utilisés en **musique arabe**. (?)
- **Humour** : sketch de Kammelott (Alexandre Astier). On entend l’unisson 1/1, quarte $\frac{4}{3}$, quinte $\frac{3}{2}$, tierce mineure $\frac{6}{5}$, quinte diminuée $\frac{7}{5}$ appelé “Diabolus In Musica” au moyen âge par **Guido d’Arezzo 1050(?)** (reference). [Video](#).

5.5.0.1 Tonnetz de Euler

L'idée d'utiliser le réseau \mathbb{Z}^P vient de Euler (en 1739, il a 24 ans), qu'il appelle réseau **tonnetz** dans son livre « Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae ».

5.5.1 Enchaînement d'accords

- Dans la musique occidentale il y a un enchaînement d'accord très courant, appelé la **“Résolution du triton”** ou **résolution de la sensible**. On peut l'interpréter sur le tonnetz comme l'intervalle juste **de triton** $\frac{7}{5}$ vers la **tierce majeure** $\frac{5}{4}$: il y a un mouvement d'un demi-ton de $F \rightarrow E$ (en tirets bleus) dont la fraction est $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{21} \simeq (1.050)^{-1}$. Il y a aussi un mouvement d'un demi-ton $B \rightarrow C$ (en pointillés rouges) dont la fraction est $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{15} \simeq 1.066$. (On rappelle que le demi-ton chromatique est $2^{1/12} \simeq 1.059$). [Video](#), et avec la basse virtuelle : [Video](#).



- (Cadences II-V-I Majeure : [Video](#) et mineure [Video](#).)
- **Enchaînement d'accords** basée sur trois “petits déplacements” $\frac{20}{21}, \frac{16}{15}, \frac{8}{9}$: [Video](#), et avec la basse virtuelle : [Video](#).
 - Rem : vraie musique jouée par Miles Davis, Sam Jones, Hank Jones : [Video](#).

5.5.2 La théorie des tempéraments

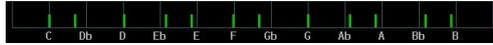
(ref : Benson chap. 5).

- Un **tempérament** est un “bon” choix de 12 notes par octave pour accorder un instrument. Il est naturel de choisir ces 12 notes parmi les notes du tonnetz (modulo l'octave). Mais le tonnetz est infini, donc ce choix est arbitraire. Un choix « raisonnable » de tempérament est un tempérament contenant des intervalles justes « importants » ou « utiles ».
- A partir du XIX^{ème} siècle, en occident il a été convenu d'utiliser le tempérament égal qui n'est pas juste, afin de simplifier et d'oublier ces questions.
- **Exemples** :
 - Johannes Kepler, “**Harmonies mundi**” 1619. [Video](#)



5.5. LES INTERVALLES ET ACCORDS JUSTES DANS LES THÉORIES MUSICALES 173

- J.J. Rousseau “Dictionnaire de la musique” 1768. [Video](#)



- Tempérament de cloches chinoises de 433 B.C. (ref : article de Cohn 1997, page 63, et Falkenhausen, « suspended music.. » p.284) [Video](#).



- J.S. Bach, “Clavier bien tempéré”, 1722. (ref : Benson p.188)



The temperament of Vallotti and Young is probably closest to the intentions of J. S. Bach for his Well-Tempered Clavier. According to the re-

- Tempérament pythagoricien

Db	Ab	Eb	Bb	F	C	G	D	A	E	B	F#
----	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	----

- Utilisation : la “**modulation**” : on utilise un mode heptatonique parmi les 5 qu’elle contient, et on passe de l’un à l’autre.
- Intérêt : on accorde une harpe de façon fixée.
- Remarque : la quinte F#-Db est fausse appelée « **quinte du loup** », les musiciens au moyen âge l’évitait.

- Dans un tempérament juste (non égal), les transpositions donnent des gammes différentes. Conseils de Christian Schubart en 1784 (ref : Benson p.183)

5.13. IRREGULAR TEMPERAMENTS

183

C major	Completely pure. Its character is: innocence, simplicity, naivety, children's talk.
C minor	Declaration of love and at the same time the lament of unhappy love.—All languishing, longing, sighing of the lovesick soul lies in this key.
D \flat major	A leering key, degenerating into grief and rapture. It cannot laugh, but it can smile; it cannot howl, but it can at least grimace its crying.—Consequently only unusual characters and feelings can be brought out in this key.
C \sharp minor	Penitential lamentation, intimate conversation with God, the friend and help-meet of life; sighs of disappointed friendship and love lie in its radius.
D major	The key of triumph, of Hallelujahs, of war-cries, of victory-rejoicing. Thus, the inviting symphonies, the marches, holiday songs and heaven-rejoicing choruses are set in this key.
D minor	Melancholy womanliness, the spleen and humours brood.
E \flat minor	Feelings of the anxiety of the soul's deepest distress, of brooding despair, of blackest depression, of the most gloomy condition of the soul. Every fear, every hesitation of the shuddering heart, breathes out of horrible E \flat minor. If ghosts could speak, their speech would approximate this key.

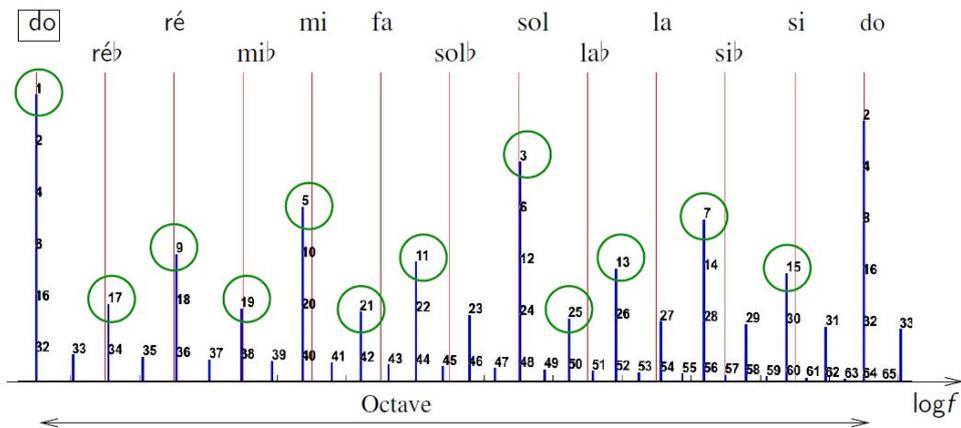
- Le tempérament harmonique : avec Magic Malik en concert le 27/2/2015 :



— on a fait des morceaux utilisant le “**tempérament des harmoniques**” (cercles verts) :

Son à 43”, , **Video concert**, à 30”.

Son : à 7’03” et 11”10”.



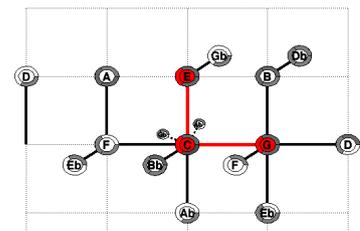
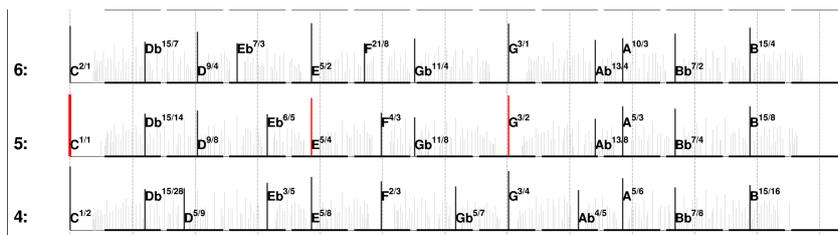
— on a fait des morceaux utilisant le “**tempéraments box**” sur le réseau (3,5,7)

Video



5.5.2.1 Le tempérament adaptatif

Définition 5.5.2. Si un accord $A = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ est présent, le **choix d’une prochaine note** de fréquence f_{n+1} dans un intervalle donné de 1 octave/12 ($=\frac{1}{2}$ ton) est tel qu’il **minimise la dissonance** du nouvel accord $A' = A \cup \{f_{n+1}\}$.



- Remarques :
 - Invariant par transposition mais **non commutatif** : $C_0 - G_0 - Bb_0 - Eb_0 \neq C_0 - G_0 - Eb_0 - Bb_0$.
 - Décalage possible du « diapason » si on s'éloigne sur le tonnetz.
 - Le résultat dépend très peu du choix de la fonction $D(a/b) = \log(ab)$.
- Exemple du morceau du concert [Video du tonnetz avec basse et sifflet](#). [Son, concert](#) à 6'10" et 8'10".

5.6 Conventions d'écriture de la musique

5.7 Analyse harmonique en musique classique

5.8 Analyse harmonique en jazz

5.9 Autres théories

5.9.1 Musique indienne

[Melakarta](#) : 72 gammes.

Exemple 5.9.1. Exemple d'utilisation du raga [Manirangu](#), is a janya raga, derived from [Kharaharapriya](#) which is 22nd on the [Melakarta](#) scale : raga [Manirangu](#)

5.9.1.1 Definition :

1) Raga Saddha Madhyana

contains C,F,G

2) Raga Prati Madhyana

contains C,F#,G

and :

Db or D or D#

Ebb or Eb or E

Ab or A or A#

Bbb or Bb or B

but with no collision.

We use lexyco order.

i.e. start with

C,Db,Ebb,F,G,Ab,Bbb,C

C,Db,Ebb,F,G,Ab,Bb,C

etc

Raga with the same first tetrachord are in the same Chakra (=family).

-> 12 Chakra, each contains 6 Raga

This gives 72 raga.

Sno	Carnatic music svara	Label	Frequency ratio	Sen
1	Shadja (Tonic)	S	1.0	1
2	Shuddha rishaba	R1	(16/15)	14
3	Chatushruthi rishaba	R2	(9/8)	15
4	Shatshruthi rishaba	R3	(6/5)	16
3	Shuddha gAndhara	G1	(9/8)	15
4	ShAdhArana gAndhara	G2	(6/5)	16
5	Anthara gAndhara	G3	(5/4)	17
6	Shuddha madhyama	M1	(4/3)	18
7	Prati madhyama	M2	(17/12)	19
8	Panchama	P	(3/2)	20
9	Shuddha daivatha	D1	(8/5)	22
10	Chatushruthi daivatha	D2	(5/3)	23
11	Shatshruthi daivatha	D3	(9/5)	24
10	Shuddha nishAdha	N1	(5/3)	23
11	Kaisika nishAdha	N2	(9/5)	24
12	KAkali nishAdha	N3	(15/8)	25

A Twelve-tone system of Carnatic mu

Interval Name(s)	Abbreviation(s)	Frequency Ratio	J (Ce
- Sa	S	1 : 1	0
- Shuddha Ri	R1	16 : 15	11
- Chathusruthi Ri or Shuddha Ga	R2 or G1	9 : 8	20
- Shatsruthi Ri or Sadharana Ga	R3 or G2	6 : 5	31
- Anthara Ga	G3	5 : 4	38
- Shuddha Ma	M1	4 : 3	49
- Prati Ma	M2	45 : 32	59
- Pa	Pa	3 : 2	70
- Shuddha Dha	D1	8 : 5	81
- Chathusruthi Dha or Shuddha Ni	D2 or N1	27 : 16	90
- Shatsruthi Dha or Kaisiki Ni	D3 or N2	9 : 5	10
- Kakali Ni	N3	15 : 8	10
- Sa	Ś	2 : 1	12

B Chromatic scale of Western music

Interval Name(s)	Abbreviation(s)	Frequency Ratio	J (Ce
- Perfect Unison	P1	1 : 1	0

Svara / Note	Hindustani name	Staff note	Western s Interval name
Sa	Shadja	C	Perfect unison
re	Shuddha rishab	D	Major second
ga	Komal gandhar	E _b	Minor third
Ma	Shuddha madhyam	F	Perfect fourth
Pa	Pancham	G	Perfect fifth
Dha	Shuddha daivat	A	Major sixth
ni	Komal nishad	B _b	Minor seventh

Note: Interval names, abbreviations, frequency ratios, and sizes in cents

5.9.2 Musique dodécaphonique, sérielle

Document sur les **signatures tonales** et modes à **transposition limité**.

Exercice 5.9.2. “Signature tonale majeur”. Dans la définition de signature tonale il y a l’hypothèse d’ensemble minimal. Considérer l’ensemble de notes C, E, F, G, B qui est la signature tonale majeur CM et démontrer qu’il est bien minimal.

Solution 5.9.3. Pour montrer que l’ensemble C, E, F, G, B est minimal, on montre que si on enlève une note alors l’ensemble obtenu appartient aussi à d’autres gammes tonales :

- E, F, G, B est aussi dans D_{\min} -mel
- C, F, G, B est aussi dans C_{\min} -mel
- C, E, G, B est aussi dans G_{maj}
- C, E, F, B est aussi dans A_{\min} -harm
- C, E, F, G est aussi dans F_{maj}

5.9.2.1 Théorème de Babbitt (1986)

Référence : voir document 1999, article de Blau.

Théorème 5.9.4. *Si on considère un ensemble de 6 notes $A \subset \{C, C\#, D, \dots B\}$ parmi les douzes notes, alors modulo l'octave, l'ensemble des intervalles de A est identique à l'ensemble des intervalles dans son complémentaire.*

5.10 Rythmes et poly-rythmes

[Isorythmie](#), voir aussi [Isorythmie sur wikipedia](#) (terme inventé par Friedrich Ludwig début XXieme), l'ancien terme est “talea-color”.

Annexe A

Logiciels pour l'acoustique musicale

A.1 Pour l'audio

Liste de logiciels pour l'audio

Applications Android gratuites conseillées pour ce cours :

- **sonomètre** : mesure l'intensité d'un son en décibels.
- **Lexis Audio Editor** : permet de visualiser le signal d'un son enregistré.
- **Spectroid** : permet de faire une transformée temps-fréquence d'un signal sonore en temps réel.

A.2 Audacity

Audacity permet l'enregistrement et l'analyse de sons.

- **TP**.
- Créer des **wave-form à la main**.
- Autre **TP** sur la transformée de Fourier avec Audacity.
- Créer des **scripts** sous audacity.

A.3 Autres

- **BaudLine** : Spectrogram
- **Sonic Visualiser**
- **FreeFem** : pour résoudre des EDP non linéaires.
- **Ecoute d'intervalles justes**
- **Analysis and creation of sounds**
- **Real-time analysis of sounds, Section 5**

Annexe B

Notions de base utiles en mathématiques

Dans ce cours on ne suppose aucune base en science. Cependant on aura besoin de quelques notions élémentaires qui sont expliquées dans cette section.

B.1 Les fractions et équations du premier degré

B.1.1 Additions et soustractions

On désigne par exemple une grandeur numérique recherchée par la lettre x . Par exemple x est le poids d'une pomme, et l'on sait que le poids du saladier est 0.8kg et on pèse au total 1kg pour le saladier qui contient la pomme. On écrit

$$x + 0.8 = 1$$

La solution est

$$x = 1 - 0.8 = 0.2 \text{ kg}$$

Plus généralement, si a, b, c sont des chiffres, on a l'équivalence suivante des équations :

$$\begin{aligned} a + b = c & \Leftrightarrow b = c - a & \Leftrightarrow a = c - b \\ \Leftrightarrow 0 = c - b - a & \Leftrightarrow 0 = a + b - c \end{aligned}$$

Exercice B.1.1. Vérifiez ces équations avec les valeurs $a = 3, b = 2, c = 5$.

B.1.2 Multiplication et divisions

On désigne par exemple une grandeur numérique recherchée par la lettre x . Par exemple x est le poids d'une pomme, et l'on sait que 10 pommes pèsent 2kg. On écrit

$$10 \times x = 2 \text{ ou } 10x = 2.$$

La solution est

$$x = \frac{2}{10} = 0.2 \text{ kg}$$

Plus généralement, si a, b, c sont des chiffres non nuls, on a l'équivalence suivante des équations :

$$ab = c \Leftrightarrow b = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a = \frac{c}{b} \Leftrightarrow 1 = \frac{c}{ab} \Leftrightarrow 1 = \frac{ab}{c}$$

Exercice B.1.2. Vérifiez ces équations avec les valeurs $a = 3, b = 2, c = 6$.

Notations de puissance :

$$x^2 = x \times x, \quad x^3 = x \times x \times x, \quad \text{etc}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{-2} = \frac{1}{x \times x} = \frac{1}{x^2}, \quad \text{etc}$$

Par commodité, $x^0 = 1$. Quand on écrit x^n , l'entier n s'appelle l'**exposant**.

B.2 Exposants, logarithme et décibels

On présente quels notions importantes pour la suite. Cela peut concerner toute sorte de grandeur physique.

Dans le tableau suivant on a écrit sur la première ligne différentes valeurs d'une grandeur x . Par exemple $x = 100$.

Sur la deuxième ligne, on écrit cette même valeur avec un **exposant**, par exemple $x = 10^2$. La troisième ligne donne la valeur de l'exposant, aussi appelé le **logarithme** de x et noté $\text{Log}_{10}(x)$. Par exemple $\text{Log}_{10}(100) = 2$. La dernière ligne est appelée décibels, c'est seulement l'exposant multiplié par 10, i.e.

$$\text{dB}(x) = 10 \times \text{Log}_{10}(x)$$

Par exemple $\text{dB}(100) = 20$.

Valeurs de x et opérations :	...	$\times 10$	0.1	$\times 10$	1	$\times 10$	10	$\times 10$	100	$\times 10$	1000	...
écriture de x avec l'exposant			$= 10^{-1}$		$= 10^0$		$= 10^1$		$= 10^2$		$= 10^3$	
$\text{Log}_{10}(x)$: exposant ou logarithme (en base 10)			-1		0		1		2		3	
$\text{dB}(x) = 10 \text{Log}_{10}(x)$: décibel			-10		0		10		20		30	

Remarque B.2.1. Sur la ligne de x on passe d'une colonne à la suivante de droite en multipliant par 10. Donc on passe à la colonne de gauche en divisant par 10. Alors dans sur la ligne des logarithme (et des décibels) on passe d'une colonne à la suivante de droite en ajoutant 1 (ou ajoutant 10 pour les décibels). Cette remarque montre que **la fonction logarithme transforme les opérations multiplication en addition**. C'est l'intérêt essentiel de cette fonction. Par exemple $3 = \text{Log}_{10}(100 \times 10) = \text{Log}_{10}(100) + \text{Log}_{10}(10) = 2 + 1$. On retiendra que pour tout nombre positif x, y ,

$$\text{Log}_{10}(x \times y) = \text{Log}_{10}(x) + \text{Log}_{10}(y).$$

Remarque B.2.2. Concernant le **cas particulier où on mesure une puissance sonore** p , le décibel est utilisé de sorte à ce que 0 décibels correspond à une puissance de référence, qui est la limite de l'in audible (i.e. très faible), et correspond à la valeur $p_0 = 10^{-12}W/m^2$. Pour une puissance sonore quelconque p on notera alors $x = \frac{p}{p_0}$ (sans unité) de sorte que $\text{dB}\left(\frac{p_0}{p_0}\right) = \text{dB}(1) = 0$. Ajouter +1dB correspond alors au seuil de perception du changement de puissance. Il apparaît que $\text{dB}(x) = 120\text{dB}$ est un son très (trop) fort au seuil de la douleur, qui est $p = 1W/m^2$.

Remarque B.2.3. Le tableau s'étend à droite et à gauche. Comme valeurs notables,

- il y a $x = 1000000 = 10^6$ appelé million, donnant $\text{Log}_{10}(x) = 6$ et $\text{dB}(x) = 60$.
- il y a $x = 1000\,000\,000 = 10^9$ appelé milliard, donnant $\text{Log}_{10}(x) = 9$ et $\text{dB}(x) = 90$.
- il y a $x = 0.000000001 = 10^{-9}$ appelé nano, donnant $\text{Log}_{10}(x) = -9$ et $\text{dB}(x) = -90$.
- Voici des noms couramment utilisés pour désigner ces exposants :

$x :$	10^{-9}	10^3	10^6	10^9	10^{12}
nom :	nano	kilo	Mega	Giga	Tera

Par exemple en informatique 2 10^9 octets se dit 2 Giga-octets (on verra une valeur plus précise plus loin).

Exercice B.2.4. Entre la puissance du son le plus fort (seuil de douleur) et le plus faible (perceptible) il y a une différence de 120dB. Quel est le rapport de puissance correspondant ?

Solution B.2.5. Le rapport est $10^{120/10} = 10^{12} = 1000$ milliard !

Exercice B.2.6. Compléter le tableau suivant

Instrument	trombone		clarinette		voix humaine		chanteur
	fortissimo		fortissimo		parlant		fortissimo
Puissance en W	5 W		0.05W		$5 \cdot 10^{-5} W$		0.05W
rapports de puissance		$\xleftarrow{\times?}$		$\xleftarrow{\times?}$		$\xrightarrow{\times?}$	
Puissance en dB	?		?		60		?

Solution B.2.7. Voici la solution :

Instrument	trombone		clarinette		voix humaine		chanteur
	fortissimo		fortissimo				fortissimo
Puissance en W	5 W		0.05W		$5 \cdot 10^{-5} W$		0.05W
rapports de puissance		$\xleftarrow{\times 100}$		$\xleftarrow{\times 1000}$		$\xrightarrow{\times 1000}$	
Puissance en dB	110		90		60		90

Remarque B.2.8. La fonction $x \rightarrow \text{Log}_{10}(x)$ n'est pas restreinte à $x = 1, 10, 100, \dots$ mais s'étend à toutes les valeurs intermédiaires. Par exemple $\text{Log}_{10}(2) = 0.301\dots$ Sur une calculatrice, c'est la touche **Log**. Dans le moteur de recherche google, écrire $\text{Log}(2)$ par

exemple. On définit toujours les décibels par $\text{dB}(x) = 10\text{Log}_{10}(x)$. Voici une table avec quelques valeurs intermédiaires.

x	1	2	3	5	10
$\text{Log}_{10}(x)$	0	0.30	0.47	0.70	1
$\text{dB}(x)$	0	3	4.7	7	10

Exercice B.2.9.

1. Une clarinette jouant fort émet un son à 90dB. Quel est le niveau sonore de 2 clarinettes (en dB) ?
2. Un trombone jouant fort est à 110dB. Combien faut-il de clarinettes jouant fort pour avoir la même puissance ?

Solution B.2.10.

1. Le niveau sonore de 2 clarinettes est $90 + \text{dB}(2) = 90 + 3 = 93\text{dB}$
2. On cherche le nombre n de clarinettes tel que

$$90 + \text{dB}(n) = 110 \Leftrightarrow \text{dB}(n) = 110 - 90 = 20$$

donc $n = 100$.

Remarque B.2.11. Quelques formules utiles à savoir sur la fonction $x \rightarrow \text{Log}(x)$. Pour $x, y > 0$, on a

$$\text{Log}(xy) = \text{Log}(x) + \text{Log}(y) \quad (\text{B.2.1})$$

$$\text{Log}(x^y) = y\text{Log}(x)$$

B.3 Le cercle, sinus et décomposition de Fourier

Bien que peu présent dans la nature, le **cercle** est un concept fondamental en science.

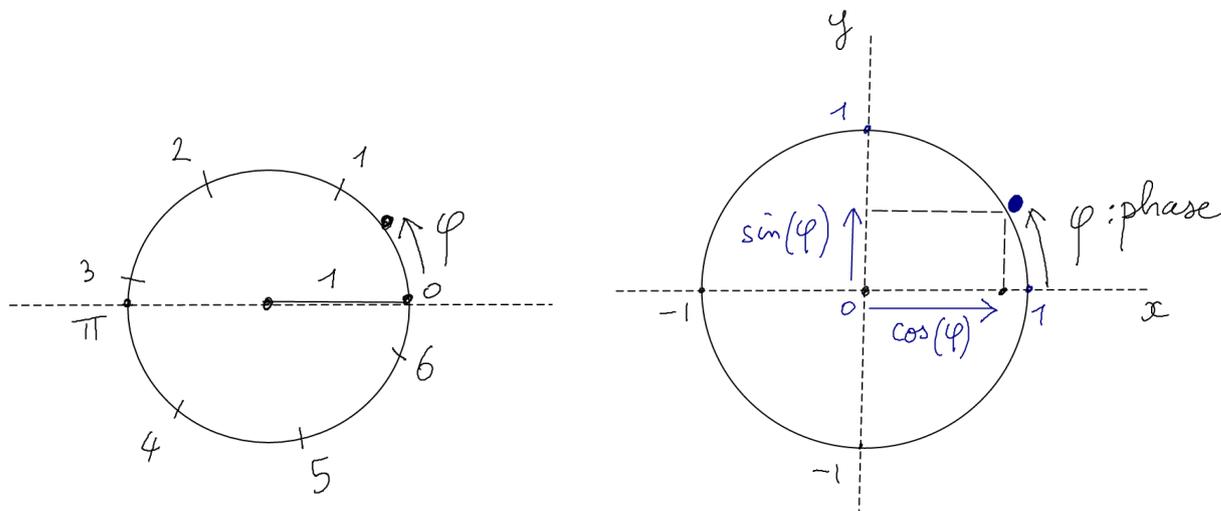
(Dans la nature, on observe rarement des formes quasiment circulaires : silhouette du soleil ou de la pleine lune, arc en ciel, ronds dans l'eau,... ?)

B.3.1 Phase, sinus, cosinus

Définition B.3.1. Sur un cercle, l'angle ou **phase** φ en **radian** est la longueur d'arc mesurée en unité de rayon. En particulier le nombre pi est

$$\pi := \frac{1}{2} \text{circonférence} \approx 3.14\dots$$

La projection sur l'axe x s'appelle $\cos \varphi$ (**cosinus** de φ) et la projection sur l'axe y s'appelle $\sin \varphi$ (**sinus** de φ).

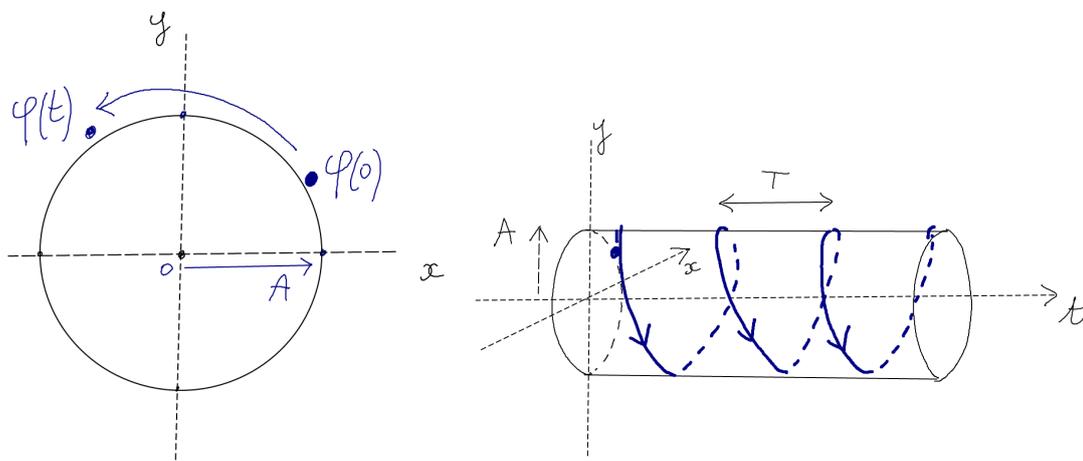


Exercice B.3.2. Donner les valeurs de $\cos(0)$, $\sin(0)$, $\cos(\pi/2)$, $\sin(\pi/2)$, $\cos(\pi)$, $\sin(\pi)$.

B.3.2 Mouvement circulaire

Définition B.3.3. Un **mouvement circulaire uniforme** est un point qui bouge sur un cercle à vitesse constante. Ce mouvement est caractérisé par :

- sa **période** T qui est le temps en sec. pour faire un tour ou la **fréquence** qui est $f = 1/T$, (nombre de tours par seconde en $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$). La **fréquence est positive** (respect. **négative**) si le mouvement est dans le sens direct, i.e. anti-horaire, (respect. indirect, i.e. sens horaire).
- l'**amplitude** $A > 0$ qui est le rayon du cercle.
- la **phase** φ_0 au départ (à la date $t = 0$).

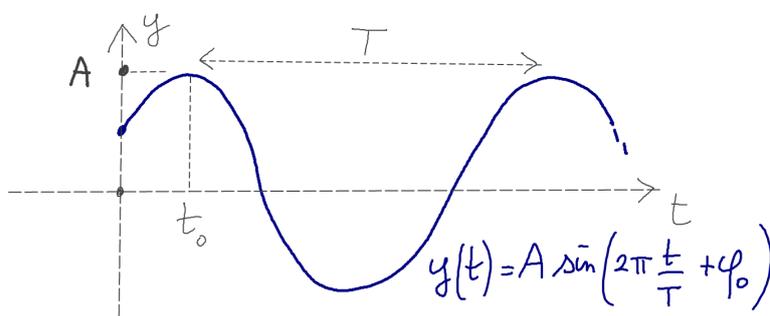


Remarque B.3.4. On note aussi $\omega = 2\pi f$ la vitesse angulaire (en radian par seconde).

Exemple B.3.5. Pour $f = 2\text{Hz}$, $T = \frac{1}{f} = 0.5\text{ s.}$, $\omega = 2\pi \times 2\text{Hz}$.

Exemple B.3.6. (Le diapason) Pour $f = 440\text{Hz}$, $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{440}\text{ s.} = 0.0022\text{ s.} = 2,2\text{ ms.}$ C'est "très rapide".

Proposition B.3.7. On déduit que la composante du mouvement circulaire ci-dessus sur l'axe y a une *forme sinusoidale* :



La formule précise est :

$$y(t) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0\right) = A \sin(2\pi ft + \varphi_0)$$

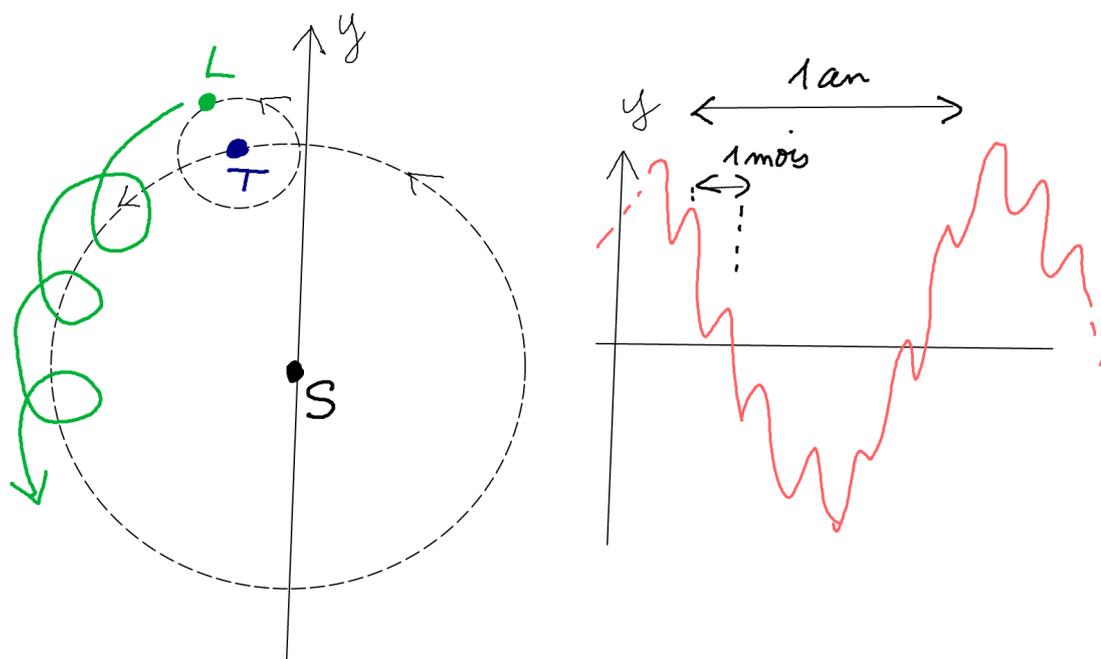
Remarque B.3.8. Pour se convaincre de la forme sinusoidale, observer un **tire-bouchon** de côté.

Remarque B.3.9. La phase φ_0 est reliée à la date t_0 du maximum par $\sin\left(2\pi \frac{t_0}{T} + \varphi_0\right) = \sin \frac{\pi}{2}$ donc $\varphi_0 = -2\pi \frac{t_0}{T} - \frac{\pi}{2}$.

B.3.3 Addition de mouvements circulaires, épicycles et décomposition de Fourier

Exemple B.3.10. la **Terre** a un **mouvement circulaire autour du soleil**, de période $T_1 = 365.25$ jours et rayon $A = 145 \cdot 10^6 \text{ km}$ et la **lune** a un **mouvement circulaire** autour du soleil, de période $T_2 = 27.3$ jours et rayon $A = 0.4 \cdot 10^6 \text{ km}$.

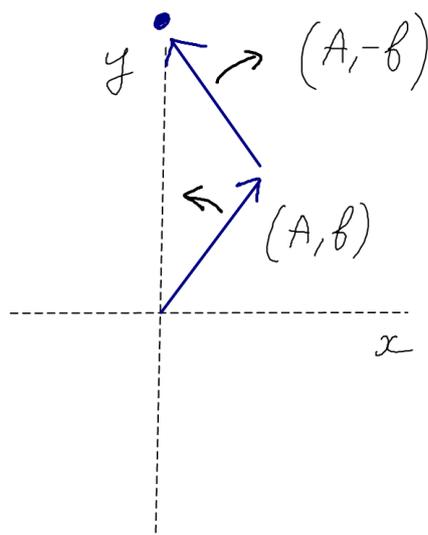
— On déduit que la trajectoire de la lune par rapport au soleil est la somme de ces deux mouvements circulaires et n'est pas périodique (car $\frac{T_1}{T_2} = 13.38\dots$ n'est pas un entier ni un rationnel). De là vient la difficulté des calendriers basés sur l'orbite terrestre soleil ou sur le mois lunaire (calendrier arabe) (Attention, le dessin n'est pas à l'échelle)



- Voir [cette animation de l'orbite lunaire](#)
- De la valeur $\frac{T_1}{T_2} - 1 = 12.38 \dots$ on déduit qu'il y a un peu plus de 12 pleines lunes par an, montrant l'importance du chiffre 12 dans l'histoire ancienne. (l'importance du chiffre 7 vient qu'il y a 7 astres non fixes dans le ciel : lune (lundi), mars (mardi), mercure (mercredi), jupiter (jeudi), venus (vendredi), saturne (samedi), soleil (dimanche, sunday).

Exercice B.3.11. (Difficile) A partir des périodes T_1, T_2 ci-dessus, déduire la période d'un mois synodique (par rapport au soleil) et le nombre de mois lunaires par an.

Exemple B.3.12. La superposition de deux mouvements circulaires de même amplitude A mais fréquences f et $-f$ (égales et opposée), (et phase à l'origine nulle, $\varphi_0 = 0$), est un mouvement selon l'axe y , sinusoïdale de fréquence f et amplitude $2A$.

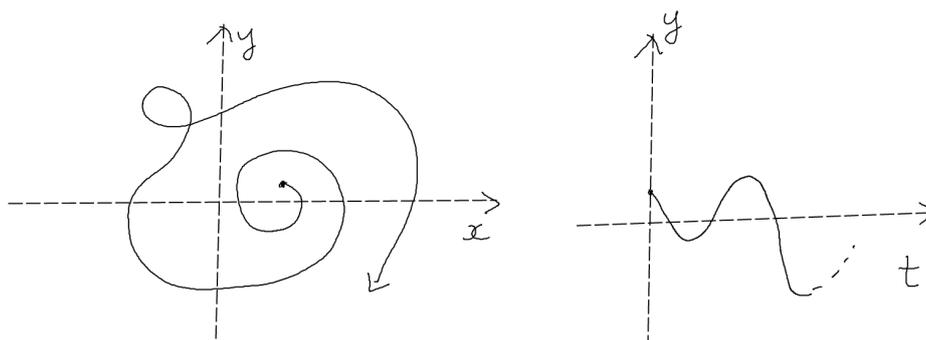


Exercice B.3.13. Faire l' [exercice](#) de ce lien.

Dans l'histoire des sciences il y a une longue histoire sur l'étude de l'addition des mouvements circulaires. On peut citer les études des [épicycles](#) par les grecs, les [Travaux de Al Din Al Touzi](#) au XIXème siècle en perse.

Une étape très importante est le [théorème de Fourier](#) obtenu par Joseph Fourier en 1811 à grenoble :

Théorème B.3.14. (Fourier 1811) *Tout mouvement $x(t), y(t)$ dans le plan se décompose de façon unique comme la superposition de mouvements circulaires, de différentes fréquences f , amplitudes A et phases à l'origine φ_0 .*



Voir ces [illustrations](#).

Remarque B.3.15. La [transformée de Fourier](#) fournit une formule pour obtenir cette décomposition en mouvements circulaires.

B.3.4 Cas particulier d'un mouvement périodique (série de Fourier)

En musique, on s'intéresse particulièrement aux **signaux périodiques**, car donnant un son "harmonieux" à la perception.

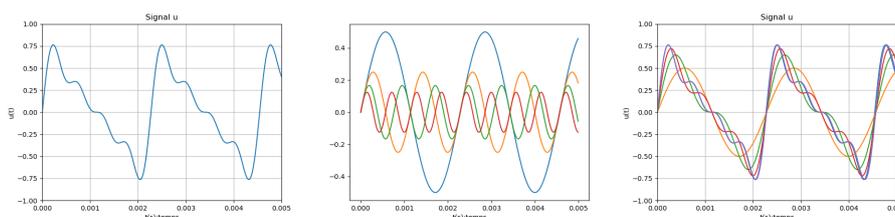
Remarque B.3.16. La justification du terme "harmonique" en musique est que l'on perçoit les signaux périodiques comme "harmonieux" et remonte peut être à l'ouvrage de Kepler **Harmonices Mundi** "L'Harmonie du monde" 1619 où il relie (sans trop de raison scientifique) musique et orbites planétaires.

Remarquer qu'un mouvement circulaire de période T ou $\frac{1}{2}T$ ou $\frac{1}{3}T$ etc est à fortiori de période T .

Théorème B.3.17. Inversement d'après le Théorème de Fourier ci-dessus, tout signal périodique de période T se décompose de façon unique comme la superposition de mouvements circulaires de périodes $\frac{1}{n}T$ avec $n = 1, 2, 3, \dots$ appelé **numéro de l'harmonique**. En terme de fréquence, $f = \frac{1}{T}$ est la fréquence fondamentale du signal périodique et la **fréquence de l'harmonique** $n \geq 1$ est $\frac{n}{T} = nf$, donnant la suite :

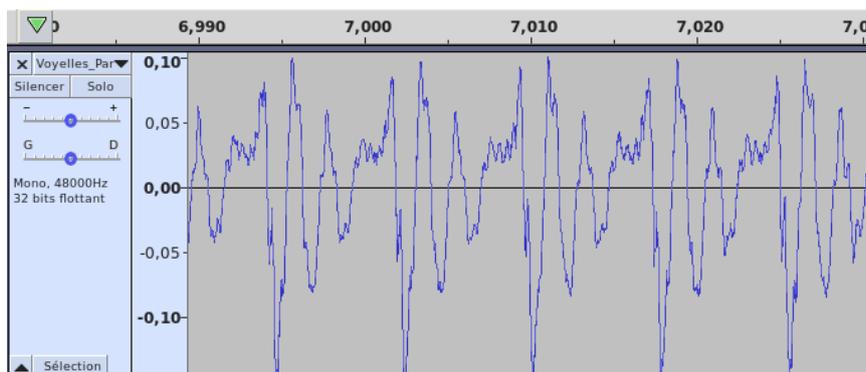
$$f, 2f, 3f, 4f, \dots$$

Exemple B.3.18. Sur la première figure, voici un signal $y(t)$ obtenu comme somme de quatre fonctions sinus $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, $u_4(t)$ de période respectives T , $\frac{1}{2}T$, $\frac{1}{3}T$, $\frac{1}{4}T$ avec $n = 1, 2, 3, 4$ représentées en couleur sur la 2eme figure. La 3eme figure montre les sommes partielles u_1 , $u_1 + u_2$, $u_1 + u_2 + u_3$, etc pour observer la reconstruction du signal. En rajoutant des harmoniques convenables $n = 5, 6, \dots$ etc on peut obtenir un signal en "**dent de scie**" à la limite.



Exemple B.3.19. Avec le [programme suivant en javascript](#), vous pouvez changer de façon interactive les amplitudes A_n et phases φ_n et écouter le son résultant. Remarquer que si on change les phases, le signal change fortement, mais à l'écoute on ne perçoit aucun changement.

Exercice B.3.20. Voici un signal [Voyelles_Par_Malik.wav](#) qui est le son d'une voyelle "A". On mesure que la période est $T = 0.0625$. Quelles sont les fréquences des harmoniques ?



Solution B.3.21. La fréquence est $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.0625} = 160\text{Hz}$. Les fréquences des harmoniques sont alors :

$$f = 160\text{Hz}, \quad 2f = 320\text{Hz}, \quad 3f = 480\text{Hz}, \quad 4f = 640\text{Hz}, \quad \text{etc}$$

B.4 Codage des nombres en base 2 (binaire) et base 16 (hexadécimal)

Voir [système binaire](#) sur wikipedia.

B.4.1 La base 10 (décimale)

On rappelle qu'en base 10, qui est la base usuelle, on a 10 symboles disponibles : 0, 1, 2, ..., 9 et que les nombres entiers sont écrits de la façon suivante :

$$0, 1, 2, \dots, 9, 10, 11, 12, \dots, 19, 20, 21, \dots$$

Définition B.4.1. La règle est d'incrémenter la colonne de gauche lorsque l'on arrive au dernier symbole 9.

Exercice B.4.2. En base 10, combien d'entiers différents peut-on écrire avec $B = 3$ cases et un chiffre dans chaque case ?

Solution B.4.3. On peut écrire les entiers de $0 = 000$ à 999 , ce qui fait $1000 = 10^3$ entiers différents. Plus généralement avec B cases, on peut écrire 10^B entiers différents.

B.4.2 La base 2 (binaire)

De la même façon, en base 2 on a 2 symboles disponibles, par exemple 0, 1. Selon la même règle [B.4.1](#), les nombres entiers sont écrits de la façon suivante :

$$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, \dots$$

Exercice B.4.4. En base 2, combien d'entiers différents peut-on écrire avec $B = 3$ cases

--	--	--

 et un chiffre dans chaque case ?

Solution B.4.5. On peut écrire les entiers de $0 = 000$ à 111 , ce qui fait $8 = 2^3$ entiers différents. Plus généralement avec B cases, appelé **nombre de bits**, on peut écrire 2^B entiers différents.

Remarque B.4.6. On rappelle qu'un **octet** correspond à 8 bits (i.e. 8 cases).

B.4.3 Le complément à 2

En base 2, avec un certain nombre de cases B fixé (nombre de bits), si on souhaite aussi **écrire des entiers négatifs**, on convient d'utiliser la première case pour le signe : 0 signifie positif et 1 signifie négatif. Par exemple avec $B = 3$ cases : on aura

entier	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3
code en base 2	100	101	110	111	000	001	010	011

- Remarquer que pour obtenir la deuxième ligne, on part de 0 et on remplit le tableau de façon croissante et circulaire.
- Plus généralement, avec B cases, on code les entiers de $-\frac{2^B}{2} = -2^{B-1}$ à $\frac{2^B}{2} - 1 = 2^{B-1} - 1$.
- L'avantage de cette convention est que l'opération d'addition est inchangée, par exemple pour calculer $+3 - 2$ on effectue en base 2 : $011 + 110$ ce qui donne 1001 , mais en fait 001 car on a que $B = 3$ cases. Le résultat est donc $+1$.

B.4.4 La base 16 (hexadécimale)

En base 16 on doit utiliser 16 symboles différents. La convention du **système hexadécimal** est d'utiliser dans l'ordre :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f$$

et on peut écrire les entiers en utilisant la règle B.4.1. Comme $16 = 2^4$, il y a un avantage à utiliser la base 16 en informatique car ces 16 symboles sont codés avec 4 bits en base 2 :

base 16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
base 2	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Ainsi un octet qui est 8 bits correspond à deux symboles en bases 16. On rappelle que deux symboles (x_1, x_2) en base 16 encodent le nombre $x_1 \times 16 + x_2$. Par exemple :

base 16	10	a0	ff
base 2	0001 0000	1010 0000	1111 1111
base 10	16	160	255

Annexe C

Formulaire

C.1 Arithmétique

C.1.1 Théorème fondamentale de l'arithmétique

Théorème C.1.1 (**Théorème fondamentale de l'arithmétique**(Euclide, livre VII).).
Tout *entier* $a \in \mathbb{N}$ se décompose de façon unique

$$a = 2^{n_2} 3^{n_3} 5^{n_5} 7^{n_7} \dots = P^n$$

avec $P = (2, 3, 5, 7, 11, \dots)$ la suite des nombre premiers et $n = (n_2, n_3, n_5, \dots) \in \mathbb{N}^P$ des exposants entiers, i.e. $n_p \geq 0$ pour $p \in P$.

Tout **nombre rationnel positif** $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^+$ se décompose de façon unique

$$r = 2^{n_2} 3^{n_3} 5^{n_5} 7^{n_7} \dots = P^n$$

avec $n = (n_2, n_3, n_5, \dots) \in \mathbb{Z}^P$ des exposants entiers relatifs, i.e. $n_p \in \mathbb{Z}$ pour $p \in P$.

Par exemple

$$12 = 2^2 3^1 5^0 7^0 \dots = P^n, \quad n = (2, 1, 0, \dots) \in \mathbb{N}^P$$

$$\frac{6}{5} = 2^1 3^1 5^{-1} 7^0 \dots = P^n, \quad n = (1, 1, -1, 0, \dots) \in \mathbb{Z}^P$$

C.1.2 Représentations géométriques des fractions irréductibles

Dans cette Section, on propose différentes façons de représenter une fraction rationnelle $a/b \in \mathbb{Q}$. Chacune peut avoir son intérêt en musique.

C.1.2.1 Verger d'Euclide

On peut construire les fractions irréductible $a/b \in \mathbb{Q}$ de la façon suivante, appelée **verger d'Euclide**.

Il est naturel de représenter un nombre rationnel positif a/b par un point (a, b) sur le réseau $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. La valeur numérique $a/b \in \mathbb{R}$ correspond à la pente de la droite passant par (a, b) . Partant de l'origine, le premier couple¹ (a, b) que cette droite correspond à une **fraction irréductible**. Voir figure C.1.1.

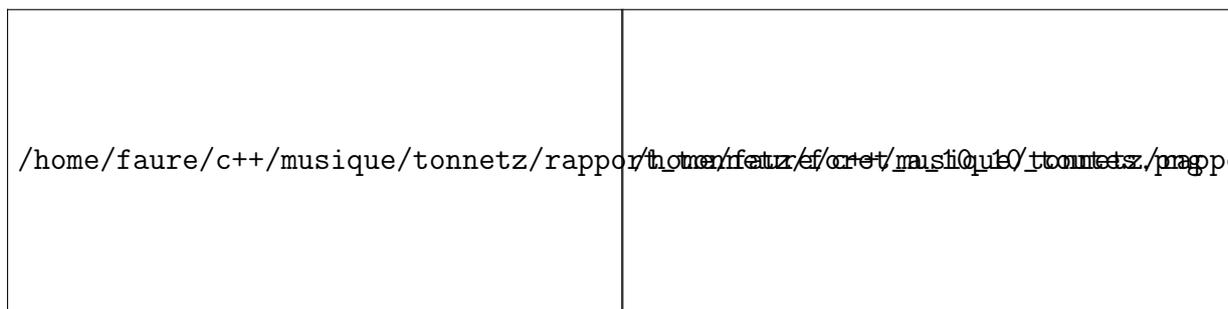


FIGURE C.1.1 – (a) Le verger d'Euclide. En termes imagés, considérons un verger où tous les arbres sont plantés alignés sur un réseau infini. On repère chaque arbre par ses coordonnées (a, b) par rapport à un arbre (arbitraire) d'origine $(0, 0)$. Supposons que l'on se place en $(0, 0)$ à la place de l'origine et que l'on observe les autres arbres autour de nous. On en voit une infinité, mais certains arbres (les gros points) en cachent d'autres (les petits points). Les gros points correspondent aux « fractions irréductibles » a/b et cachent les petits points qui correspondent aux « fractions réductibles ». Par exemple $(1, 1)$ cache $(2, 2)$ et $(3, 3)$ etc. De même $(2, 1)$ cache $(4, 2)$ et $(3, 2)$ cache $(6, 4)$. Dans la littérature, cette forêt s'appelle le **verger d'Euclide**.

(b) : même image à plus grande échelle.

C.1.2.2 La fractale de Farey, de Thomae

Le schéma suivant montre des traits rouges, qui en abscisse, sont les **rapports de fréquences** $\frac{f_2}{f_1} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ dans l'intervalle $[1, 2]$, et en ordonnée leur « résonance » $R(a/b) := -\log(a.b)$. On représente aussi en bleu la **gamme tempérée** ou **tempérament égal**, (utilisée pour les instruments occidentaux) :

Cela forme une **fractale** (appelée fractale de Farey ou de Thomae).

1. Remarquer que si la droite passe par (a, b) et si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est un entier, alors $\frac{na}{nb} = \frac{a}{b}$ donc la droite passe aussi par (na, nb) .

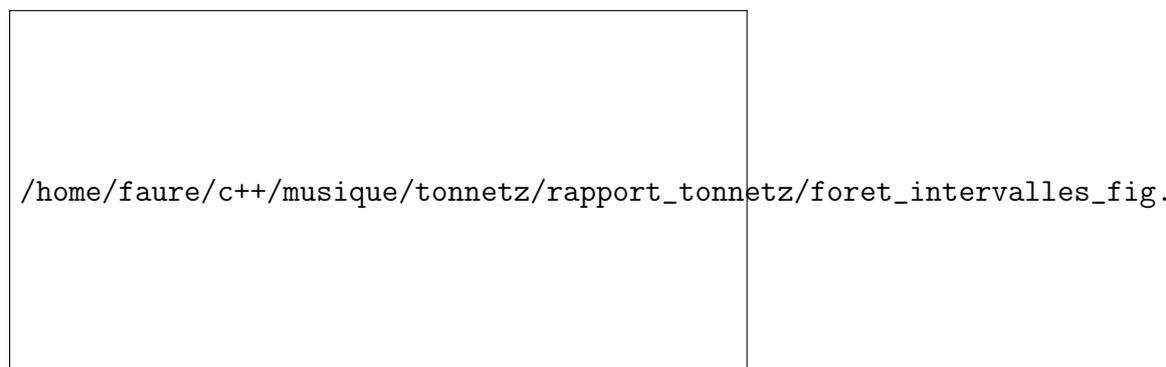


FIGURE C.1.2 – Les points noirs aux coordonnées (a, b) entières correspondent aux fractions a/b irréductibles. Les traits rouges sont les droites de pente 2^k avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela correspond aux intervalles d’octave. Les traits bleus sont les droites de pente $2^{k/12}$, correspondant aux intervalles de $1/2$ ton. On a associé un nom aux fractions les plus simples et situées dans la première octave : $1/1$ (unisson) $2/1$ octave, $3/2$ quinte, $4/3$ quarte, $5/3$ sixte, $5/4$ tierce majeure, etc



FIGURE C.1.3 – Plafond de l’aéroport de Shanghai (juin 2019). Les tiges blanches sont placées sur un réseau carré régulier. En perspective, on observe les mêmes alignements que dans le verger d’Euclide ou dans la fractale de Thomae des fractions irréductibles. Deuxième figures : ceps, plans de vignes à Kerdonis (Belle île en mer).

Cercles d’Appolonius On peut représenter les fractions $a/b \in \mathbb{Q}$ de la façon suivante appelée cercles d’appolonius :

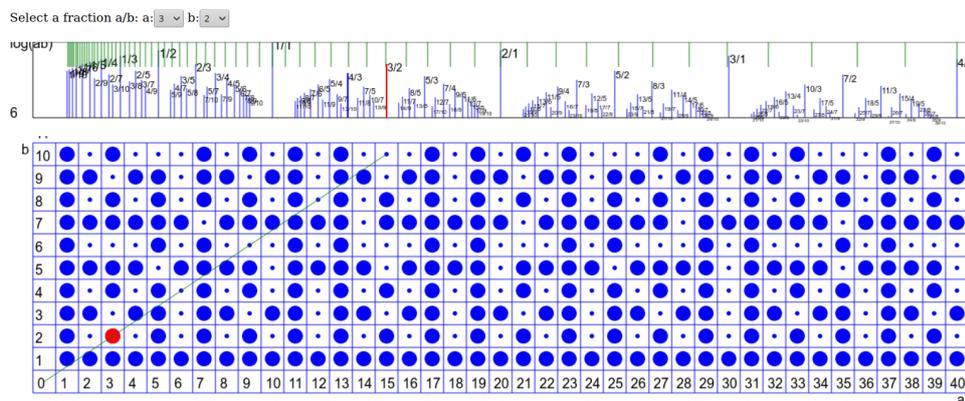
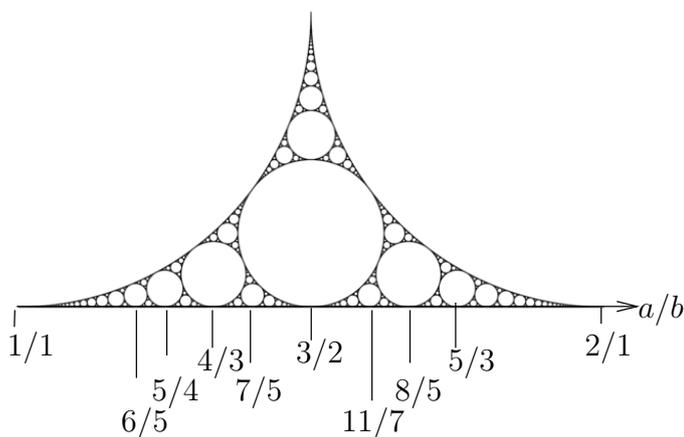
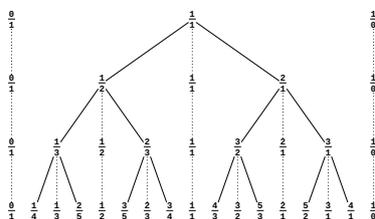


FIGURE C.1.4 – Relation entre le **verger d’Euclide** et la **fractale de Farey** : dans le plan inférieur, on relie par une droite (en vert) l’origine $(0, 0)$ à un point (a, b) (ici $(3, 2)$ en rouge). On associe un trait (en rouge) sur l’axe supérieur, à l’abscisse $x = \frac{a}{b}$ et de hauteur $-\log(ab)$ si $\frac{a}{b}$ est irréductible. Cela donne l’apparence de la forêt d’Euclide perçue depuis le point origine.



Arbre de Stern Brocot On peut construire les fractions $a/b \in \mathbb{Q}$ de la façon suivante, appelée **arbre de Stern Brocot**.



On part des fractions $\frac{a}{b} = 0/1 = 0$ et $\frac{a'}{b'} = 0/1 = \infty$. A l’étape suivante, on insère entre elle la fraction $\frac{a+a'}{b+b'} = \frac{1}{1}$. Et on répète le processus.

Les propriétés sont que à chaque étape,

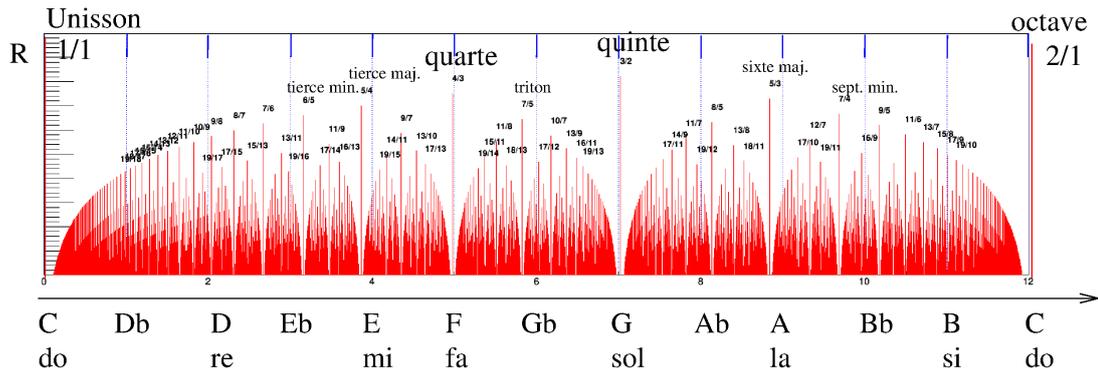


FIGURE C.1.5 – Fractale de Farey (ou Thomae) des nombres rationnels $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (irréductibles). On a $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ en abscisse et la **résonance** $R := -\ln(ab)$ en ordonnée.

1. Si $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ sont deux fractions consécutives alors
 - (a) $a'b - ab' = 1$
 - (b) On a $\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}$ et les trois fractions sont irréductibles.
2. On obtient ainsi toutes les fractions irréductibles.

C.1.3 Réseau \mathbb{Z}^P et le réseau tonnetz

D'après le théorème C.1.1, tout nombre rationnel $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ se représente de façon unique par un point $n \in \mathbb{Z}^P$, c'est à dire que

$$n = (n_2, n_3, n_5, \dots) \in \mathbb{Z}^P$$

sont les exposants dans l'écriture $r = \frac{a}{b} = 2^{n_2} 3^{n_3} 5^{n_5} 7^{n_7} \dots = P^n$.

C.2 Rappels d'algèbre linéaire

Afin d'analyser les signaux ou fonctions $u(t)$ il est utile de considérer l'espace des fonctions comme un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Ce point de vue est un peu abstrait mais permet d'obtenir une bonne compréhension des phénomènes ondulatoires en général. Il est à la base de l'analyse de Fourier.

C.2.1 Vecteurs et produit scalaire

Dans l'espace \mathbb{R}^N , considérons deux vecteurs $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ et $v = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$. Ce sont par exemple des signaux échantillonnés. Voici les deux opérations élémentaires qui définissent l'espace comme un **espace vectoriel**. La **somme** est

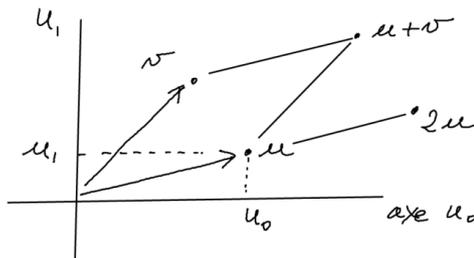
$$u + v = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \dots).$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est un nombre alors le **produit extérieur** est

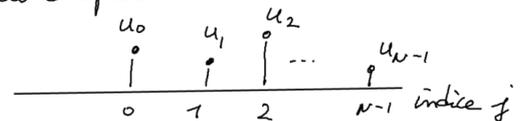
$$\lambda u = (\lambda u_0, \lambda u_1, \dots, \lambda u_{N-1}).$$

Remarquer que la représentation graphique des vecteurs est facile seulement en dimensions $N = 1, 2, 3$. Au delà, on peut représenter un vecteur comme une fonction (ou signal).

• en dimension $N=2$, dans \mathbb{R}^2 :



• autre représentation:



Ensuite, le **produit scalaire Euclidien** entre u et v est

$$\langle u|v \rangle := \overline{u_0}v_0 + \overline{u_1}v_1 + \dots + \overline{u_{N-1}}v_{N-1} \quad (\text{C.2.1})$$

où $\overline{u_j}$ est le complexe conjugué si le signal est à valeur complexes².

Rappelons que la **norme** $\|u\|$ d'un vecteur u est définie par

$$\|u\|^2 = |u_0|^2 + |u_1|^2 + \dots + |u_{N-1}|^2 = \langle u|u \rangle$$

et l'**angle** $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ entre deux vecteurs u, v est défini par

$$\cos \alpha = \frac{|\langle u|v \rangle|}{\|u\| \|v\|} \quad (\text{C.2.2})$$

Pour des fonctions (ex : signaux à temps continu) $t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \in \mathbb{C}$, on remplace la somme par une intégrale pour définir le produit scalaire, appelé **produit scalaire** L^2 :

$$\langle u|v \rangle := \int \overline{u(t)}v(t) dt \quad (\text{C.2.3})$$

Ainsi la **norme** L^2 est

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt$$

et s'interprète comme l'**énergie totale** du signal (donc $|u(t)|^2$ est la densité d'énergie en temps ou la **puissance**).

2. Même si les signaux physiques sont réels, il est pratique d'utiliser de manipuler des signaux à valeurs complexes pour la raison que les valeurs propres d'une matrice réelle sont parfois complexes. Voir section C.3.0.1.

Remarque C.2.1. Si on considère une fonction $t \in [0, D] \rightarrow u(t)$ échantillonnée avec un pas de temps $\delta > 0$, cela donne un vecteur avec $N = \frac{D}{\delta}$ valeurs (u_0, u_1, \dots, u_N) . Alors à la limite $N \rightarrow \infty$ (ou $\delta \rightarrow 0$), le produit scalaire (C.2.1) tend vers (C.2.3), à condition de rajouter le facteur δ :

$$\langle u|v \rangle_\delta := \delta (\overline{u_0}v_0 + \overline{u_1}v_1 + \dots + \overline{u_{N-1}}v_{N-1}) \quad (\text{C.2.4})$$

Exercice C.2.2. Soient $u = (1, -1)$, $v = (1, 1)$ dans \mathbb{R}^2 . Calculer $\|u\|$, $\|v\|$, $\langle u|v \rangle$ et l'angle α entre u et v . De même pour $u = (1, -1, 0, 0)$ et $v = (0, 0, 1, 1)$ dans \mathbb{R}^4 .

Remarque C.2.3. Avec l'exercice précédent, remarquer que si les vecteurs u, v ont des supports différents, cad que pour tout j , $u_j = 0$ ou $v_j = 0$ alors de façon évidente $\langle u|v \rangle = 0$. Mais on peut avoir $\langle u|v \rangle$ comme dans le premier exemple, si u, v oscillent de façons différentes. Cela est fondamentale dans l'analyse de Fourier, ou dans l'analyse des fonctions par paquets d'ondes (ou par ondelettes),

C.2.2 Interprétation et utilité du produit scalaire

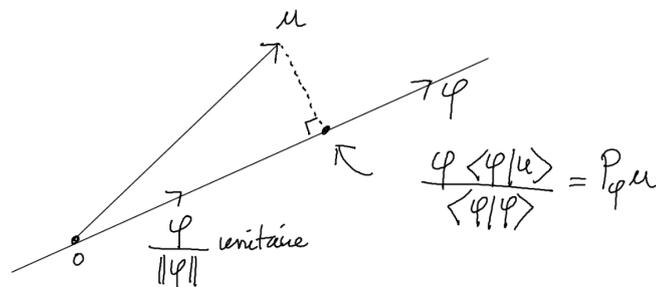
Le sens pratique et physique du produit scalaire est donc de pouvoir comparer les fonctions (ex : signaux) entre elles :

- Si l'angle est très petit $\alpha \approx 0$, cela signifie que les deux signaux sont presque colinéaires donc presque semblables.
- Au contraire si $\alpha \approx \frac{\pi}{2}$, les deux signaux sont orthogonaux, autrement dit très différents.

On peut utiliser le produit scalaire pour approximer un vecteur u à partir de vecteurs $(\varphi_j)_j$ connus. C'est ce que l'on fait en théorie du signal (et plus généralement en analyse fonctionnelle). Voici une formule très utile.

Proposition C.2.4. Si φ est un vecteur donné quelconque et non nul et u un autre vecteur, montrer que la **projection orthogonale de u sur l'axe de φ** notée $P_\varphi u$ est obtenue par l'opérateur

$$P_\varphi : u \rightarrow P_\varphi u = \frac{\langle \varphi|u \rangle}{\langle \varphi|\varphi \rangle} \varphi \quad (\text{C.2.5})$$



Démonstration. Posons $v = \frac{\langle \varphi|u \rangle}{\langle \varphi|\varphi \rangle} \varphi$. Ce vecteur est bien colinéaire à u . De plus pour vérifier que c'est la projection orthogonale, on vérifie que la projection de la différence $u - v$ est nulle :

$$\begin{aligned} \langle u - v|v \rangle &= \langle u|v \rangle - \langle v|v \rangle \\ &= \frac{\langle \varphi|u \rangle}{\langle \varphi|\varphi \rangle} \langle u|\varphi \rangle - \frac{\langle u|\varphi \rangle \langle \varphi|u \rangle}{\langle \varphi|\varphi \rangle \langle \varphi|\varphi \rangle} \langle \varphi|\varphi \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Remarque C.2.5. Si le vecteur φ est unitaire, i.e. $\|\varphi\| = 1$, $\langle \varphi|\varphi \rangle = 1$ alors on a l'expression un peu plus simple $P_\varphi u = \varphi \langle \varphi|u \rangle$. En physique quantique, on utilise la **notation de Dirac** $|\varphi\rangle = \varphi$. Le résultat précédent s'écrit $P_\varphi u = \frac{|\varphi\rangle \langle \varphi|u \rangle}{\langle \varphi|\varphi \rangle}$ ou $P_\varphi = \frac{|\varphi\rangle \langle \varphi|}{\langle \varphi|\varphi \rangle}$.

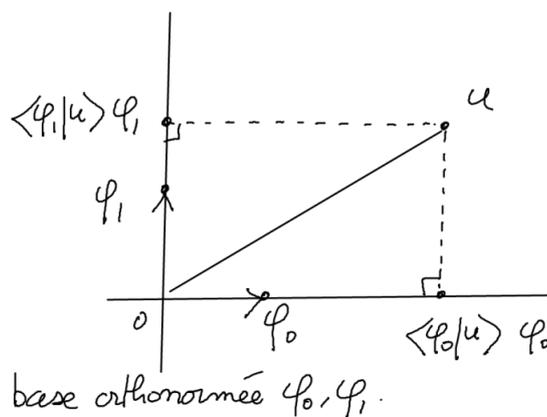
C.2.3 Décomposition dans une base orthogonale

Exercice C.2.6. En dimension finie, si $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$ forme un ensemble de vecteurs orthogonaux (donc axes orthogonaux) montrer que tout vecteur u se décompose comme superposition de ses projections sur chaque axe :

$$u = \sum_{j=0}^{N-1} P_{\varphi_j} u$$

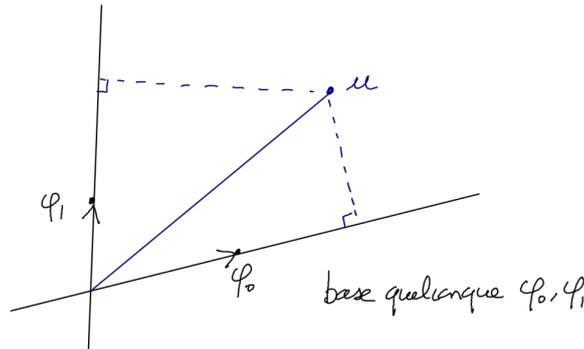
avec $P_{\varphi_j} u = \frac{\varphi_j \langle \varphi_j|u \rangle}{\langle \varphi_j|\varphi_j \rangle}$. En particulier si les vecteurs $(\varphi_j)_j$ sont orthonormés alors

$$u = \sum_{j=0}^{N-1} \langle \varphi_j|u \rangle \varphi_j \tag{C.2.6}$$



C.2.4 Décomposition dans une base non orthogonale

En théorie du signal il est très utile de pouvoir exprimer un vecteur u à partir de des composantes $\langle \varphi_j | u \rangle$ même si les vecteurs $(\varphi_j)_j$ ne sont pas orthogonaux entre eux. Par exemple on a vu dans l'exercice ?? que les paquets d'ondes ne sont pas orthogonaux entre eux (ils le deviennent si les paramètres sont très différents). Il y a une formule simple qui généralise (C.2.6).



Théorème C.2.7. Si $(\varphi_j)_{j=0 \rightarrow N-1}$ est une base de vecteurs quelconque, on définit la matrice $B = (B_{j,k})_{j,k}$ appelée matrice de Graham avec

$$B_{j,k} := \langle \varphi_j | \varphi_k \rangle.$$

Alors tout vecteur u s'écrit

$$u = \sum_{j,k=0}^{N-1} (B^{-1})_{k,j} \langle \varphi_j | u \rangle \varphi_k \quad (\text{C.2.7})$$

où B^{-1} est la *matrice inverse*.

Démonstration. Considérons le cas $u = \varphi_l$ et posons $v := \sum_{j,k=0}^{N-1} \langle \varphi_j | \varphi_l \rangle (B^{-1})_{j,k} \varphi_k$. On a $B_{j,l} = \overline{B_{l,j}}$ et $\sum_j B_{l,j} C_{j,k} = \delta_{l=k}$ donc pour tout m

$$\langle \varphi_m | v \rangle = \sum_{j,k=0}^{N-1} (B^{-1})_{k,j} \langle \varphi_j | \varphi_l \rangle \langle \varphi_m | \varphi_k \rangle = \sum_{j,k} (B^{-1})_{k,j} B_{j,l} B_{m,k} = \sum_k \delta_{k=l} B_{m,k} = B_{m,l} = \langle \varphi_m | \varphi_l \rangle$$

On déduit que $v = \varphi_l = u$. Par linéarité cela est vrai pour tout vecteur. Cela démontre (C.2.7). \square

Exemple C.2.8. Si la base est orthonormée alors $B_{j,k} = \delta_{j=k}$, $(B^{-1})_{j,k} = \delta_{j=k}$ et donc $u = \sum_j \langle \varphi_j | u \rangle \varphi_j$, on retrouve (C.2.6).

C.3 Analyse de fonctions

L'analyse de fonctions s'appelle l'analyse fonctionnelle.

C.3.0.1 Fonctions à valeur complexes

Bien que les signaux physiques soient à valeurs réelles i.e. $u : t \in \mathbb{R} \rightarrow u(t) \in \mathbb{R}$, il sera nécessaire de les considérer comme des **signaux à valeur complexe** $u(t) \in \mathbb{C}$ pour la raison suivante.

En analyse fonctionnelle, on considère des opérateurs linéaires qui transforment les signaux et agissent de manière équivalente à une matrice. Il sera utile de considérer les vecteurs propres de ces opérateurs, qui représentent des signaux invariants par la transformation. Or il est connu qu'une matrice réelle peut avoir des valeurs propres et vecteurs propres complexes, par exemple la matrice J suivante qui possède les valeurs propres $i, -i$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Ju_+ = iu_+, \quad Ju_- = -iu_-,$$

avec les vecteurs propres

$$u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad u_- = \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix},$$

Et dans la base de ces deux vecteurs propres, un vecteur réel comme $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ par exemple, se décompose avec des composantes complexes :

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = iu_+ - iu_-.$$

C.3.1 Fonctions régulières de Schwartz

Une fonction est une application $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$. C'est un espace vectoriel de dimension infinie. Pour l'étudier on introduit tout d'abord un produit scalaire et une norme qui permette de comparer différentes fonctions, mesurer leur distance, etc... Pour définir ces opérations il est commode de le faire sur un sous espace de fonctions très régulières. Par exemple l'espace de Schwartz défini ci-dessous qui est l'espace de fonctions u lisses (C^∞) et à décroissance rapide, c'est à dire qui tendent vers 0 à l'infini plus vite que tout polynome $\frac{1}{x^\alpha}$, et de même pour ses dérivées $\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}$.

Définition C.3.1. L'espace de Schwartz ou espace des fonctions lisses à décroissance rapide est :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha, \beta} > 0, \forall x, \quad \left| \left(x^\alpha \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta} \right) (x) \right| < C_{\alpha, \beta} \right\} \quad (\text{C.3.1})$$

C.3.2 Distributions

C.3.3 Produit scalaire entre les fonctions

Pour évaluer “l’information” que contient une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ il faut utiliser une distance entre les fonctions qui permet ainsi de discriminer différentes fonctions. Il y a plusieurs possibilités. On peut utiliser la “norme L^2 ” qui provient d’un produit scalaire entre fonctions appelé “produit scalaire L^2 ”.

Définition C.3.2. Si $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on note

$$\langle u|v \rangle_{L^2} := \int \bar{u}(x) v(x) dx$$

appelé **produit scalaire L^2 ou $L^2(\mathbb{R}^n; dx)$** . En particulier

$$\|u\|_{L^2} := \sqrt{\langle u|u \rangle}$$

est la **norme L^2** de u .

Ce produit scalaire peut être étendu à d’autres fonctions lorsqu’il est toujours défini par exemple, ci-dessous pour $\xi \in \mathbb{R}^n$ donné, on considère la fonction

$$\varphi_\xi : x \rightarrow e^{i\xi x} \in \mathbb{C}$$

appelée “**mode de Fourier**” ou “**onde plane**”. Clairement $\varphi_\xi \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ car elle ne décroît pas, mais pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\langle \varphi_\xi|u \rangle_{L^2} \in \mathbb{C}$ est bien défini car l’intégrale est convergente.

On appelle $\xi \in \mathbb{R}^n$ le **vecteur d’onde** ou **vecteur fréquence**.

C.3.4 Bases orthonormées

Comme en géométrie Euclidienne, il est utile d’utiliser des fonctions formant des bases orthonormées dans l’espace des fonctions.

En analyse fonctionnelle (analyse de fonction), il y a de nombreux choix intéressants de bases orthonormées de fonctions. Parmi les plus connues, dans le cas des fonctions périodiques ou définies sur un intervalle $[0, T]$, il y a la base de Fourier utilisée pour la transformée de Fourier.

C.3.5 Opérateurs auto-adjoints

Si $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur dans un espace de Hilbert \mathcal{H} , son **adjoint** $H^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est l’opérateur défini par

$$\langle u|H^\dagger v \rangle = \langle Hu|v \rangle, \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

On dit que H est autoadjoint si $H^\dagger = H$.

Proposition C.3.3. *Si $H^\dagger = H$ alors les valeurs propres de H sont réelles et les espaces propres sont orthogonaux entre eux, i.e. si $Hu_1 = \omega_1 u_1$ et $Hu_2 = \omega_2 u_2$ avec $u_1, u_2 \neq 0$ alors $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ et si $\omega_1 \neq \omega_2$ alors $\langle u_1 | u_2 \rangle = 0$.*

Démonstration. On écrit

$$\langle u_1 | Hu_1 \rangle = \omega_1 \langle u_1 | u_1 \rangle = \langle Hu_1 | u_1 \rangle = \overline{\omega_1} \langle u_1 | u_1 \rangle$$

donc $\omega_1 = \overline{\omega_1}$ donc $\omega_1 \in \mathbb{R}$. De plus

$$\langle u_2 | Hu_1 \rangle = \omega_1 \langle u_2 | u_1 \rangle = \langle Hu_2 | u_1 \rangle = \omega_2 \langle u_2 | u_1 \rangle$$

donc $(\omega_2 - \omega_1) \langle u_2 | u_1 \rangle = 0$ donc $\langle u_2 | u_1 \rangle = 0$ si $\omega_2 \neq \omega_1$. □

C.4 Transformée de Fourier sur \mathbb{R}

C.4.1 Transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse

Pour plus de détails, voir le cours [Faure \(2010\)](#).

La fonction suivante qui dépend du paramètre fréquence $f \in \mathbb{R}$, est appelée **mode de Fourier** ou **onde plane** :

$$\varphi_f(t) = e^{i2\pi ft}. \quad (\text{C.4.1})$$

Remarque C.4.1. “Motivations pour l’analyse de Fourier”. Voici des arguments qui justifient l’utilisation des modes de Fourier (C.4.1). La fonction $t \rightarrow e^{i2\pi ft}$ est plus naturelle et utile que $t \rightarrow \cos(2\pi ft)$ pour la simple raison que

$$\frac{d}{dt} (e^{i2\pi ft}) = (i2\pi f) e^{i2\pi ft},$$

autrement dit cette fonction est un **vecteur propre** de l’opérateur dérivée avec la **valeur propre** $i2\pi f$. Or l’opérateur dérivée intervient dans la plupart des équations de la physique (EDP). La théorie de Fourier, expliquée plus loin, consiste justement à faire un changement de base dans l’espace vectoriel des fonctions, et à utiliser la base des vecteurs propres de l’opérateur dérivée que sont les modes de Fourier.

Définition C.4.2. (Joseph Fourier 1822 à Grenoble) La **transformée de Fourier** d’un signal $u : t \rightarrow u(t)$ est la fonction

$$f \in \mathbb{R} \rightarrow (\mathcal{F}u)(f) := \langle \varphi_f | u \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi ft} u(t) dt \quad (\text{C.4.2})$$

Remarque C.4.3. $(\mathcal{F}u)(f) = \langle \varphi_f | u \rangle$ mesure la présence du mode de Fourier φ_f dans le signal u .

Théorème C.4.4. *Inversement, à partir de la fonction transformée de Fourier $f \rightarrow v(f) = (\mathcal{F}u)(f)$ on peut reconstruire le signal par la formule appelée **transformée de Fourier inverse** :*

$$u(t) = (\mathcal{F}^{-1}v)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi ft} v(f) df \quad (\text{C.4.3})$$

qui s'interprète comme une superposition des modes de Fourier (similaire à (C.2.6)).

Démonstration. On va utiliser la formule importante (au sens des distributions)

$$\int e^{i2\pi f(t-t')} df = \delta(t-t'). \quad (\text{C.4.4})$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi ft} (\mathcal{F}u)(f) df \stackrel{(\text{C.4.2})}{=} \int \int e^{i2\pi f(t-t')} u(t') dt' df = \int \int \delta(t-t') u(t') dt' = u(t).$$

□

Remarque C.4.5. La formule de \mathcal{F}^{-1} est similaire à la formule de \mathcal{F} : $(\mathcal{F}^{-1}v)(t) = (\mathcal{F}v)(-t)$. Plus précisément on a $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^\dagger$, i.e. \mathcal{F} est un **opérateur unitaire**.

Proposition C.4.6. “Formule de Parseval”. Pour toute fonction u , on a

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$$

*autrement dit la transformée de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est un **opérateur unitaire**.*

Démonstration. On écrit

$$\|\mathcal{F}u\|_{L^2}^2 = \int e^{i2\pi ft'} \overline{u(t')} e^{-i2\pi ft} u(t) dt' dt df \stackrel{(\text{C.4.4})}{=} \int \overline{u(t')} u(t) dt = \|u\|_{L^2}^2.$$

□

C.4.2 Transformée de Fourier d'un signal échantillonné

Si $u = (\dots u_{-1}, u_0, u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est une suite infinie de données représentant un signal échantillonné avec un pas de temps δ , on peut l'écrire comme une série de distributions de Dirac aux instants $t_j = \delta j$, appelé aussi **peigne de Dirac** :

$$u(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j \delta_{\delta j}(t) \quad (\text{C.4.5})$$

Alors sa transformée de Fourier est pour $f \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{F}u)(f) \stackrel{(C.4.2)}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi ft_j} u_j \quad (C.4.6)$$

Voici un résultat très important en théorie du signal

Théorème C.4.7. La transformée de Fourier $(\mathcal{F}u)(f)$ d'un **peigne de Dirac** (C.4.5) de pas de temps δ est **périodique en fréquence** de période $\Delta f = \frac{1}{\delta}$, i.e.

$$(\mathcal{F}u)(f) = (\mathcal{F}u)\left(f + \frac{1}{\delta}\right)$$

et la transformée de Fourier inverse donne pour $j \in \mathbb{Z}$,

$$u_j = \delta \int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{i2\pi ft_j} (\mathcal{F}u)(f) df. \quad (C.4.7)$$

Démonstration. On calcule

$$(\mathcal{F}u)\left(f + \frac{1}{\delta}\right) \stackrel{(C.4.6)}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi(f+\frac{1}{\delta})t_j} u_j = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{-i2\pi ft_j} e^{-i2\pi j} u_j = (\mathcal{F}u)(f)$$

car $e^{-i2\pi j} = 1$. Ensuite

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{i2\pi ft_j} (\mathcal{F}u)(f) df &\stackrel{(C.4.6)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{i2\pi ft_j} e^{-i2\pi ft_k} df \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{i2\pi f\delta(j-k)} df \end{aligned}$$

or

$$\int_0^{\frac{1}{\delta}} e^{i2\pi f\delta(j-k)} df = \begin{cases} \frac{1}{\delta} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

On déduit (C.4.7). □

Remarque C.4.8. La propriété C.4.7 est appelée en théorie du signal le « **repliement de spectre** » ou « **aliasing** ». Cf Mallat (1999, p.61). Une période en fréquence est $-\frac{1}{2}\Delta f \leq f \leq \frac{1}{2}\Delta f$ et la borne $\frac{1}{2}\Delta f = \frac{1}{2\delta}$ est appelée **fréquence de Nyquist**.

Remarque C.4.9. Dans la relation : pas de temps $\delta \Leftrightarrow$ période en fréquence $\frac{1}{\delta}$, on retrouve une manifestation du principe d'incertitude (2.2.3).

C.4.3 Série de Fourier d'un signal périodique

Le théorème C.4.7 nous dit que la transformée inverse d'un signal périodique est un peigne de Dirac. Or la transformée de Fourier inverse est similaire à la transformée de Fourier elle-même d'après la formule (C.4.3). On déduit des formules précédentes (C.4.6) et (C.4.7) :

Théorème C.4.10. *La transformée de Fourier d'un **signal périodique** u de période T est un **peigne de Dirac** de pas de fréquence $\frac{1}{T}$ donnée par*

$$(\mathcal{F}u)(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}_n \delta_{\frac{1}{T}n}(f)$$

avec des **coefficients de Fourier** (ou **harmoniques**) $\hat{u}_n \in \mathbb{C}$ donnés par

$$\hat{u}_n = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) e^{-i2\pi n \frac{t}{T}} dt. \quad (\text{C.4.8})$$

Le signal se décompose en **série de Fourier**

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{u}_n e^{i2\pi n \frac{t}{T}}$$

Formule de Parseval est $\|u\|_{L^2(0,T)} = \|\hat{u}\|_{l^2(\mathbb{Z})}$ c'est à dire

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_n|^2.$$

Exercice C.4.11. Calculer les coefficients de Fourier des fonctions périodiques suivantes : **sinus**, **signal carré**, **triangle**, **fonction scie**.

Exercice C.4.12. Montrer que si le signal est réel alors $\hat{u}_{-n} = -\overline{\hat{u}_n}$, $\forall n$ et que l'on peut écrire (2.3.1) :

$$u(t) = \sum_{n \geq 0} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$

avec $\hat{u}_n = A_n e^{i\varphi_n}$ et la fréquence $f = \frac{1}{T}$.

C.4.4 Transformée de Fourier discrète

Combinant avec les Théorèmes C.4.10 et C.4.7 cela donne un résultat très utile concernant les signaux échantillonnés de pas de temps δ et périodique de période T :

Théorème C.4.13. « *Transformée de Fourier discrète, DFT* ». La transformée de Fourier d'un signal échantillonné de pas de temps δ et périodique de période T est un peigne de Dirac de pas de fréquence $\frac{1}{T}$ et périodique en fréquence de période $\frac{1}{\delta}$. On a les formules suivantes pour un signal $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$. Les coefficients de Fourier sont

$$\hat{u}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi jn/N} u_j \quad (\text{C.4.9})$$

et inversement

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi jn/N} \hat{u}_n$$

La formule de Parseval est

$$\sum_{j=0}^{N-1} |u_j|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{u}_n|^2.$$

Démonstration. On va démontrer directement ces formules. Montrons que la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi(j-j')n/N} = N\delta_{j=j' \bmod N} \quad (\text{C.4.10})$$

En effet posons $S := \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi(j-j')n/N}$, alors $e^{i2\pi(j-j')/N} S = \sum_{n=1}^N e^{i2\pi(j-j')n/N}$ et si $j \neq j' \bmod N$ alors $e^{i2\pi(j-j')/N} \neq 1$ et

$$e^{i2\pi(j-j')/N} S - S = e^{i2\pi(j-j')N/N} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = 0.$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi jn/N} \hat{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{j'=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i2\pi(j-j')n/N} u_{j'} = \frac{1}{N} \sum_{j'=0}^{N-1} N\delta_{j=j' \bmod N} u_{j'} = u_j.$$

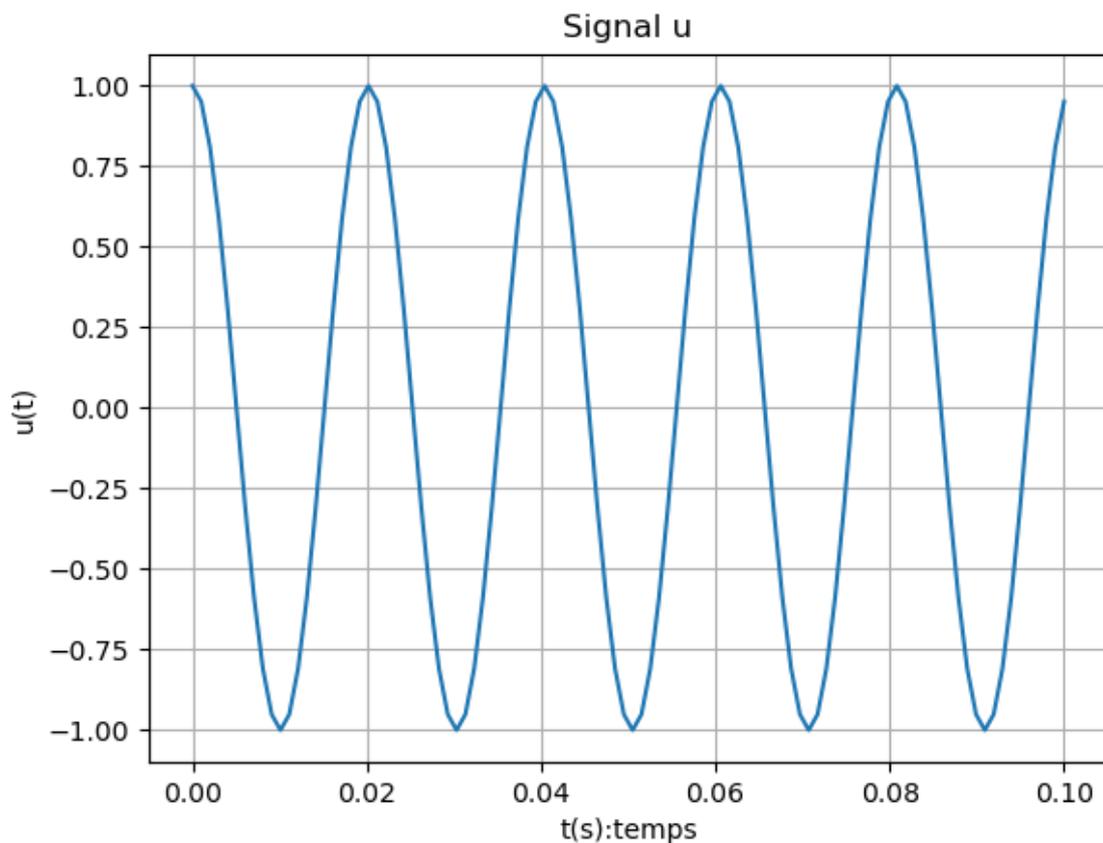
De même

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |\hat{u}_n|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j'=0}^{N-1} e^{i2\pi j'n/N} \overline{u_{j'}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i2\pi jn/N} u_j \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j,j'=0}^{N-1} \left(e^{i2\pi(j'-j)n/N} \right) \overline{u_{j'}} u_j \stackrel{(\text{C.4.10})}{=} \frac{1}{N} \sum_{j,j'=0}^{N-1} N\delta_{j=j' \bmod N} \overline{u_{j'}} u_j \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} |u_j|^2. \end{aligned}$$

□

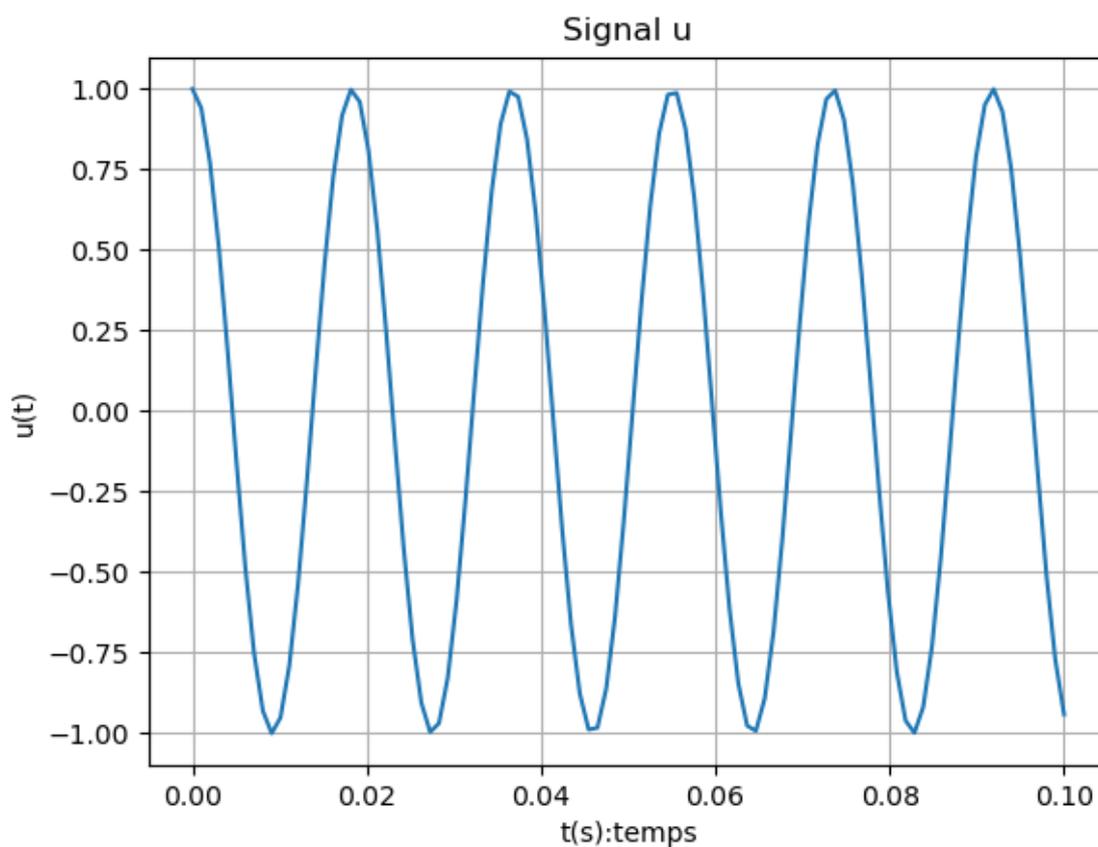
Remarque C.4.14. dans le cas des valeurs particulières du nombre d'échantillons $N = 2^M$, il y a une formule récursive appelée **transformée de Fourier rapide** qui permet de calculer \hat{u}_n à partir des (u_j) avec un nombre $\sim N \ln N$ d'opérations au lieu de $\sim N^2$. Cet algorithme est très utilisé en pratique.

Exemple C.4.15. Ce programme en python `DFT_of_array.py` utilise directement la formule (C.4.9) et calcule la transformée de Fourier discrète du signal u suivant, avec $N = 100$ points, et ici un signal de fréquence $f_0 = 50\text{Hz}$. Il utilise aussi la **bibliothèque scipy** pour un algorithme plus rapide. Lire le code pour comprendre les changements d'échelle en particulier.



Exercice C.4.16. Dans le programme précédent essayer avec un signal de fréquence $f_0 = 55\text{Hz}$. Qu'observez vous ?

Solution C.4.17. On obtient



C.5 Transformée de Fourier sur \mathbb{R}^n

Pour plus de détails, voir le cours [Faure \(2010\)](#).

Définition C.5.1. Pour une fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sa transformée de Fourier est $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}u)(\xi) &:= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \langle \varphi_\xi | u \rangle_{L^2} \end{aligned} \quad (\text{C.5.1})$$

avec $\varphi_\xi(x) := e^{i\xi x}$ appelé “mode de Fourier”.

Ainsi \mathcal{F} est un **opérateur linéaire**

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

On définit son opérateur adjoint \mathcal{F}^\dagger par

$$\langle u | \mathcal{F}^\dagger v \rangle := \langle \mathcal{F}u | v \rangle, \forall u, v.$$

On a les propriétés suivantes

Proposition C.5.2. *L'opérateur adjoint \mathcal{F}^\dagger est donné par*

$$(\mathcal{F}^\dagger v)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{i\xi \cdot x} v(\xi) d\xi \quad (\text{C.5.2})$$

et vérifie la “*formule d'inversion de Fourier*”

$$\mathcal{F}^\dagger \mathcal{F} = \text{Id} \quad (\text{C.5.3})$$

Remarque C.5.3. La formule (C.5.3) signifie que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur unitaire c'est à dire qui conserve le produit scalaire $\langle \mathcal{F}u | \mathcal{F}v \rangle = \langle u | v \rangle$. La conséquence est que $\mathcal{F}^\dagger = \mathcal{F}^{-1}$ est son inverse, c'est à dire si $v = \mathcal{F}u$ alors

$$u = \mathcal{F}^{-1}v = \mathcal{F}^\dagger v$$

C.6 Transformée par paquets d'ondes

L'inconvénient de la transformée de Fourier est que partant d'une fonction $u(x)$ on obtient une fonction $(\mathcal{F}u)(\xi)$ qui ne dépend plus de x et donc on a l'impression d'avoir perdu l'information sur la localisation de u dans l'espace des $x \in \mathbb{R}^n$. En fait, l'information n'est pas perdue car $\mathcal{F}^\dagger \mathcal{F}u = u$, mais elle n'est plus “visible”.

On peut généraliser la notion de transformée de Fourier et rendre visible à la fois l'information de la localisation de u en x et ξ dans l'espace des phases.

C.6.1 Paquets d'ondes Gaussiens

On notera, pour $x, x' \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x - x'\|^2 := \sum_{j=1}^n (x_j - x'_j)^2$$

qui mesure la distance dans \mathbb{R}^n .

Définition C.6.1. Soit $\sigma > 0$. Pour une position $x \in \mathbb{R}^n$ et une fréquence $\xi \in \mathbb{R}^n$ données, on associe un **paquet d'onde** de largeur σ qui est la fonction

$$\varphi_{x,\xi}(x') = a e^{i\xi x'} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\|x' - x\|}{\sigma} \right)^2}$$

avec $a = (\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{4}}$ de sorte que $\|\varphi_{x,\xi}\|_{L^2} = 1$.

Sa transformée de Fourier est

$$(\mathcal{F}\varphi_{x,\xi})(\xi') = a' e^{ix\xi'} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\|\xi' - \xi\|}{(1/\sigma)} \right)^2} \quad (\text{C.6.1})$$

Les formules précédentes montrent que $|\varphi_{x,\xi}(x')|$ est une Gaussienne de largeur $\Delta x = \sigma$ centrée en x et $|(\mathcal{F}\varphi_{x,\xi})(\xi')|$ est une Gaussienne de largeur $\Delta\xi = 1/\sigma$ centrée en ξ .

Proposition C.6.2. “Produit scalaire entre deux paquets d'ondes”. On a

$$|\langle \varphi_{x',\xi'} | \varphi_{x,\xi} \rangle| = \exp(-d^2)$$

avec

$$d^2 = \left(\frac{|x' - x|}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{|\xi' - \xi|}{1/\sigma} \right)^2,$$

ainsi d est la distance entre les points (x', ξ') et (x, ξ) mesurée avec la métrique $g = \left(\frac{dx}{\delta} \right)^2 + \left(\frac{d\xi}{1/\sigma} \right)^2$.

Démonstration. Le calcul utilise l'intégrale Gaussienne. □

C.6.2 Transformée par paquets d'ondes

Définition C.6.3. Pour une fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sa **transformée par paquets d'ondes** est $\mathcal{T}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par

$$(\mathcal{T}u)(x, \xi) := \langle \varphi_{x,\xi} | u \rangle_{L^2}. \quad (\text{C.6.2})$$

Ainsi \mathcal{T} est un **opérateur linéaire**

$$\mathcal{T} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}).$$

On considère la mesure $\frac{dx d\xi}{(2\pi)^n}$ sur \mathbb{R}^{2n} pour définir l'espace $L^2\left(\mathbb{R}^{2n}; \frac{dx d\xi}{(2\pi)^n}\right)$ et on définit son opérateur adjoint \mathcal{T}^\dagger par

$$\langle u | \mathcal{T}^\dagger v \rangle := \langle \mathcal{T}u | v \rangle, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}).$$

On a les propriétés suivantes

Proposition C.6.4. *L'opérateur adjoint \mathcal{T}^\dagger est donné par*

$$(\mathcal{T}^\dagger v)(x') := \int v(x, \xi) \varphi_{x, \xi}(x') \frac{dx d\xi}{(2\pi)^n}$$

et vérifie

$$\mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} = \text{Id} \tag{C.6.3}$$

Remarque C.6.5. La formule (C.6.3) signifie que $\mathcal{T} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^{2n})$ est une isométrie c'est à dire qui conserve le produit scalaire $\langle \mathcal{T}u | \mathcal{T}v \rangle = \langle u | v \rangle$. Mais comme l'espace d'arrivée est différent de l'espace de départ, cela n'implique pas que \mathcal{T} est inversible. En fait

$$\mathcal{P} := \mathcal{T}\mathcal{T}^\dagger$$

est un projecteur orthogonal sur $\text{Im}(\mathcal{P}) = \text{Im}(\mathcal{T})$, en effet $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}$. Ainsi $\mathcal{T} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Im}(\mathcal{T})$ est un opérateur unitaire (inversible), i.e. si $v = \mathcal{T}u$ alors $u = \mathcal{T}^{-1}v = \mathcal{T}^\dagger v$.

C.7 Modèle élémentaire du résonateur linéaire forcé

Référence : [Pottier \(2000, chap 12.A\)](#)

Considérons l'équation pour $x(t) \in \mathbb{R}$, dépendant de $t \in \mathbb{R}$

$$m\partial_t^2 x = -\gamma\partial_t x - Kx + p(t) \tag{C.7.1}$$

avec $m > 0$ associé au "terme d'inertie", $\gamma \geq 0$ associé au "terme de forçement", $K \geq 0$ associé au "terme de rappel" et $p(t)$ est une force extérieure.

C.7.1 Résolution générale

Référence [Taylor \(1996\)](#).

Posons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \partial_t x(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

alors l'équation (C.7.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t X &= \begin{pmatrix} \partial_t x \\ \partial_t^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & \gamma \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \end{pmatrix} \\ &= AX + f(t) \end{aligned}$$

avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K & \gamma \end{pmatrix}$ et $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ p(t) \end{pmatrix}$. La solution générale par la “formule de Duhamel” est

$$X(t) = e^{tA} X(0) + \int_0^t e^{(s-t)A} f(s) ds$$

C.7.2 Cas d’un signal périodique $p(t) = p(0) e^{i\omega t}$

Si $p(t) = p(0) e^{i\omega t}$ est un “signal monochromatique” de fréquence ω , alors une solution particulière de (C.7.1) est $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$ avec

$$x_0 = \frac{p_0}{-m\omega^2 + i\gamma\omega + K}$$

de module

$$|x_0| = \frac{|p_0|}{((K - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)^{1/2}} \quad (\text{C.7.2})$$

qui est maximal en $\omega = \pm\omega_0$ avec

$$\omega_0 = \left(\frac{K}{m} \left(1 - \frac{\gamma^2}{2Km} \right) \right)^{1/2}$$

appelée **fréquence de résonance** et donnant une amplitude

$$|x_0(\omega_0)| = \frac{p_0}{\gamma} \left(\frac{K}{m} \right)^{-1/2}$$

Remarque C.7.1. Si les frottement sont très faibles, $\gamma \ll \sqrt{Km}$ alors $\omega_0 \sim \sqrt{\frac{K}{m}}$

Démonstration. On suppose $x(t) = x_0 e^{i\omega t}$. Alors (C.7.1) donne

$$\begin{aligned} -mx_0\omega^2 + i\gamma x_0\omega + Kx_0 &= p_0 \\ \Leftrightarrow x_0 &= \frac{p_0}{-m\omega^2 + i\gamma\omega + K} \end{aligned}$$

donc

$$|x_0|^2 = \frac{|p_0|^2}{(K - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Le dénominateur $D(\omega) = (K - m\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2$ a un minimum en $\omega_0 \neq 0$ donné par

$$\begin{aligned} D'(\omega_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(K - m\omega_0^2)(-2m\omega_0) + \gamma^2 2\omega_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \omega_0^2 &= \frac{K}{m} - \frac{\gamma^2}{2m^2} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} |x_0|^2 &= \frac{|p_0|^2}{(K - m\omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega_0^2} \\ &= \frac{|p_0|^2}{\left(\frac{\gamma^2}{2m}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{K}{m} - \frac{\gamma^2}{2m^2}\right)} = \frac{p_0^2 m}{\gamma^2 K} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} \infty \end{aligned}$$

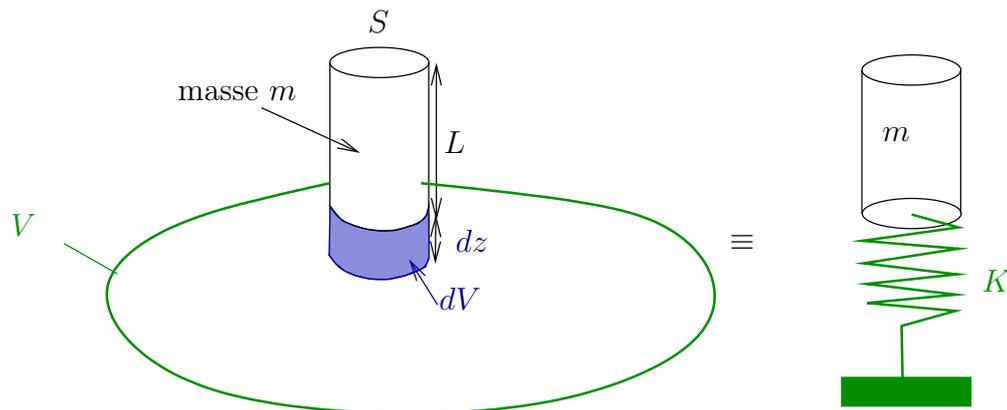
□

C.8 Résonateur de Helmholtz

Référence : [Schroeder *et al.* \(2007, p.94\)](#). [Resonateur de Helmholtz sur wikipedia](#), Elmore p.148.

Ce modèle est supposé représenter par exemple une bouteille avec un goulot, qui produit du son lorsque l'on souffle sur le goulot.

Considérons un volume V , en vert sur la figure, connecté à l'extérieur par un cylindre de surface S et longueur L . Dans le volume et le cylindre il y a de l'air de masse volumique ρ . On néglige le poids.



Supposons que le fluide dans le cylindre se déplace de façon rigide de la longueur dz . Cela induit une variation de volume dans la zone verte :

$$dV = Sdz.$$

L'air est compressible, mais cette variation de volume implique une variation de pression dP dans le volume obtenu de la façon suivante. Le changement est supposé adiabatique on a donc d'après la loi de Laplace $PV^\gamma = \text{cste}$,

$$\begin{aligned} \ln P + \gamma \ln V = \ln(\text{cste}) &\Leftrightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \\ \Leftrightarrow dP = -\frac{\gamma P dV}{V} &= -\frac{\gamma P S dz}{V} \end{aligned}$$

Du fait de cette variation de pression, le cylindre subit une force selon l'axe z :

$$dF = SdP = -\frac{\gamma P S^2 dz}{V} = -K dz$$

avec la "constante de raideur"

$$K = \frac{\gamma P S^2}{V}$$

Ainsi, si on note $m = \rho S L$ la masse du gaz dans le cylindre, le modèle est équivalent à une masse m attachée à un ressort de raideur K .

L'équation de mouvement de Newton donne pour la position $z(t)$ du cylindre :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -K z \Leftrightarrow \frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$$

c'est un "mouvement harmonique" d'oscillation avec la fréquence

$$\omega = \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma P S}{V \rho L}\right)^{1/2} = c \left(\frac{S}{V L}\right)^{1/2}$$

où on a utilisé l'expression de la vitesse du son dans l'air donnée par

$$c = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2}.$$

Remarque C.8.1. Un modèle un peu amélioré propose de remplacer L par $L + \frac{1}{2}S^{1/2}$ dans l'expression finale.

Exemple C.8.2. Pour la bouteille, présentée en photo,



on mesure à peu près $V = 33\text{cl} = 0.33 \cdot 10^{-3}\text{m}^3$, $L = 2\text{cm} = 2 \cdot 10^{-2}\text{m}$, $S = 1\text{cm}^2 = 10^{-4}\text{m}^2$, $c = 343\text{m/s}$, donnant

$$f = \frac{1}{2\pi} c \left(\frac{S}{VL} \right)^{1/2} = 212\text{Hz}$$

ou

$$f = \frac{1}{2\pi} c \left(\frac{S}{V(L + \frac{1}{2}S^{1/2})} \right)^{1/2} = 190\text{Hz}$$

L'expérience **expérience** donne la note G_4 de fréquence $f = 202\text{Hz}$ en assez bon accord à ce modèle.

C.9 Systèmes dynamiques

Définition C.9.1. Un **système dynamique** à temps continue est une loi d'évolution pour un point $x(t) \in \mathbb{R}^n$ de la forme

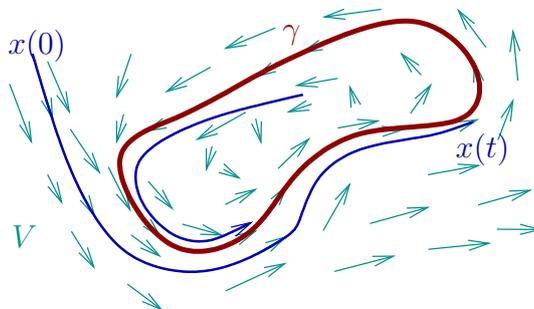
$$\frac{dx}{dt} = V(x(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{C.9.1})$$

où $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction au moins C^1 .

Interprétation géométrique : La fonction

$$V : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \rightarrow V(x) \end{cases}$$

est un champ de vecteur sur \mathbb{R}^n . Une solution $x(t)$ de l'équation (C.9.1) est une trajectoire, ou ligne de champ. Les vecteurs $V(x(t)) = \frac{dx}{dt}$ sont tangents à la trajectoire en tous points. Etant donné $x(0)$, il y a une unique solution $x(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ (ou du moins dans un voisinage de $t = 0$).



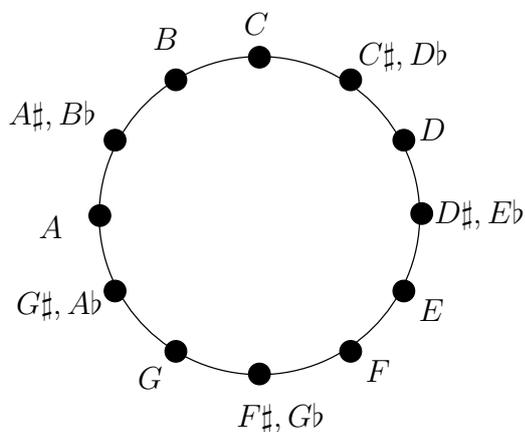
Annexe D

Notations musicales

Comme le tempérament égal est très utilisé, il y a beaucoup de conventions qui lui sont associées et on les rappelle ici.

D.1 Représentation des notes du tempérament égal

Cercle dodécaphonique : Les altérations **dièse** \sharp indique une note au dessus et **bémol** \flat indique une note en dessous. Modulo 12, on peut représenter les notes sur un cercle qui se lit dans le sens horaire.

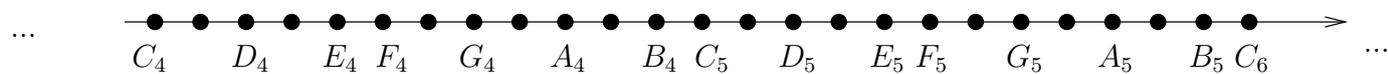


Un tour complet est une **octave**.

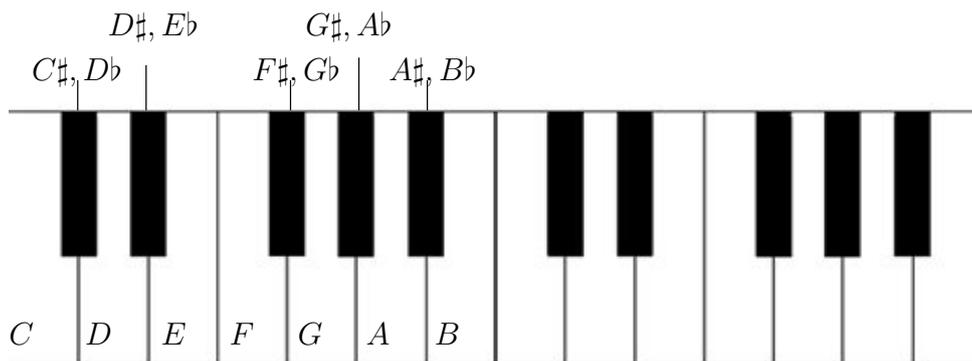
Noms français : En français on utilise les noms suivants

<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si

Les notes sur la droite \mathbb{Z} : Si on déroule le cercle on obtient la droite \mathbb{Z} des pitches du tempérament égal. On ajoute le numéro de l'octave aux symboles :



Les notes sur le clavier du piano :

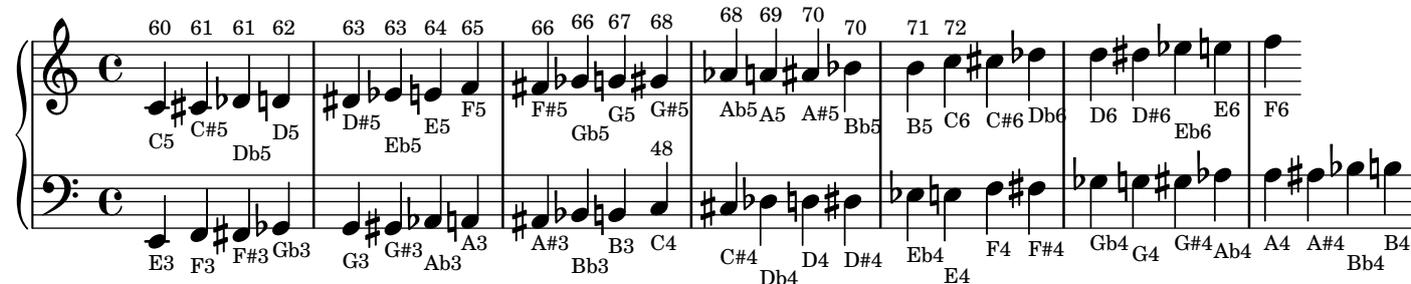


C_5 est la touche « Do » près de la serrure du piano, appelé « do serrure ».

Les notes sur le manche de la guitare :

E_5	F_5	$F\sharp_5, G\flat_5$	G_5	$G\sharp_5, A\flat_5$	A_5	$A\sharp_5, B\flat_5$	B_5	C_6	$C\sharp_6, D\flat_6$	D_6	$D\sharp_6, E\flat_6$	E_6	F_6	$F\sharp_6, G\flat_6$
B_4	C_5	$C\sharp_5, D\flat_5$	D_5	$D\sharp_5, E\flat_5$	E_5	F_5	$F\sharp_5, G\flat_5$	G_5	$G\sharp_5, A\flat_5$	A_5	$A\sharp_5, B\flat_5$	B_5	C_6	$C\sharp_6, D\flat_6$
G_4	$G\sharp_4, A\flat_4$	A_4	$A\sharp_4, B\flat_4$	B_4	C_5	$C\sharp_5, D\flat_5$	D_5	$D\sharp_5, E\flat_5$	E_5	F_5	$F\sharp_5, G\flat_5$	G_5	$G\sharp_5, A\flat_5$	A_5
D_4	$D\sharp_4, E\flat_4$	E_4	F_4	$F\sharp_4, G\flat_4$	G_4	$G\sharp_4, A\flat_4$	A_4	$A\sharp_4, B\flat_4$	B_4	C_5	$C\sharp_5, D\flat_5$	D_5	$D\sharp_5, E\flat_5$	E_5
A_3	$A\sharp_3, B\flat_3$	B_3	C_4	$C\sharp_4, D\flat_4$	D_4	$D\sharp_4, E\flat_4$	E_4	F_4	$F\sharp_4, G\flat_4$	G_4	$G\sharp_4, A\flat_4$	A_4	$A\sharp_4, B\flat_4$	B_4
E_3	F_3	$F\sharp_3, G\flat_3$	G_3	$G\sharp_3, A\flat_3$	A_3	$A\sharp_3, B\flat_3$	B_3	C_4	$C\sharp_4, D\flat_4$	D_4	$D\sharp_4, E\flat_4$	E_4	F_4	$F\sharp_4, G\flat_4$
Fret :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

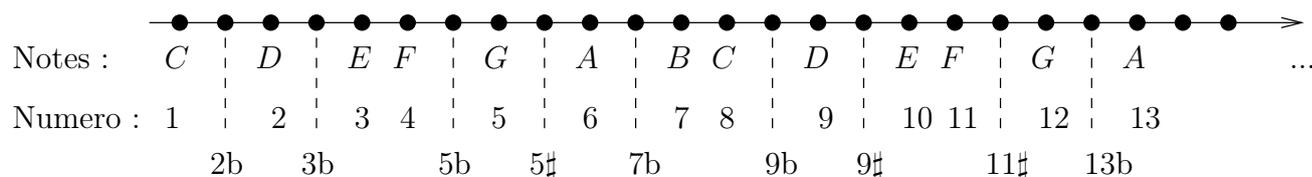
Les notes sur la portée musicale leur nom et leur pitch (code MIDI) :



D.2 Les intervalles

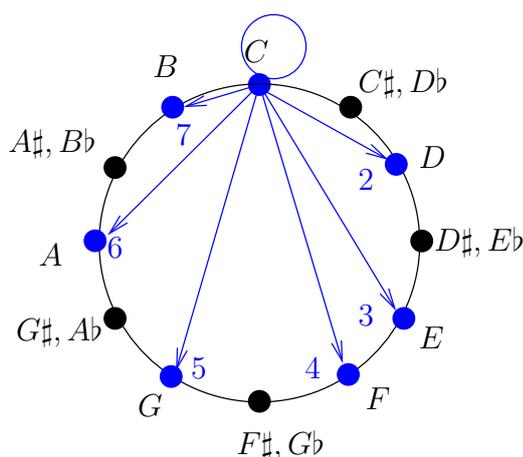
On prend l'exemple d'un intervalle entre C et une autre note supérieure. Les intervalles sont représentés par leur **degré** 1, 2, ... 7 correspondant aux intervalles de la gamme Majeure C, D, E, F, G, A, B .

Représentation des degrés des intervalles sur la droite \mathbb{Z} :



Remarque : dans cet exemple $5\#$ est le $G\#$, c'est la même note (même fréquence) que $6b$ qui est le Ab .

Représentation des degrés de ces intervalles sur le cercle \mathbb{Z}_{12} :



Nom des intervalles : Ne pas confondre le degré et le nombre de demi-tons.

Degré	1	2b	2	3b
Demi-tons (pitch)	0	1	2	3
Nom	Unisson	Seconde mineure ou 1/2 ton	Seconde ou ton	Tierce mineure

Degré	3	4	5b	5
Demi-tons (pitch)	4	5	6	7
Nom	Tierce majeure	quarte	quinte diminuée	quinte

Degré	5 \sharp	6	7 \flat	7
Demi-tons (pitch)	8	9	10	11
Nom	quinte augmentée	Sixte	Septième mineure	Septième Majeure

Degré	8	9 \flat	9	9 \sharp
Demi-tons (pitch)	12	13	14	15
Nom	Octave	Neuvième mineure	Neuvième Majeure	Neuvième augmentée

Degré	11	13
Demi-tons (pitch)	16	17
Nom	Onzième	Treizième Majeure

Index

E

équations du mouvement de Hamilton, 48

F

formule d'inversion de Fourier, 213

fréquence de résonance, 216

L

L'espace de Schwartz, 204

T

tempérament égal, 85

Théorie de Hamilton-Jacobi, 41

Théorie W.K.B., 41

transformée de Fourier, 212

Bibliographie

- Arnold, V. 1974. *Equations différentielles ordinaires*.
- Arnold, V.I. 1990. *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*.
- Benson, DJ. Music : a mathematical offering. [pdf version](#).
- Castellengo, Michèle. 2015. *Ecoute musicale et acoustique : Avec 420 sons et leurs sonagrammes décryptés*. Eyrolles.
- Dauzat, Pierre-Emmanuel, & Harari, Yuval Noah. 2015. *Sapiens : une brève histoire de l'humanité*. Albin Michel.
- Dehaene, Stanislas. 2014. *Le Code de la conscience*. Odile Jacob.
- Eargle, John. 2012. *The Microphone Book : From mono to stereo to surround-a guide to microphone design and application*. CRC Press.
- Euler, L., Juskevic, A.P., & Taton, R. 1980. *Correspondance de Leonhard Euler Avec A. C. Clairaut, J. D'Alembert Et J. L. Lagrange*. Commercium epistolicum. Birkhäuser Basel.
- Faure, F. 2010. *Cours de Mathématiques pour la physique. Niveau Master 1*. [link](#).
- Faure, F. 2014. Introduction au chaos quantique. *In : journées X-UPS*. Éditions de l'école polytechnique [link](#).
- Fletcher, Neville H, & Rossing, Thomas D. 2012. *The physics of musical instruments*. Springer Science & Business Media.
- Hirschberg, Avraham, Pelorson, Xavier, & Gilbert, Joël. 1996. Aeroacoustics of Musical Instruments. *Meccanica*, **31**(04), 131–141.
- Katznelson, Yitzhak. 2004. *An introduction to harmonic analysis*. Cambridge University Press.
- Landau, Lev Davidovich, & Lifshitz, Evgenii Mikhailovich. 1987. Fluid mechanics.
- Mallat, Stéphane. 1999. *A wavelet tour of signal processing*. Elsevier.

- Pham, F. 2003. Gammes naturelles et justesse expressive : l'exemple de la musique indienne. *PrÃ©publ. du laboratoire J.A. DieudonnÃ©*, **50**.
- Pottier, Noelle. 2000. *Physique statistique hors d'Ã©quilibre*.
- Schnupp, Jan, Nelken, Israel, & King, Andrew. 2011. *Auditory neuroscience : Making sense of sound*. MIT Press, [webpage](#).
- Schroeder, Manfred, Rossing, Thomas D, Dunn, F, Hartmann, WM, Campbell, DM, & Fletcher, NH. 2007. Springer handbook of acoustics.
- Taylor, M. 1996. *Partial differential equations, Vol I*. Springer.

#script qui selectionne les chapitres pour faire des fichiers pdf individuels.

```
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 1-9 output cours_chap_table_matieres.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 11-58 output cours_chap_son.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 59-121 output cours_chap_signal.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 122-140 output cours_chap_perception.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 141-155 output cours_chap_instruments.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 156-179 output cours_chap_musique.pdf
pdftk cours_acoustique_musicale.pdf cat 180-end output cours_chap_annexes.pdf
```