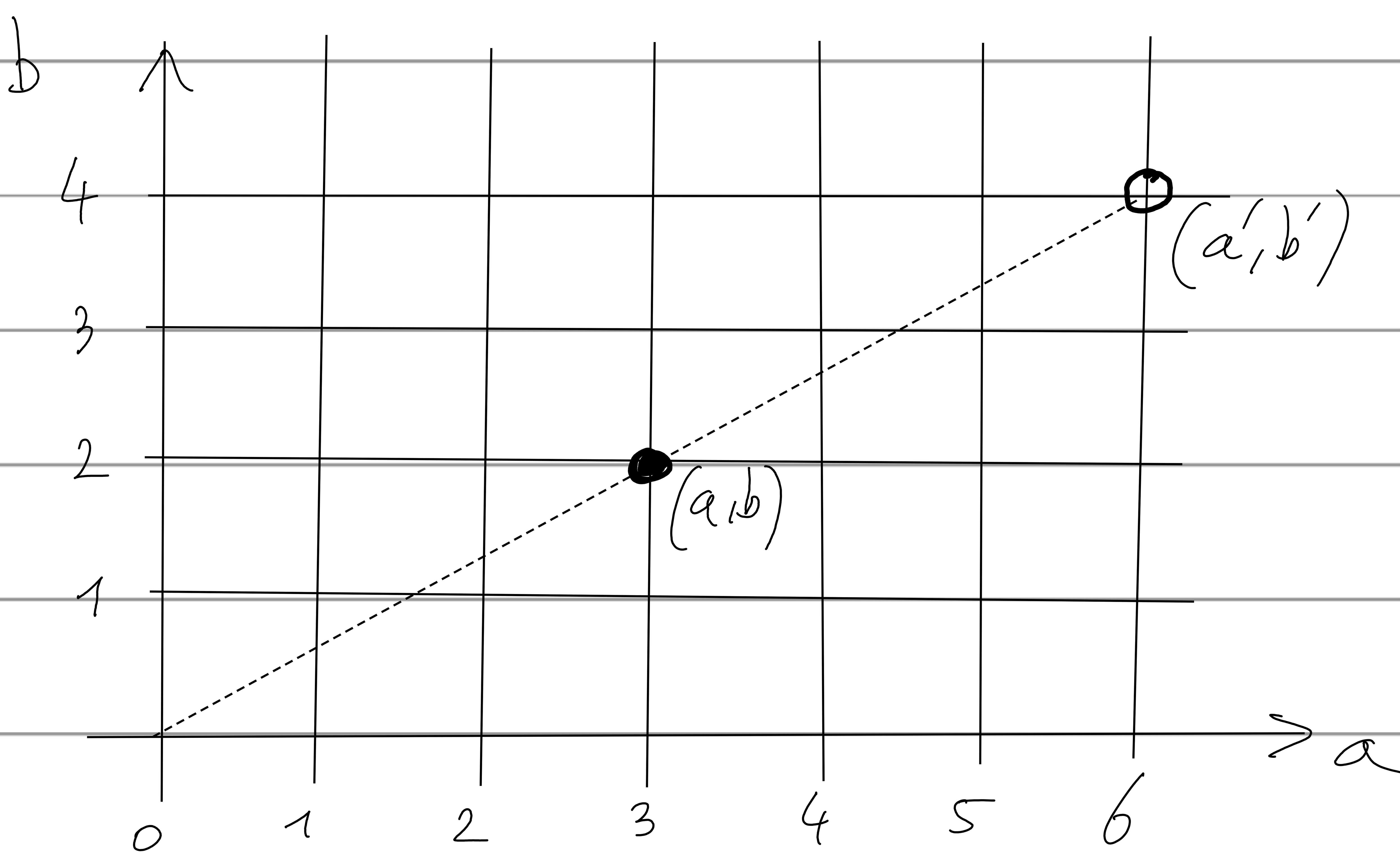
VERGER D'EUCLIDE

① Dessin des points (a,b) premiers entre eux :

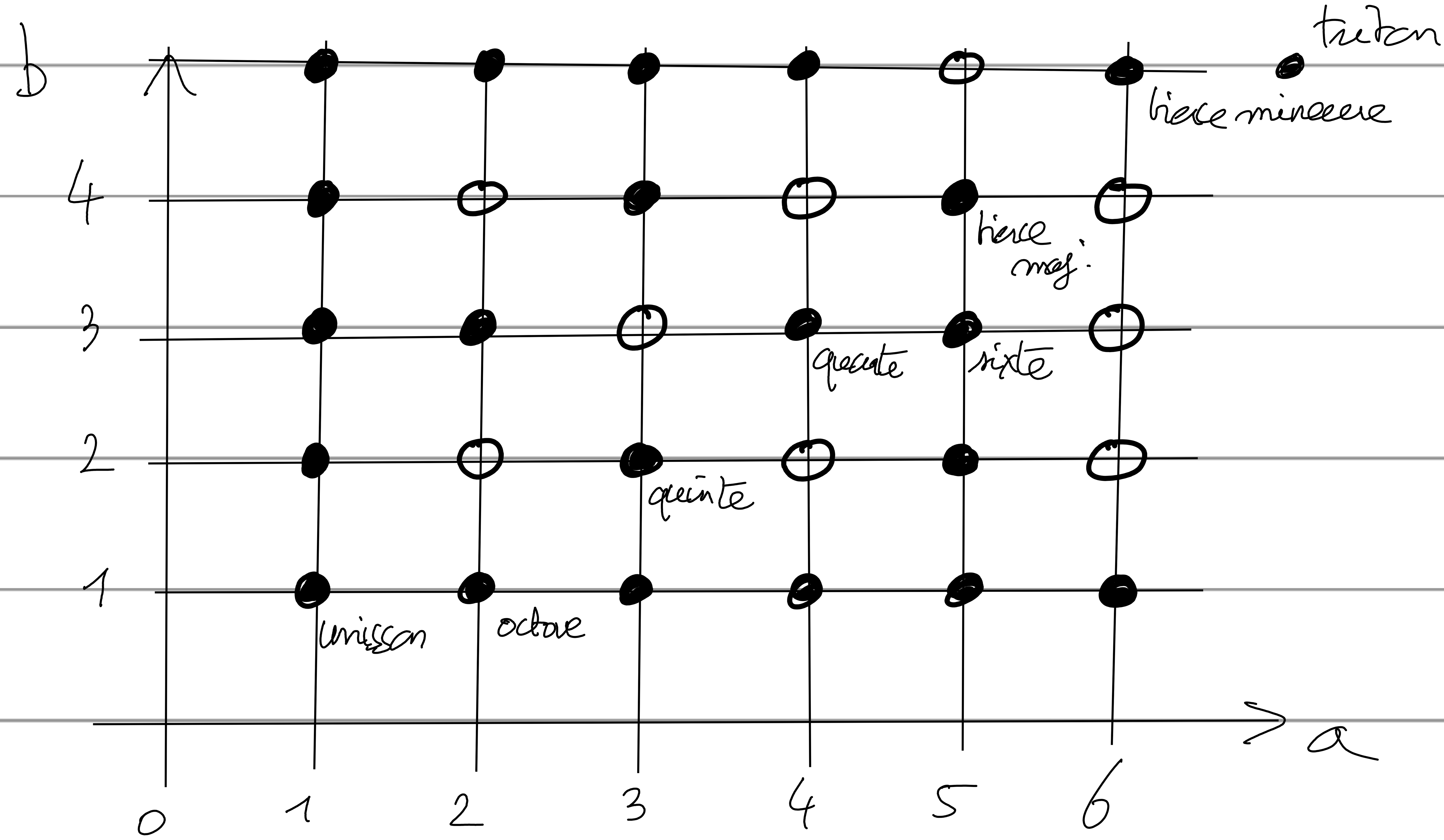
Le principe est que si $(a',b') = n(a,b) \Longleftrightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{na}{nb}$
entier

alors $\frac{a'}{b'}$ est réductible.

ex : $\frac{a'}{b'} = \frac{6}{4} = \frac{2\times 3}{2\times 2} = \frac{2\times a}{2\times b}$ avec $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ irréductible



Voici les couples (fractions) réductibles en ○ et irréductibles en ●



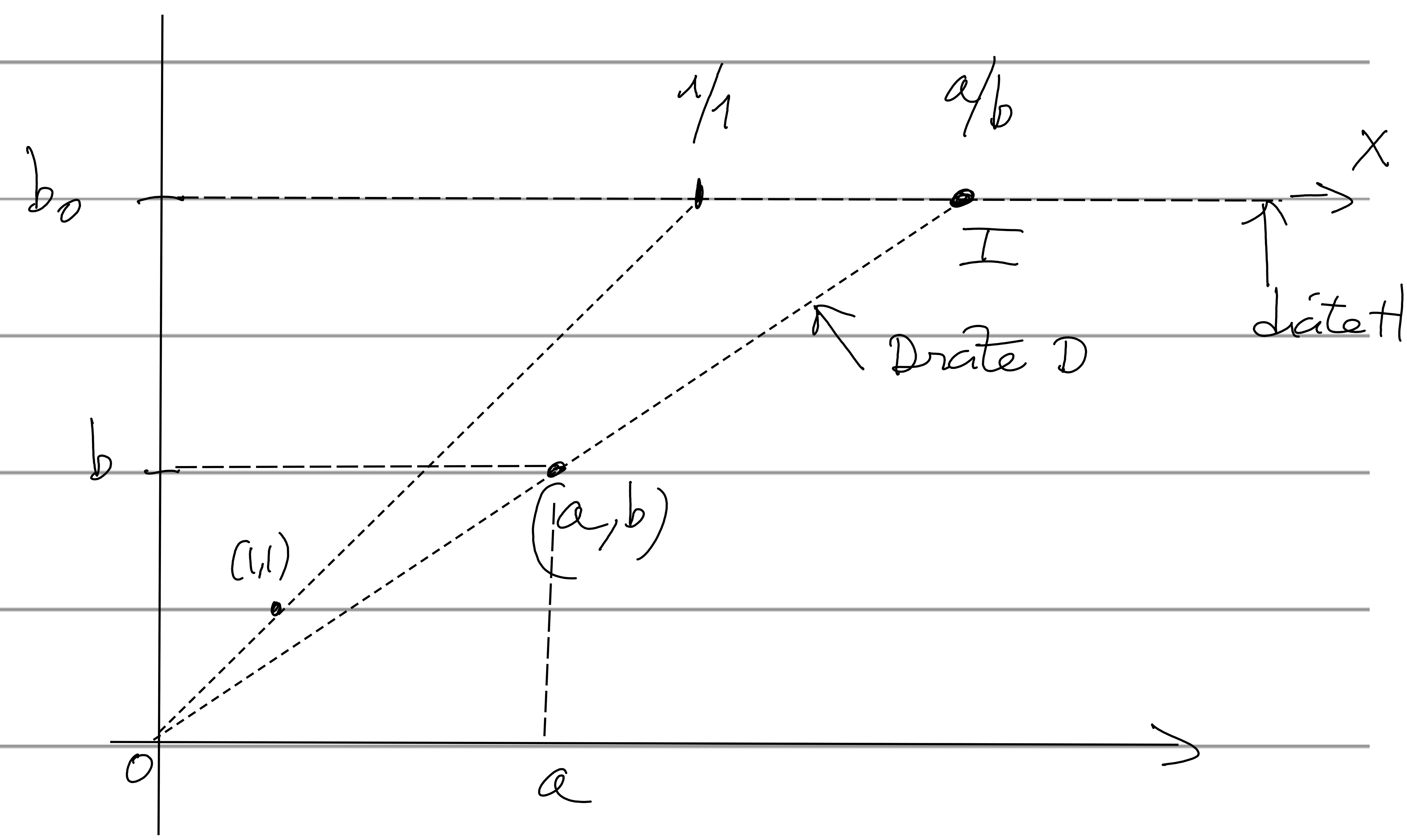
(2) D'après la liste des harmoniques,

- l'unisson est le rapport de fréquence $\frac{f_2}{f_1} = \frac{1}{1}$
  donc le couple $(1,1)$
- l'octave : $\frac{2}{1}$, quinte : $\frac{3}{2}$ quarte : $\frac{4}{3}$
- tierce majeure : $\frac{5}{4}$, tierce mineure : $\frac{6}{5}$ et $\frac{7}{6}$

triton : $\frac{7}{5}$ et $\frac{10}{7}$,

sixte majeure : $\frac{5}{3}$

(3) Sur la figure (a,b), la fraction $\frac{a}{b}$ correspond à l'inverse de la pente et donc à la position horizontale de l'intersection $I = D_{a/b} \cap H$ entre la droite D passant par $(0,0)$ et (a,b) et une droite horizontale H passant par $(0,b_0)$, $b>0$:

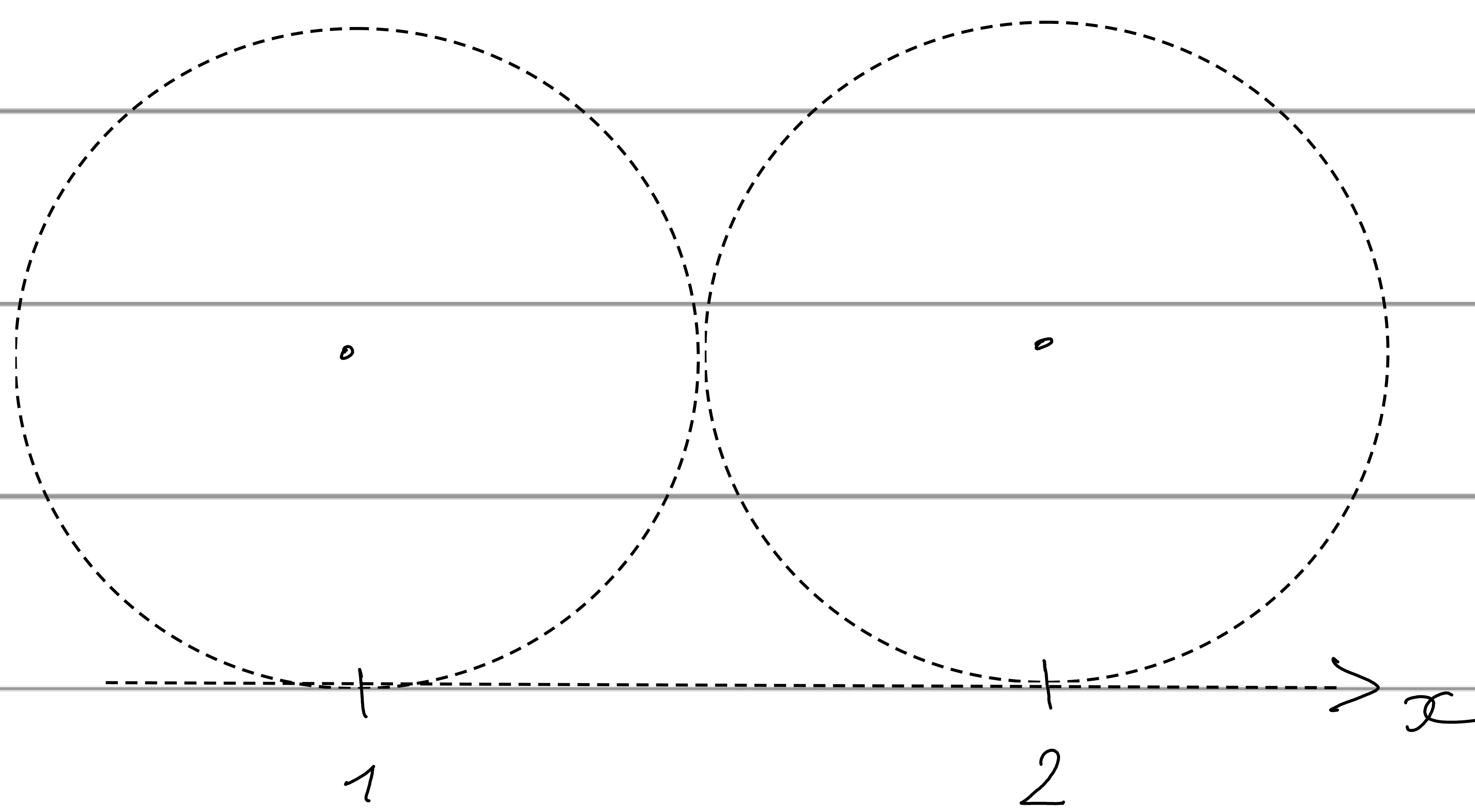


On a : $\frac{y_I}{x_I} = \frac{b}{a} \iff x_I = \frac{a}{b} y_I = \frac{a}{b} b_0$

④

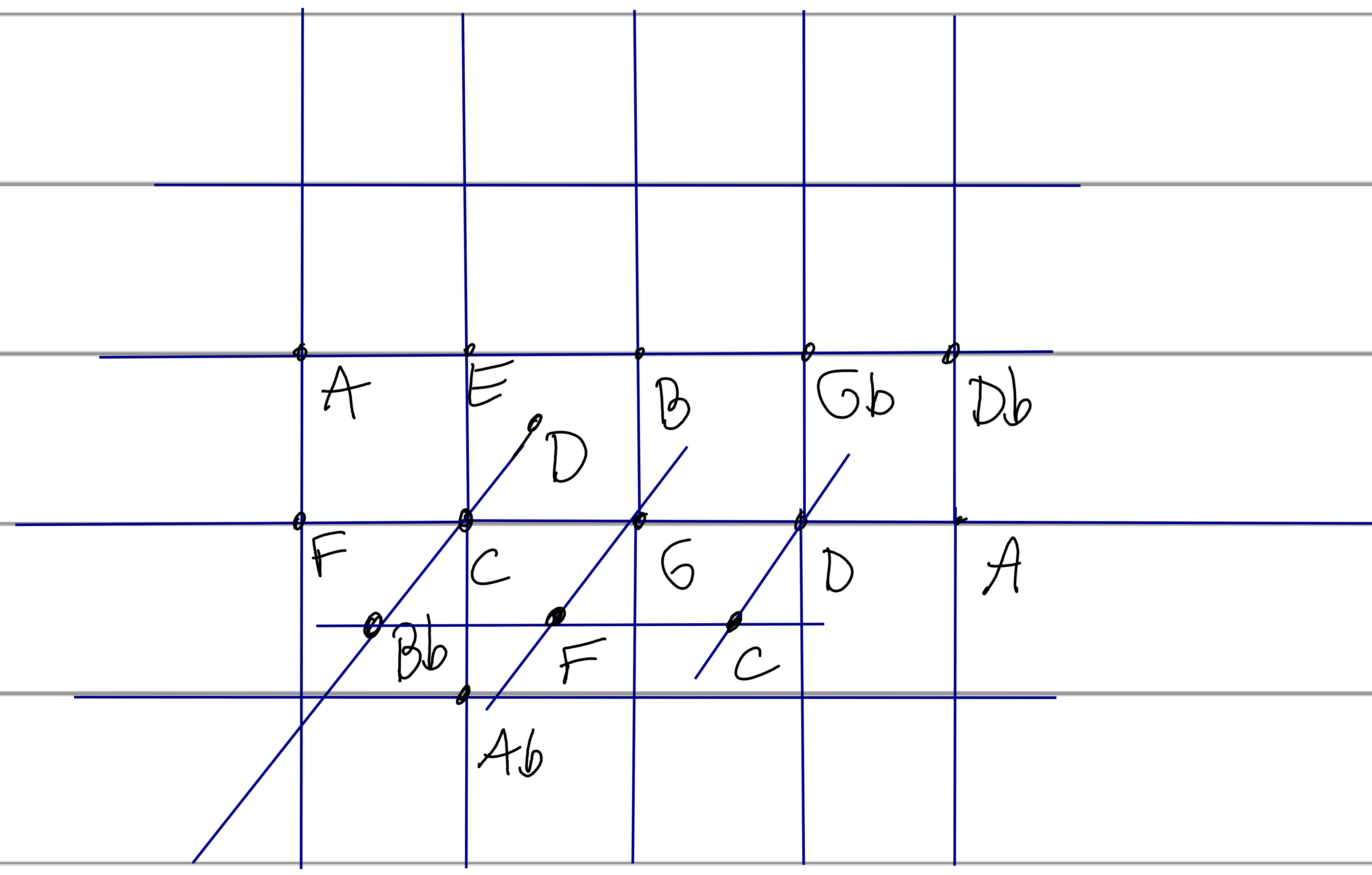
⑤ Cercles d'Appoloniens :

generation 1 : 2 cercles de rayons $R = \frac{1}{2}$, qui touchent en $x = 1$, $x = 2$

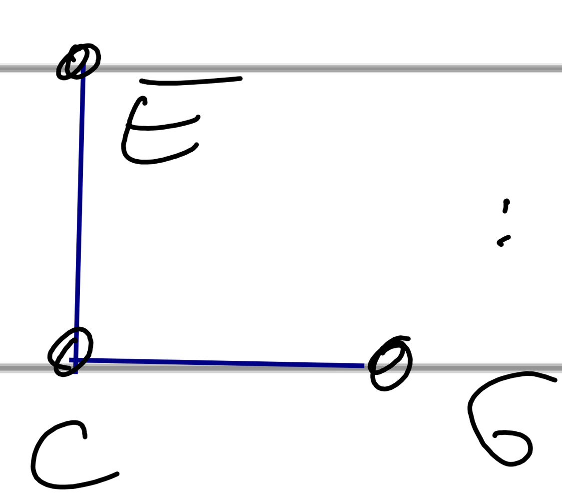


Accords justes

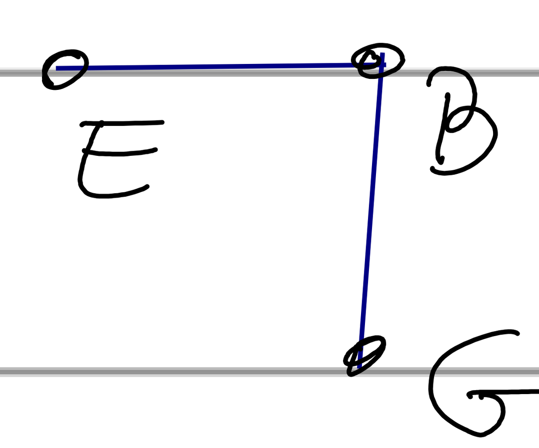
(1)



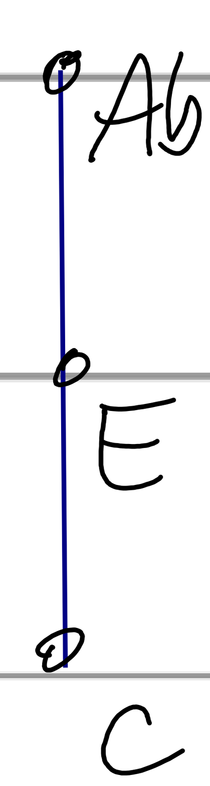
(2)



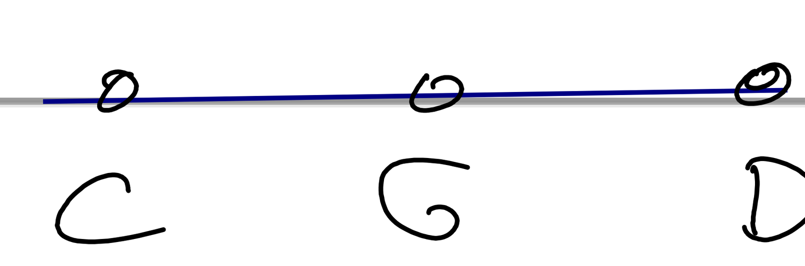
: triade majeure



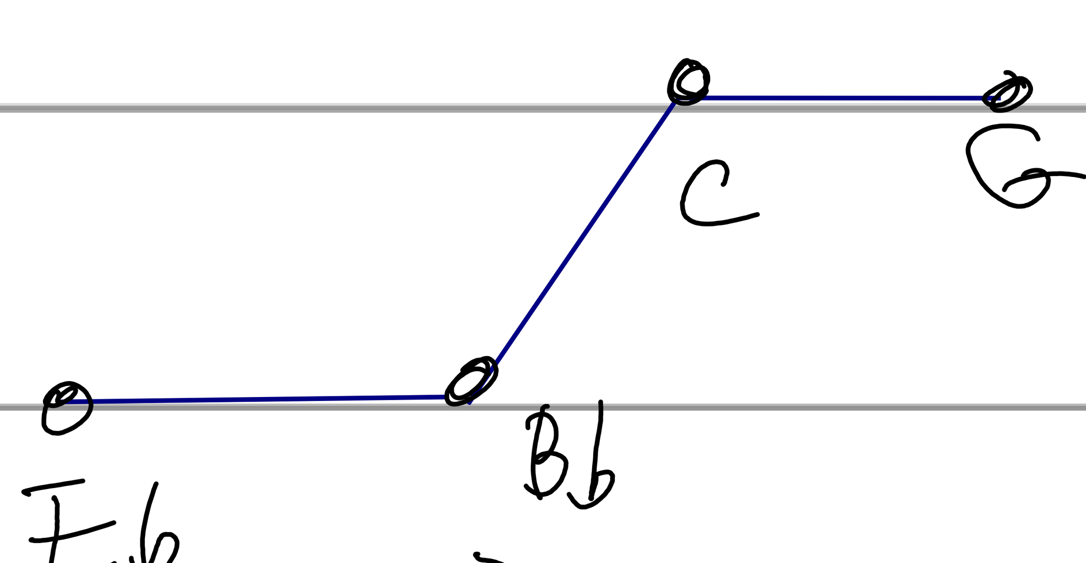
: triade mineure



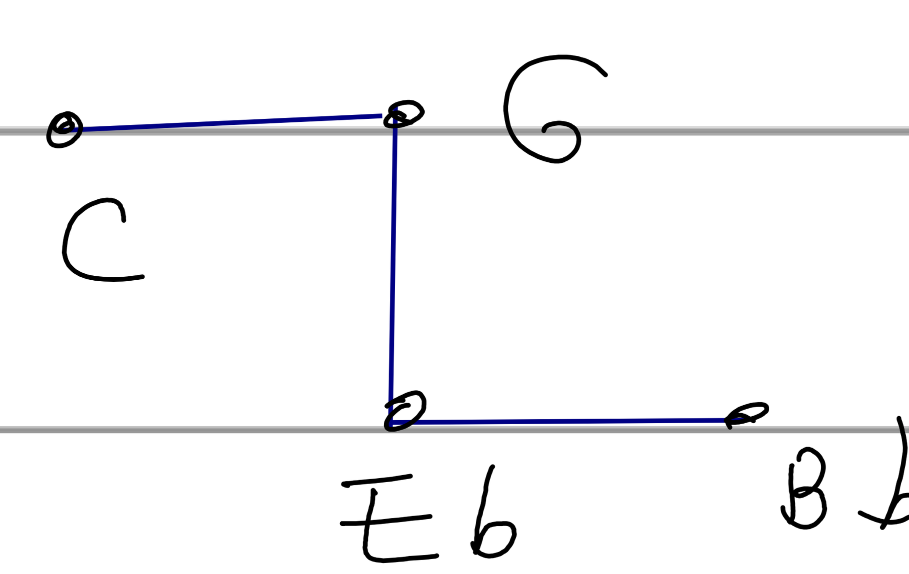
: triade augmentée



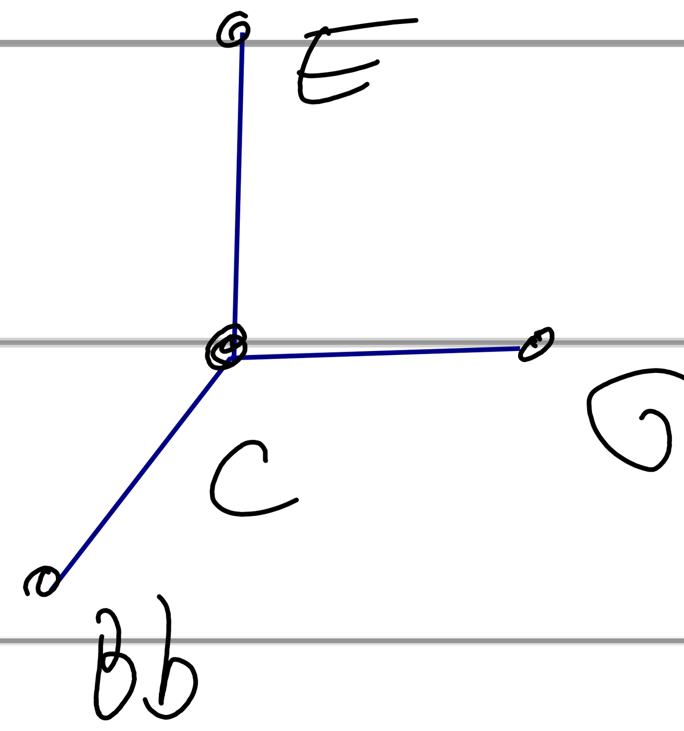
: triade sus 2



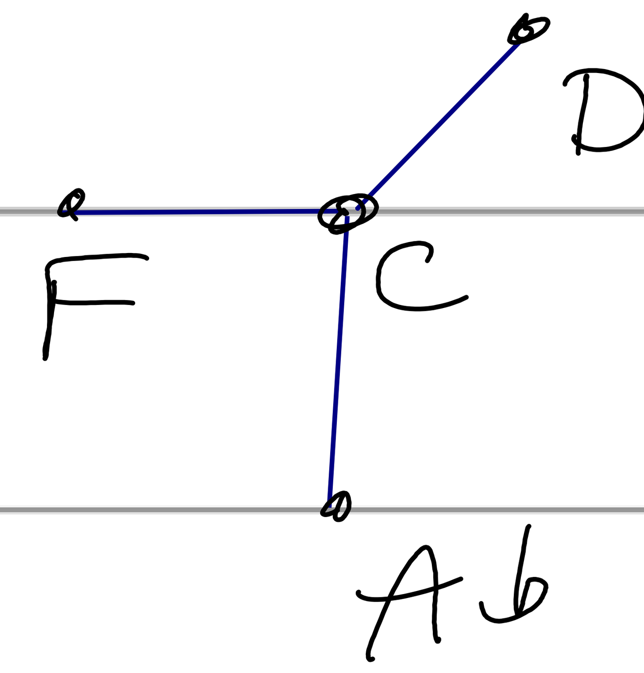
C^{m7} version 1



C^{m7} version 2

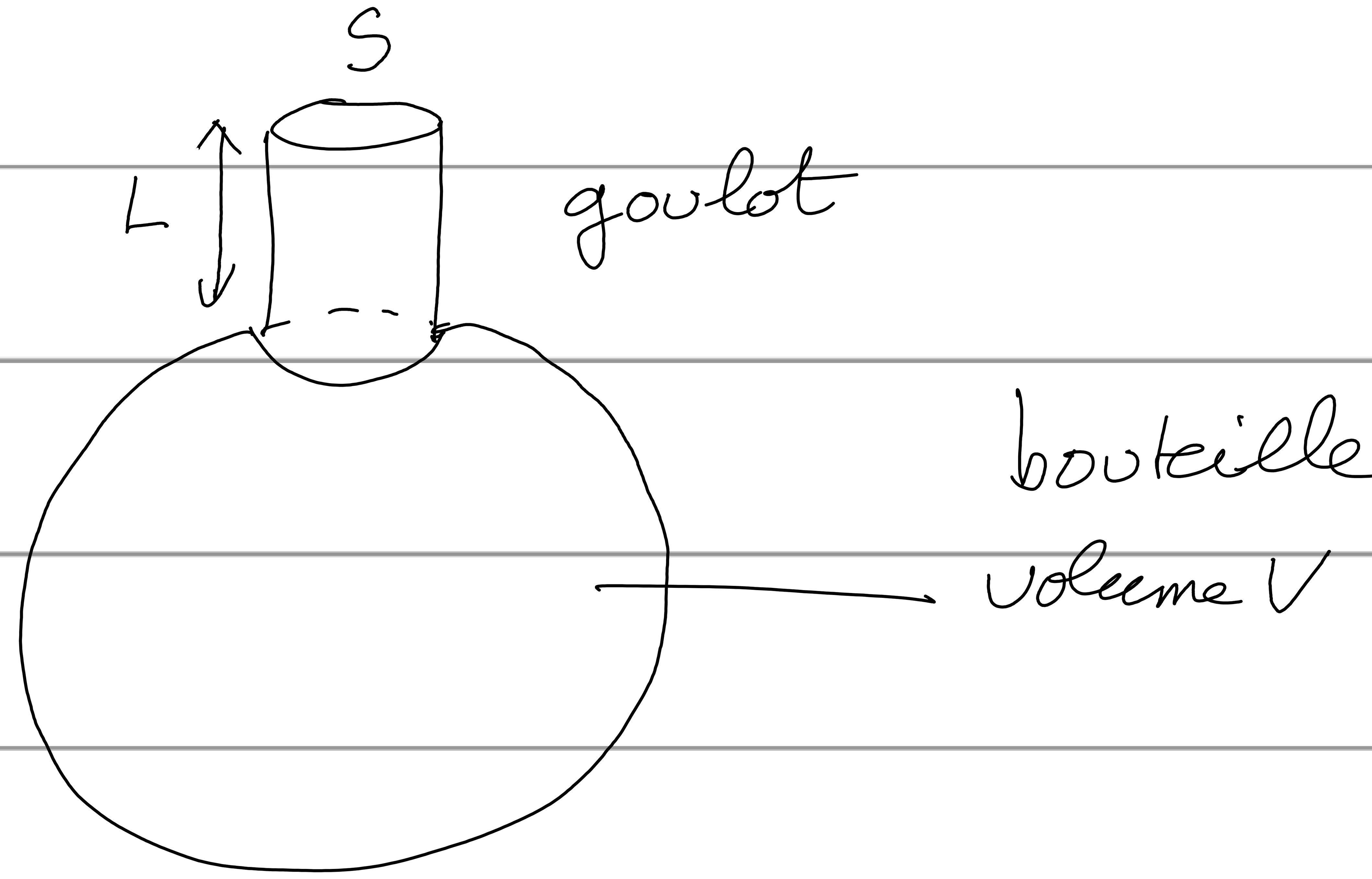


C^7



$D^{ø}$ ou F^{m6}

Résonateur de Helmholtz

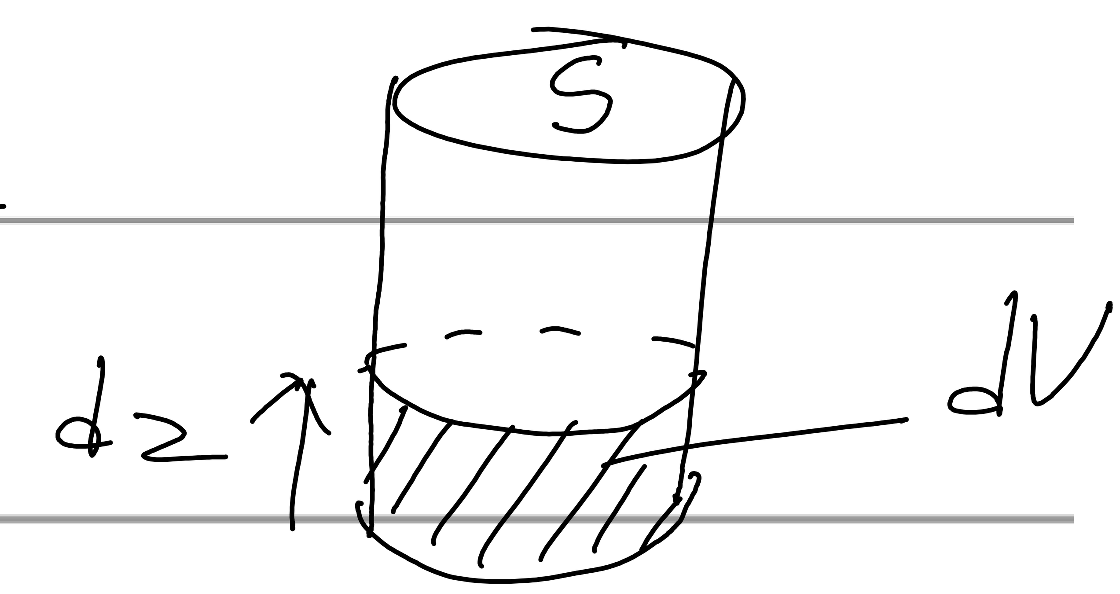


(1) Dans le goulot de volume $v = SL$,

la masse de gaz est $m = \rho v = \rho S L$

masse volumique

(2) Si l'air du goulot se déplace d'une hauteur $dz > 0$ vers le haut, l'espace dans la bouteille augmente de $dV = S\,dz$



Or $PV^\gamma = \text{cte}$

$$\ln P + \gamma \ln V = \text{cte}$$

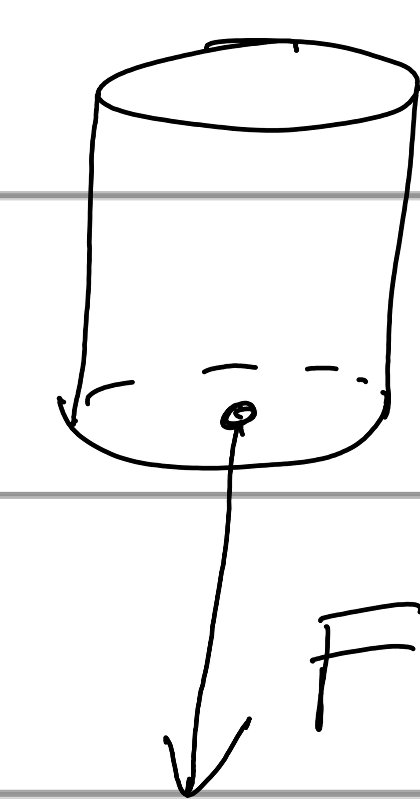
$$\Leftrightarrow \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad \Leftrightarrow dP = -\frac{\gamma P\,dV}{V}$$

$$dP = -\frac{\gamma P\,dV}{V} = -\frac{\gamma P S}{V}\,dz$$

: variation de pression dans la bouteille

qui induit une force sur le cylindre :

$$dF = S\,dP = -\frac{\gamma P S^2}{V}\,dz$$
$$= -K\,dz$$



avec la "constante de raideur"

$$K = \frac{\gamma P S^2}{V}$$

3 Equation de mouvement de Newton pour le cylindre d'air dans le goulot :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F = -Kz$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{K}{m}z = 0 \quad (*)$$

"équ. de l'oscillateur harmonique"

équ. linéaire à coefs constants.

on cherche une solution sous la forme "mode de Fourier"

$$z(t) = z_0\,e^{i\omega t}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z$$

donc $(*) \Longleftrightarrow -\omega^2 z + \frac{K}{m}z = 0 \Longleftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \left(\frac{\gamma P S^2}{V \rho S L}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma P S}{V \rho L}\right)^{1/2}$$

on pose $c = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2}$: "vitesse du son"
(voir TD précédents)

donc $\omega = c \underbrace{\left(\frac{S}{VL}\right)^{1/2}}_{\text{dépend de la géométrique de la bouteille}}$

fréquence $\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{2\pi}\left(\frac{S}{VL}\right)^{1/2}}$

4 $V = 33\ cl = 0.33 \cdot 10^{-3}\ m^3$

$L = 2\ cm = 2 \cdot 10^{-2}\ m$

$S = 1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2$

$c = 343\ m/s$,

donne $f = \frac{343}{6,28}\left(\frac{10^{-4}}{0.33 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-2}}\right)^{1/2} s^{-1} = 212\ Hz$