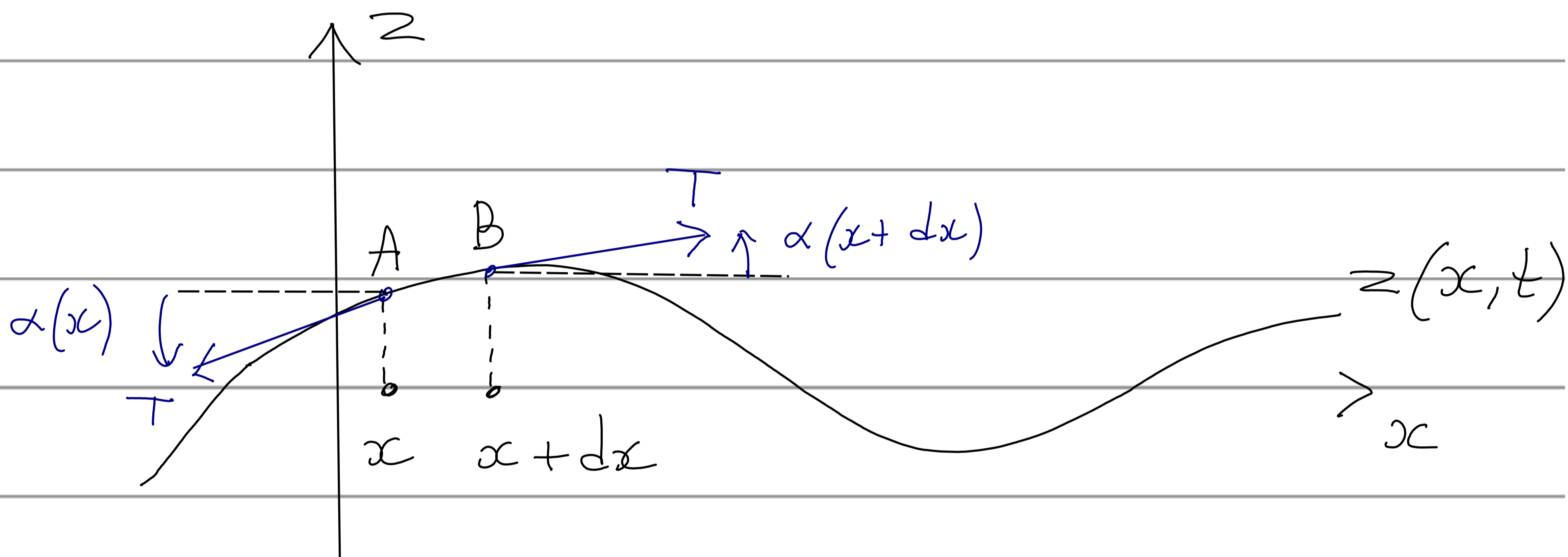


# Propagation du Son

## Vibration d'une corde

On considère une corde dans un plan.

Sa position à la date  $t$  est donnée par le graphe de la fonction  $x \in \mathbb{R} \mapsto z(x, t) \in \mathbb{R}$



on considère un petit élément de corde

entre les points  $A = (x, z(x))$

et  $B = (x + dx, z(x + dx))$

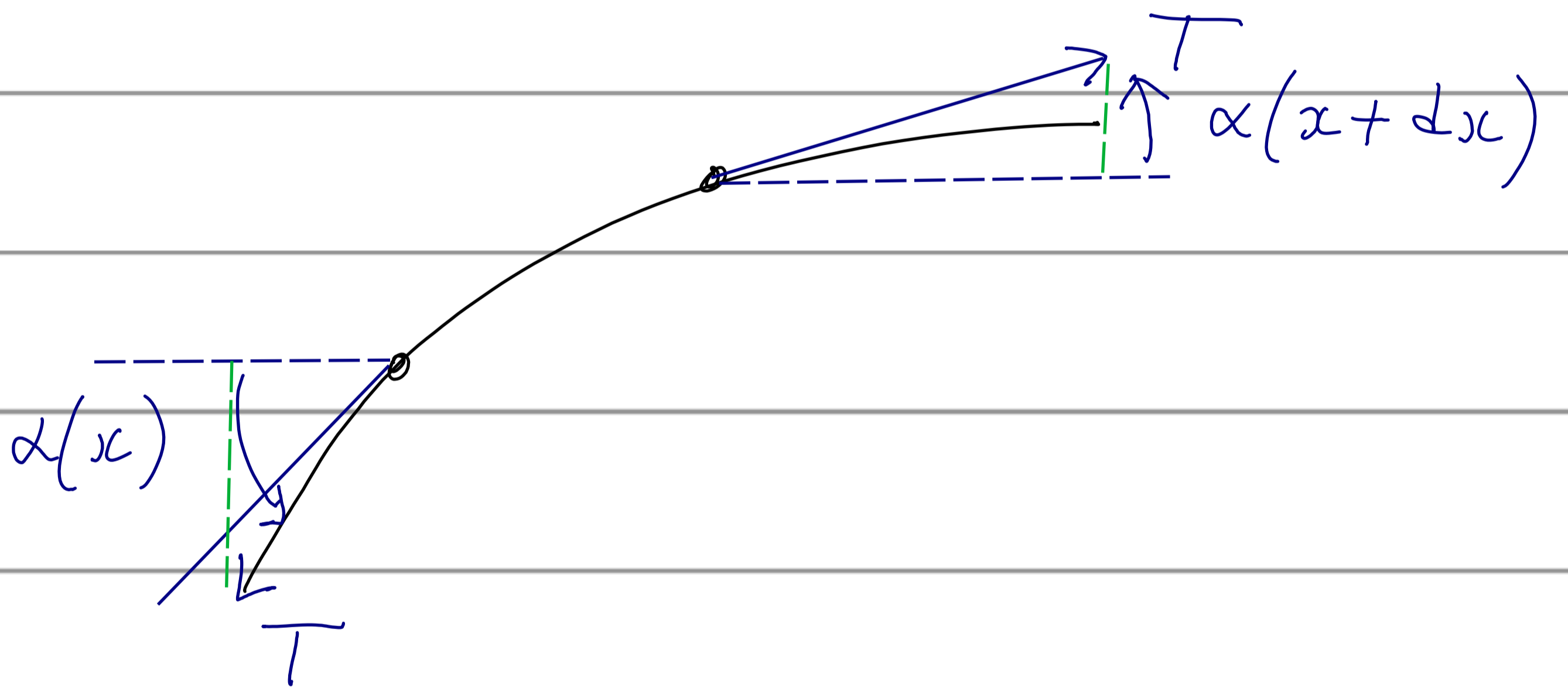
• La masse par unité de longueur est

$$\mu = \frac{dm}{dx} \Leftrightarrow dm = \mu dx : \text{masse de l'élément}$$

• on note  $\alpha(x)$  l'angle entre la tangente à la courbe et l'axe horizontal et  $T$  l'intensité de la force de tension qui est tangente à la courbe.

• L'élément de longueur subit une tension à gauche et une tension à droite dont les composantes verticales sont (en vert)

$$F_z = -T \sin(\alpha(x)) + T \sin(\alpha(x+dx))$$



L'équation de mouvement de Newton selon l'axe  $z$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} dm \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z \\ &= T (\sin(\alpha(x+dx)) - \sin(\alpha(x))) \end{aligned}$$

on a supposé  $\left| \frac{dz}{dx} \right| \ll 1$ , or  $\frac{dz}{dx} = \tan \alpha(x)$

donc  $|\alpha(x)| \ll 1$ ,

alors  $\sin \alpha(x) \approx \alpha(x) + O(\alpha^2)$

↑ terme négligeable

$$\sin(\alpha(x+dx)) - \sin(\alpha(x)) = \alpha(x+dx) - \alpha(x) + O(\alpha^2)$$

$$\left( \frac{d\alpha}{dx} \right) = \frac{\alpha(x+dx) - \alpha(x)}{dx} + O(dx) : \text{dérivée}$$

donc

$$(*) \Leftrightarrow dm \frac{d^2 z}{dt^2} = T dx \left( \frac{d\alpha}{dx} \right) + O(\alpha^2) + O(dx^2)$$

$$\Leftrightarrow \mu \frac{d^2 z}{dt^2} \approx T \left( \frac{d\alpha}{dx} \right)$$

↑  
↑  
négligeables

$$\text{or } \frac{dz}{dx} = \tan \alpha(x) = \alpha(x) + O(\alpha^2)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 z}{dx^2} \approx \frac{d\alpha}{dx} + O(\alpha)$$

$$\text{donc } (*) \Leftrightarrow \mu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \approx T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec } c^2 = T/\mu$$

"équation des ondes"

# Equation des ondes sonores

- Considérons un fluide libre (pas de force de pesanteur, ni viscosité)

Son mouvement est donc décrit par l'équation de mouvement de Euler (ie Newton) :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = - \text{grad } p$$

- Supposons  $\left\{ \begin{array}{l} p(x,t) = p_0 + p(x,t) \\ \rho(x,t) = \rho_0 + \rho(x,t) \end{array} \right.$

↑  
constantes

↑  
petites

fluctuations

On admet que le mouvement est suffisamment lent pour conserver l'entropie et cela implique

$$p(x,t) = C (\rho(x,t))^\gamma \quad \text{avec } \gamma = \frac{7}{5}$$

(pour molécules diatomiques)

①

La formule de Laplace donne

$$p = C \rho^\gamma$$

$$\Leftrightarrow \ln p = \ln C + \gamma \ln \rho$$

$$\Leftrightarrow d \ln p = \gamma d \ln \rho$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0} \quad : \text{au 1}^{\text{er}} \text{ ordre}$$

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{\rho_0}{p_0 \gamma} p \quad : \text{relie les fluctuations}$$

de densité aux fluct.  
de pression

② on a l'accélération:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v(x(t), t) = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial x_j}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial t}{\partial t} \right)$$

dérivée de  
fonction composée

$v_j$

$$= \left( \sum_{j=1}^3 \left( \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) v_j \right) + \frac{\partial v}{\partial t}$$

on a supposé  $p = p_0 + p(x, t)$

or  $\vec{\text{grad}}(p_0) = 0$   $\uparrow$  très petit

donc  $\vec{\text{grad}}(p) = \vec{\text{grad}}(p)$  très petit

donc  $\int \frac{dv}{dt} = -\vec{\text{grad}}(p)$  très petit

donc  $v$  est très petit,

donc  $\left( \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) v_j \ll \frac{\partial v}{\partial t}$

Ainsi

$$\frac{dv}{dt} \approx \frac{\partial v}{\partial t}$$

et l'équation d'Euler donne  $\int_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\text{grad} p$

(\*)

$$\text{De même, } \rho \vec{v} = \left( \rho_0 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{très petit}}}{\rho} \right) \vec{v} \approx \rho_0 \vec{v}$$

donc l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$(**) \text{ donc } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div}(\vec{v}) = 0 \text{ au 1}^{\text{er}} \text{ ordre.}$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } (*) \iff \text{div} \left( \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) &= - \text{div}(\text{grad } p) \\ &= - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 p}{\partial x_j^2} \\ &= - \Delta p \end{aligned}$$

$$\iff \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_0 \text{div}(\vec{v}) \right) = - \Delta p$$

$$\text{et avec } (**): \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p \quad (*)$$



or  $\rho = \frac{\rho_0}{p_0 \gamma} p$  donc

⊗ donne

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p \iff \frac{\rho_0}{p_0 \gamma} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p$$

$$\iff \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p \text{ avec } c^2 = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0}$$

L'équation des gaz parfait est

$$\boxtimes \quad p_0 V = n R T_0$$

↑ pression moyenne      ↑ nombre de moles dans le volume V      ← température moyenne

$$R = 8.31 \text{ J/K}$$

or la masse est  $m = M n$

↑ masse/mol      ← nombre de moles

Masse volumique moyenne  $\rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{M n}{V} \iff \frac{m}{V} = \frac{\rho_0}{M}$

donc  $\boxtimes \iff p_0 = \frac{\rho_0}{M} R T_0$

donc

$$c^2 = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} = \frac{R T_0 \gamma}{M}$$

# Valeurs numériques sur les ondes sonores

$$\textcircled{1} \quad T_0 = 20 \text{ C}^\circ = 273 + 20\text{K} = 293 \text{ K}$$

$$p_0 = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\rho_0 = \frac{M p_0}{R T_0} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{8.31 \cdot 293} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$= 1.19 \text{ kg/m}^3$$

$$c = \left( \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left( \frac{7 \cdot 10^5}{5 \cdot 1.19} \right)^{1/2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$= 343 \text{ m/s}$$

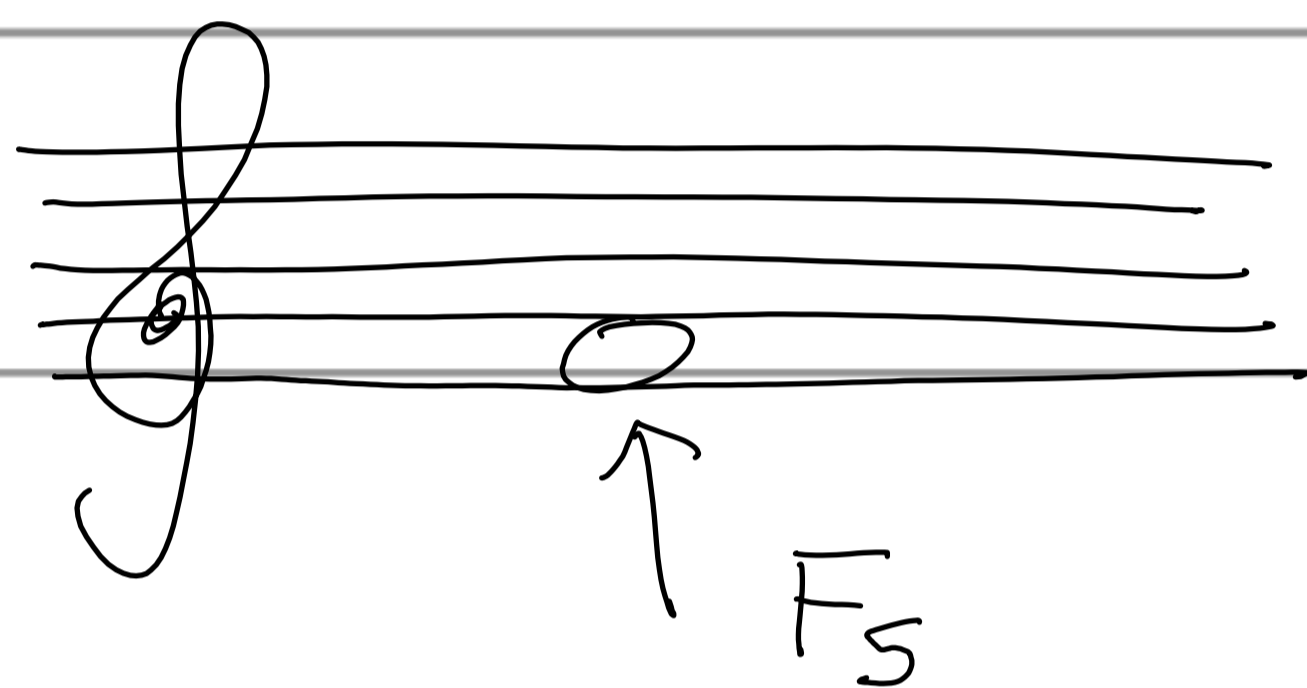


$$\textcircled{3} \quad c = \frac{d}{t} \iff d = c \cdot t$$

$$= 343 \times 10 = 3430 \text{ m}$$

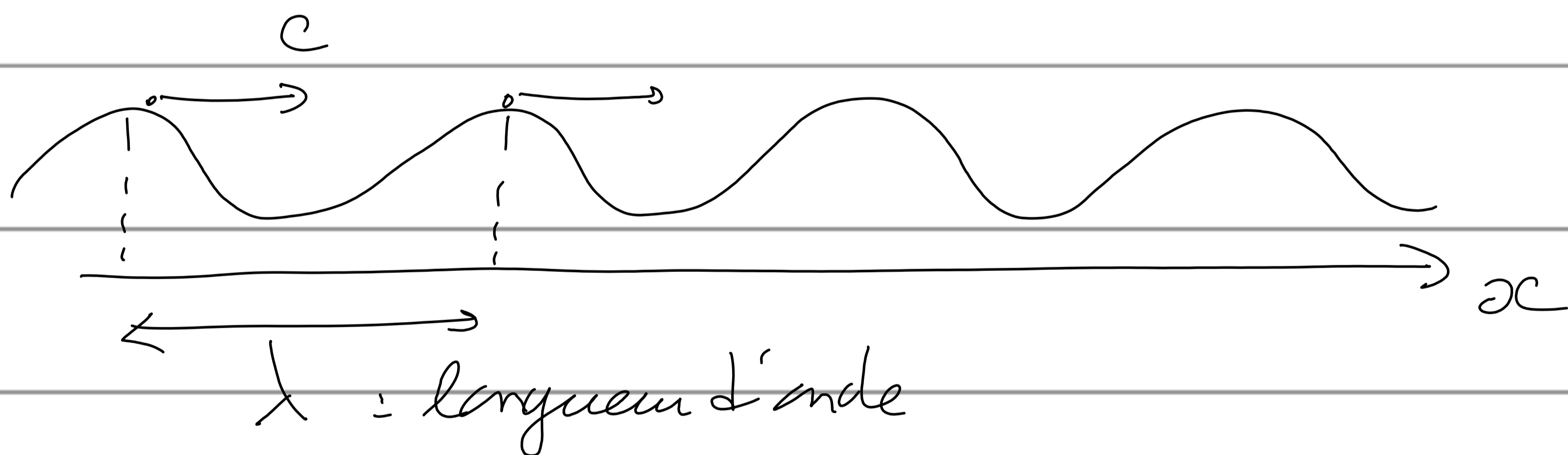
$$= 3,43 \text{ km}$$

$\textcircled{4}$  le fa  $F_5$



a une fréquence  $f_{F_5} = 343 \text{ Hz}$

onde:



donc le temps pour parcourir une longueur d'onde

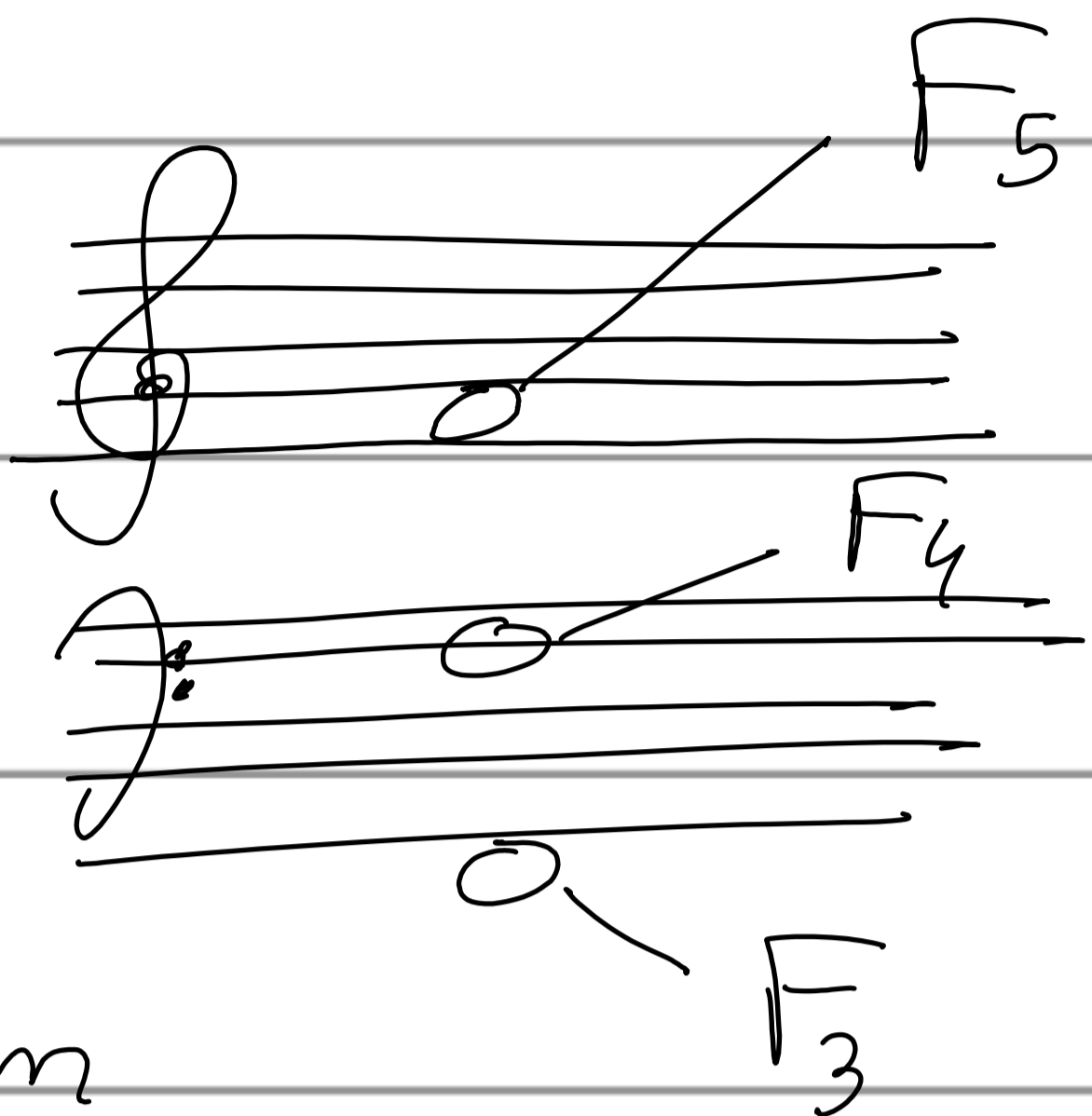
et la période  $T_{F_5} = \frac{1}{f_{F_5}}$ ,

et

$$c = \frac{\overset{\text{distance}}{\lambda}}{\underset{\text{temps}}{T}} \iff \lambda = c T = \frac{c}{f} = \frac{343}{343} \text{ m} = 1 \text{ m}$$

$$f_{F_4} = \frac{1}{2} f_{F_5} \quad : \text{car une octave en dessous}$$

$$f_{F_3} = \frac{1}{2} f_{F_4} = \frac{1}{4} f_{F_5}$$



$$\lambda_{F_4} = \frac{c}{f_{F_4}} = 2 \frac{c}{f_{F_5}} = 2 \lambda_{F_5} = 2 \text{ m}$$

$$\lambda_{F_3} = 4 \lambda_{F_5} = 4 \text{ m}$$

# Solution d'Alambert de l'équation des ondes à 1D sur $\mathbb{R}$

L'équation d'onde pour la fonction

$$(x, t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto z(x, t) \in \mathbb{R},$$

est

$$(*) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec } c > 0 \text{ fixé.}$$

(1) si  $X \in \mathbb{R} \longmapsto R(X), L(X) \in \mathbb{R}$  sont  
des fonctions arbitraires, et

$$\text{on pose } z(x, t) := R(x - ct) + L(x + ct)$$

Remarquer que à droite, ce sont des fonctions

composées, ie:  $(x, t) \longmapsto X(x, t) = x - ct$

composée avec  $X \longmapsto R(X)$

$$\text{ainsi } z(x, t) = (R \circ X)(x, t)$$

On rappelle la formule générale de dérivée de

$$\text{fonctions composées: } \frac{\partial}{\partial t} (R \circ X) = \left( \frac{dR}{dX} \right) \cdot \left( \frac{\partial X}{\partial t} \right) \text{ etc}$$

On notera  $R'(X) = \frac{dR}{dX}$  (car une seule variable)

et si  $X(x, t) = x - ct,$

$$\text{on a } \frac{\partial X}{\partial t} = -c$$

alors

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -c R'(x-ct) + c L'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 R''(x-ct) + c^2 L''(x+ct)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = R'(x-ct) + L'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = R''(x-ct) + L''(x+ct)$$

donc  $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$  : équation (\*)  
vérifiée.

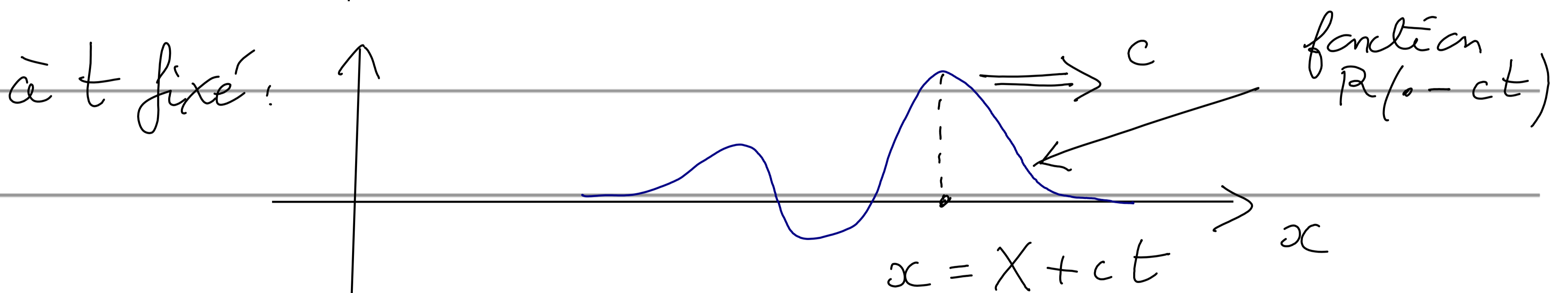
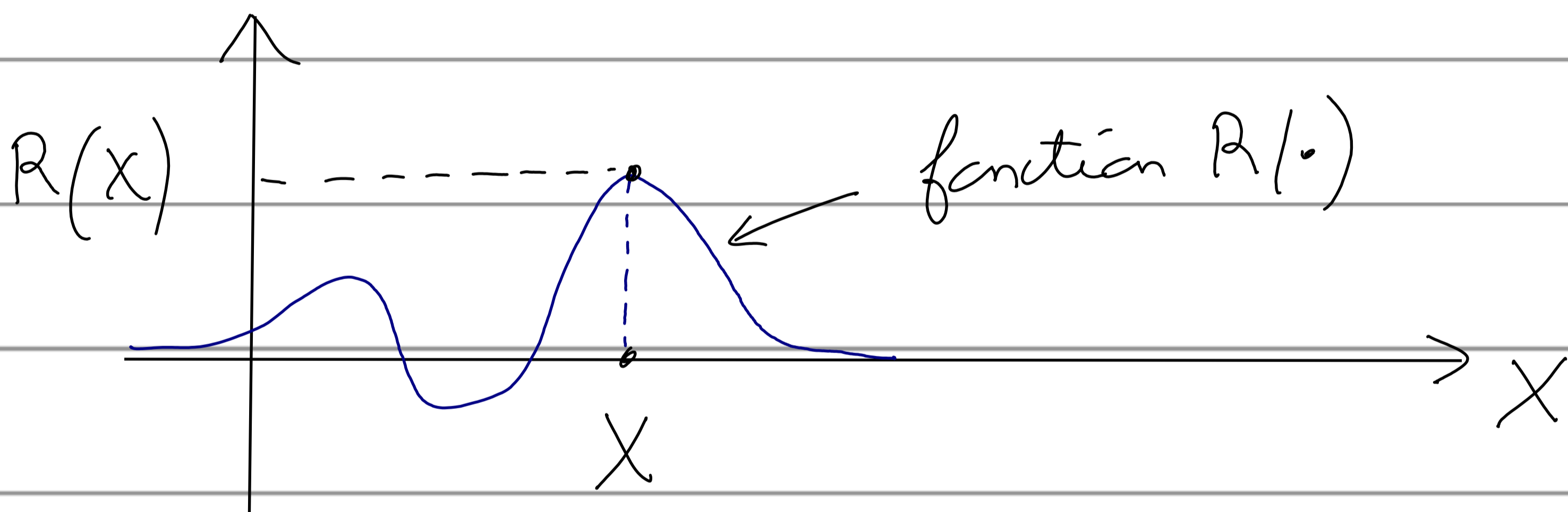
② Dans la solution ci-dessus, il y a deux termes. Le premier est l'onde :

$$(x, t) \mapsto R(x - ct)$$

Posons  $X = x - ct$  fixé : relation entre  $x$  et  $t$

$$\Leftrightarrow x = X + ct$$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = c$  : donc  $t \mapsto x(t)$  se déplace à la vitesse  $c > 0$ , i.e. vers la droite



donc l'onde  $t \mapsto R(\cdot - ct)$  se déplace vers la droite (Right) à la vitesse  $c > 0$ .



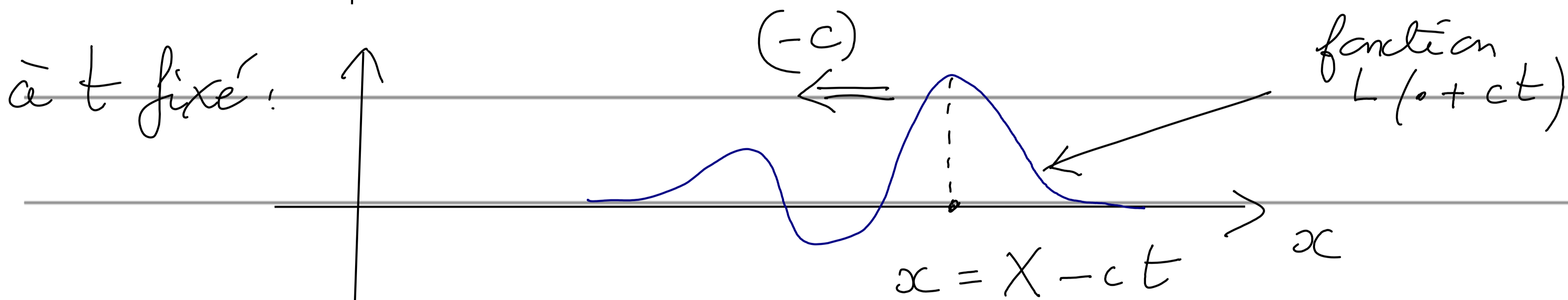
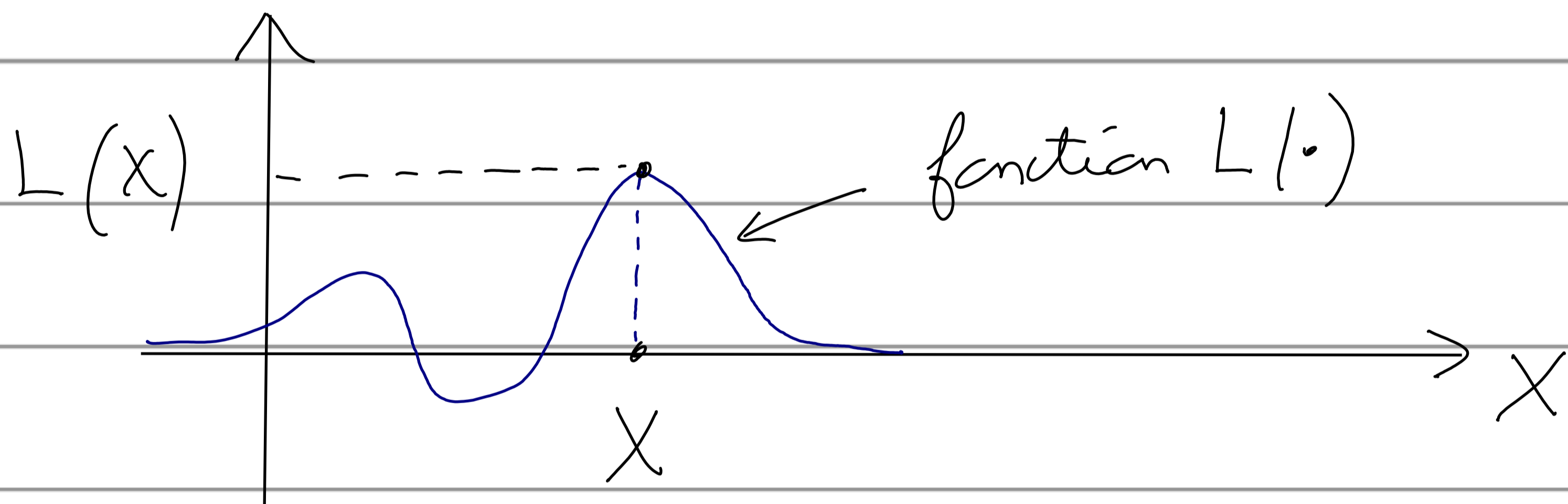
De même pour le terme

$$(x, t) \mapsto L(x + ct)$$

Posons  $X = x + ct$  fixé avec  $c > 0$ ,

$$\Leftrightarrow x = X - ct$$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -c$  : se déplace à la vitesse  $(-c) < 0$   
(vers la gauche)



donc l'onde  $t \mapsto L(\cdot + ct)$  se déplace vers  
la gauche (left) à la vitesse  $(-c) < 0$

On les appelle des ondes progressive.

La solution générale est superposition des ces  
deux ondes progressives.

③ On va tout d'abord montrer que une onde  $(x, t) \mapsto z(x, t)$  solution de l'équation 
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad (*)$$

est déterminée par les "conditions initiales" qui sont la forme à  $t=0$ :

$$x \mapsto z(x, 0)$$

et la "vitesse initiale" à  $t=0$ :

$$x \mapsto \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) (x, 0)$$

• Pour cela, on va transformer l'équation (\*) qui est du deuxième ordre en  $t$ , en deux équations de premier ordre en  $t$ , portant donc sur deux quantités, qui sont d'une part  $z(x, t)$  et d'autre part,

posons 
$$v(x, t) = \frac{\partial z}{\partial t}(x, t). \quad (\text{vitesse verticale})$$

et 
$$F(x, t) := \begin{pmatrix} z(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2 \text{ composantes}$$

• L'équation des ondes se ré-écrit :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad : \text{équation du } 2^{\text{ème}} \text{ ordre en } t$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = V \\ \frac{\partial}{\partial t} V = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \end{cases} \quad : \text{2 équations couplées, mais } 1^{\text{er}} \text{ ordre en temps}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix} F \quad : \text{équation différentielle ordinaire vectorielle du } 1^{\text{er}} \text{ ordre}$$

• L'intérêt de cette formulation

est de définir que l'état initial à  $t=0$  :

$$F(x, 0) = \begin{pmatrix} z(x, 0) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(x, 0) \end{pmatrix} \text{ détermine}$$

la solution car si  $F(x, 0) = 0, \forall x$

$$\text{alors } F(x, t) = 0, \forall x, \forall t.$$

et inversement tout état initial a une solution.

• 2<sup>ème</sup> étape : on va montrer que toute

solution  $(x, t) \mapsto z(x, t)$

peut s'écrire :

$$(*) \quad z(x, t) = R(x - ct) + L(x + ct).$$

$$(*) \Rightarrow z(x, 0) = R(x) + L(x) \quad (1)$$

$$\text{et } \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) (x, t) = -c R'(x - ct) + c L'(x + ct)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) (x, 0) &= -c R'(x) + c L'(x) \\ &= c (L(x) - R(x))' \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow L(x) - R(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) (x', 0) dx' \quad (2)$$

Par somme et différence de (1) et (2),

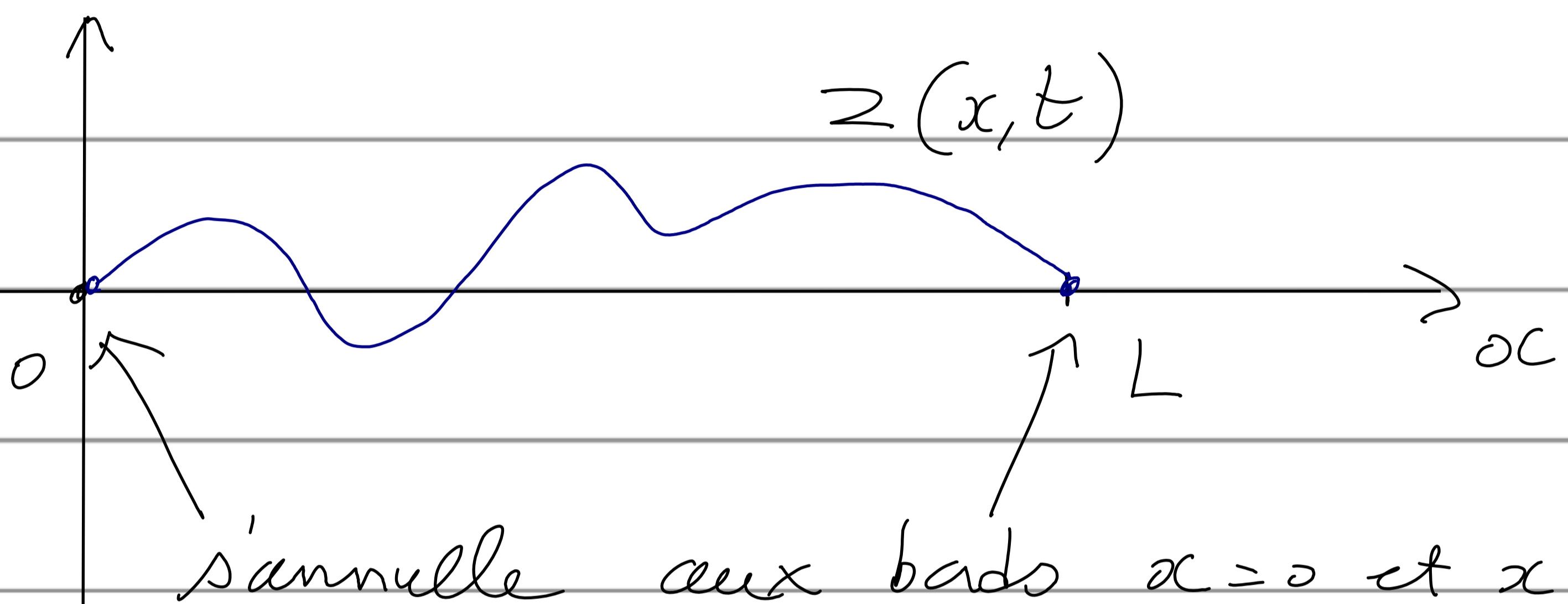
on déduit

$$L(x) = \frac{1}{2} \left( z(x, 0) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) (x', 0) dx' \right)$$

$$R(x) = \frac{1}{2} \left( z(x, 0) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) (x', 0) dx' \right)$$

# Solution d'Alembert de l'équation des ondes 1D sur un segment $[0, L]$

à  $t$  fixé



① Toute solution

de l'équation d'onde est de la forme suivante  
(d'après un exercice précédent sur  $\mathbb{R}$ )

$$z(x,t) = R(x-ct) + L(x+ct)$$

et les conditions au bord  $x=0$  et  $x=L$  imposent :

↙ en  $x=0$

$$0 = z(0,t) = R(-ct) + L(ct), \quad \forall t,$$

$$\Leftrightarrow L(ct) = -R(-ct), \quad \forall t$$

$$\Leftrightarrow L(X) = -R(-X), \quad \forall X$$

ce qui signifie que la fonction  $L$  est déterminée  
par la fonction  $R$  et donc (avec  $X = x+ct$  ci-dessus)

$$z(x,t) = R(x-ct) - R(-x-ct)$$

↙ en  $x=L$

$$\text{et } 0 = z(L,t) = R(L-ct) - R(-L-ct), \quad \forall t$$

$$\Leftrightarrow \text{en posant } X = -L-ct \Leftrightarrow X+2L = L-ct$$

cela donne

$$R(X+2L) = R(X), \quad \forall X$$

② on a montré que

$$z(x, t) = R(x - ct) - R(-x - ct),$$

avec une fonction  $X \mapsto R(X)$  vérifiant

$$R(X + 2L) = R(X), \quad \forall X. \quad "2L \text{ périod.}"$$

Cela implique :

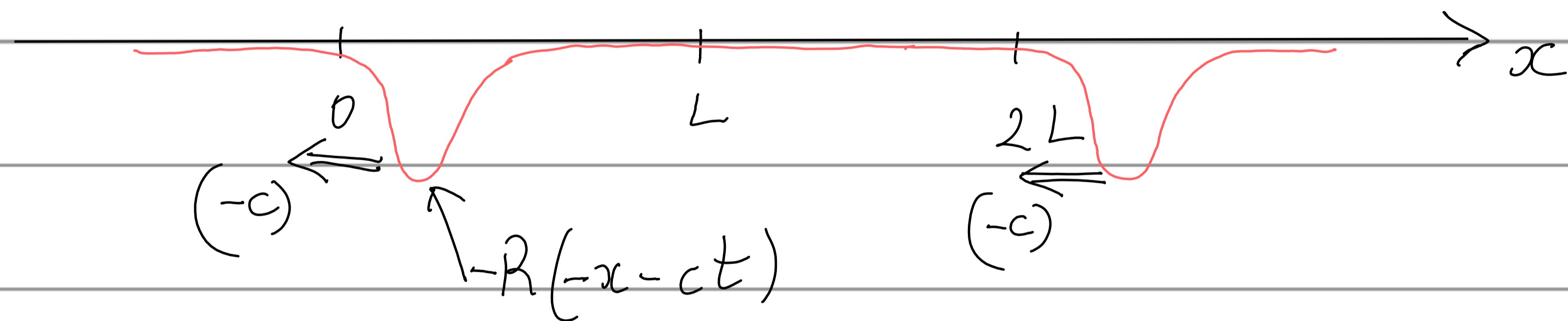
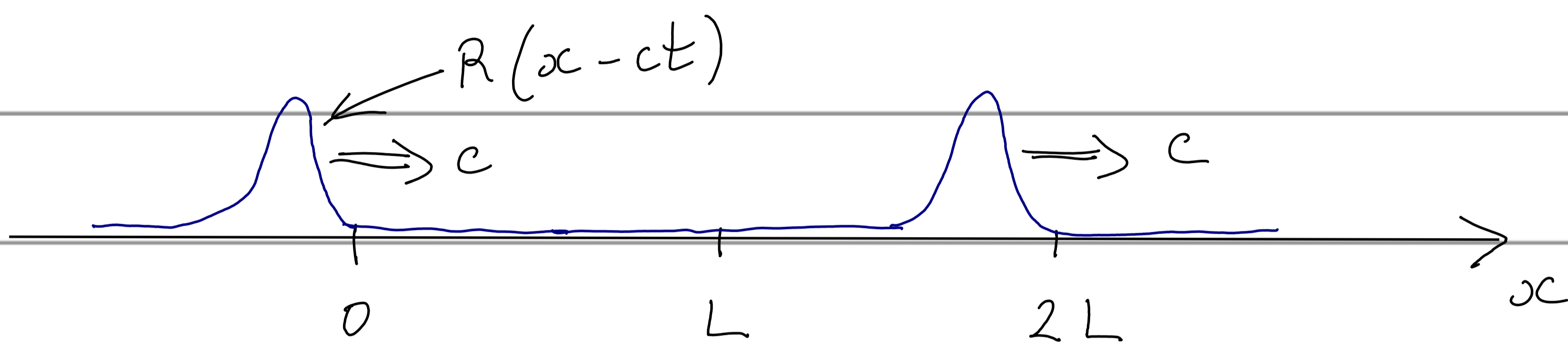
$$\begin{aligned} \forall x, \forall t, \quad z\left(x, t + \frac{2L}{c}\right) &= R\left(x - ct - c\left(\frac{2L}{c}\right)\right) \\ &\quad - R\left(-x - ct - c\left(\frac{2L}{c}\right)\right) \\ &= R(x - ct - 2L) - R(-x - ct - 2L) \\ &= R(x - ct) - R(-x - ct) \quad \text{car } R \text{ est} \\ &= z(x, t) \quad \text{2L périodique} \end{aligned}$$

ce qui signifie que le signal  $t \mapsto z(x, t)$

est périodique de période  $T = \frac{2L}{c}$  en tout point  $x$ .

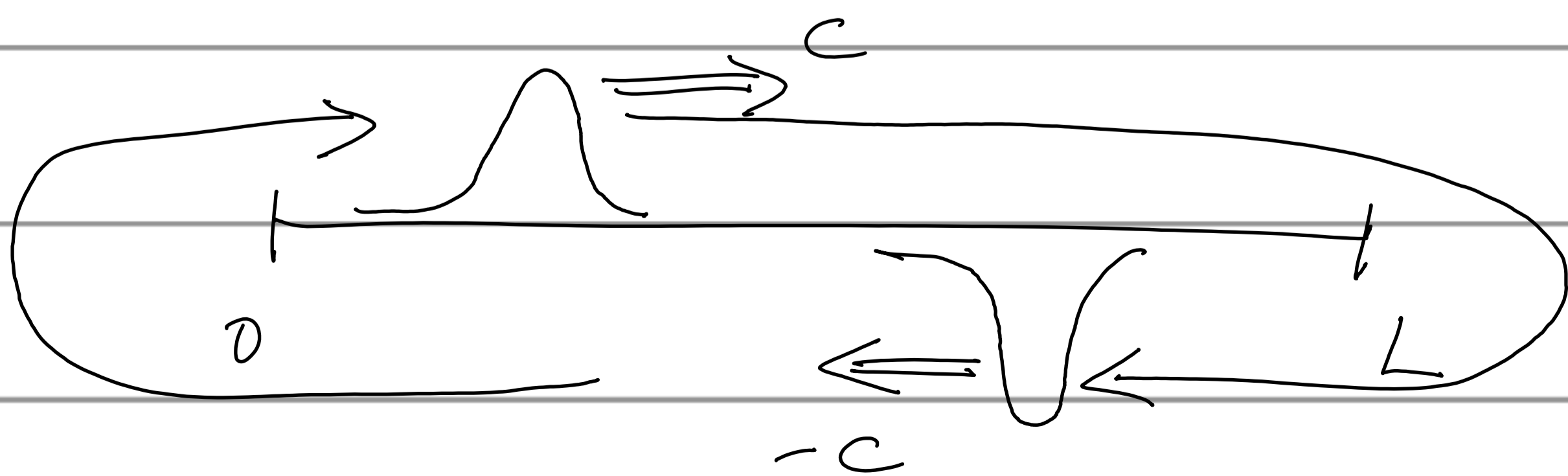
interprétation : à  $t$  fixé :

voici un schéma des fonctions  $x \mapsto R(x-ct)$   
et  $x \mapsto -R(-x-ct)$



on observe que la superposition de ces deux fonctions  
donne une fonction  $z(x,t)$  qui s'annule  
en  $z=0$  et  $z=L$  pour tout temps  $t$ .

De plus dans le segment  $x \in [0, L]$ ,  
l'onde  $z(x,t)$  semble rebondir sur les bords :



longueur aller + retour =  $2L$  donc période  $T$  tq  $c = \frac{2L}{T} \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{2L}{c}}$



# Solution de Fourier de l'équation des ondes à 1D. sur $\mathbb{R}$

On considère une fonction

$$x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \longrightarrow z(x, t) \in \mathbb{R}$$

solution de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

① Soit  $k \in \mathbb{R}$  (vecteur d'onde)  
 $\omega \in \mathbb{R}$  (fréquence)

et

$$z_{k, \omega}(x, t) := e^{i(kx - \omega t)}$$

"ondes planes"

ou "Mode de Fourier"

on calcule  $\frac{\partial z_{k, \omega}}{\partial t} = -i\omega e^{i(kx - \omega t)}$

$$\frac{\partial^2 z_{k, \omega}}{\partial t^2} = (-i\omega)^2 e^{i(kx - \omega t)} = -\omega^2 z_{k, \omega}$$

et  $\frac{\partial^2 z_{k, \omega}}{\partial x^2} = -k^2 z_{k, \omega}$

donc

$$\frac{\partial^2 z_{k\omega}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z_{k\omega}}{\partial x^2} = (-\omega^2 + c^2 k^2) z_{k\omega} = 0$$

↑  
ci dessus

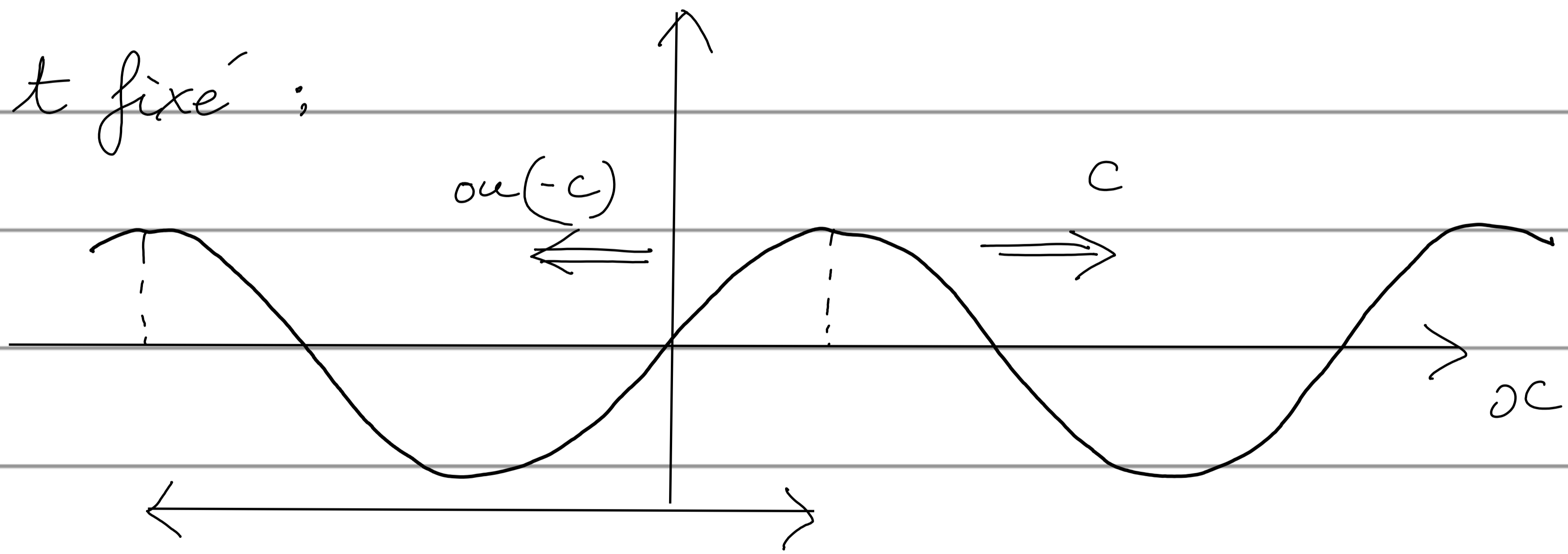
↑  
condition  
que l'on souhaite

$$\Leftrightarrow \omega^2 = c^2 k^2$$

$$\Leftrightarrow |\omega| = c |k| \quad \text{"relation de dispersion"}$$

$$(2) \operatorname{Re}(z_{k,\omega}(x,t)) = \cos(kx - \omega t)$$

à  $t$  fixé :

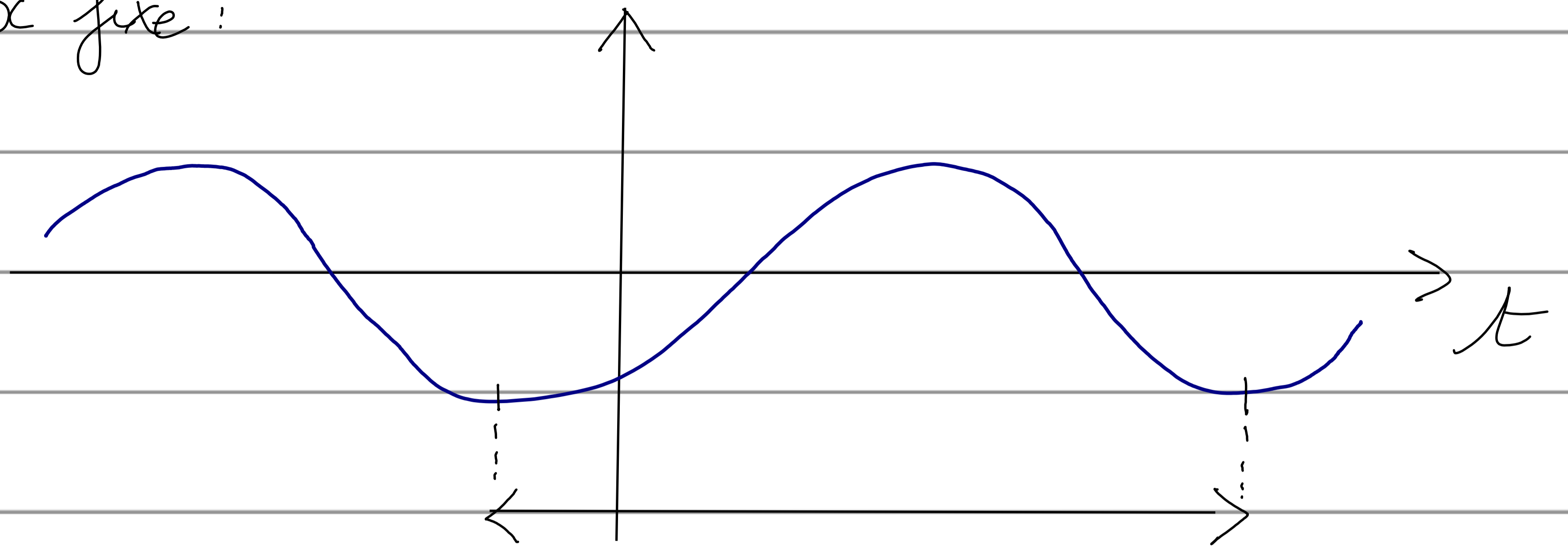


$$\lambda = \frac{2\pi}{k} : \text{longueur d'onde}$$

On a  $\frac{|\omega|}{|k|} = c$  si  $\frac{\omega}{k} = +c$  alors l'onde se déplace vers la droite à la vitesse  $+c$

si  $\frac{\omega}{k} = -c$  alors vers la gauche à la vitesse  $-c$

$\dot{a}$   $x$  fixe:



$$T = \frac{2\pi}{\omega} : \text{période}$$

# Solution de Fourier de l'équation des ondes 1D sur un segment $x \in [0, L]$

On suppose que la fonction

$$x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \longrightarrow z(x, t) \in \mathbb{R}$$

est solution de l'équation des ondes

$$(*) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

avec les conditions en  $x=0$  et  $x=L$  :

$$z(0, t) = 0, \quad z(L, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

① On va vérifier que

$$z(x, t) = \cos(\omega_m t + \alpha_m) \sin(k_m x)$$

est solution, si  $k_m = n \frac{\pi}{L}$  et  $\omega_m = c k_m$ .

En effet

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega_m^2 z, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -k_m^2 z$$

donc (\*) est vérifié.

et  $z(0, t) = 0$  et  $z(L, t) = 0$  car  $\sin(k_m L) = \sin(n\pi) = 0$

② A l'exercice précédent, on a vu  
qu'un mode de Fourier  $Z_{k,\omega}(x,t) = e^{i(kx - \omega t)}$   
est solution ssi  $\omega = \pm ck$ : deux possibilités.

On va chercher une superposition:

$$Z(x,t) = Z_+ e^{i(|k|x + \omega t)} + Z_- e^{i(-|k|x + \omega t)}$$

avec  $Z_+, Z_- \in \mathbb{C}$  : amplitudes

de sorte que les conditions limites sont vérifiées.

$$\begin{aligned} 0 = Z(0,t) &= Z_+ e^{i\omega t} + Z_- e^{i\omega t} \\ &= (Z_+ + Z_-) e^{i\omega t}, \quad \forall t \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow Z_- = -Z_+$$

$$\begin{aligned} \text{et } 0 = Z(L,t) &= Z_+ e^{i(|k|L + \omega t)} + Z_- e^{i(-|k|L + \omega t)} \\ &= Z_+ \left( e^{i|k|L} - e^{-i|k|L} \right) e^{i\omega t}, \quad \forall t \\ &= Z_+ 2i \sin(|k|L) e^{i\omega t} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin(|k|L) = 0$$

$$\Leftrightarrow |k|L = \pi m, \quad \text{avec } m \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\Leftrightarrow |k| = k_m = \frac{\pi m}{L} \quad \text{avec } m \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

alors  $|\omega| = \omega_m = c k_m = \frac{\pi c}{L} m$   
 $= m \omega_1, \quad \text{avec } \omega_1 = \frac{\pi c}{L}$   
"fréquence fondamentale"

Cela donne pour  $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$  : harmonique

$$z(x, t) = z_+ e^{i(k_m x + \omega_m t)} - z_+ e^{i(-k_m x + \omega_m t)}$$
$$= z_+ 2i \sin(k_m x) e^{i\omega_m t}$$

avec  $z_+ \in \mathbb{C}$  arbitraire,

et l'onde physique est réelle :

$$\text{Re}(z(x, t)) = V_m \cos(\omega_m t + \alpha_m) \sin(k_m x)$$

avec  $V_m e^{i\alpha_m} = 2i z_+ \in \mathbb{C}$

# Applications numériques

①  $L = 0,56 \text{ m}$ ,  $f = 110 \text{ Hz} = 110 \text{ s}^{-1}$



or  $c = \frac{2L}{T}$  ← longueur aller-retour du signal périodique

$$= f 2L = 110 \times 2 \times 0,56 \text{ m/s}$$
$$= 123,2 \text{ m/s}$$

$$f_1 = 110 \text{ Hz},$$

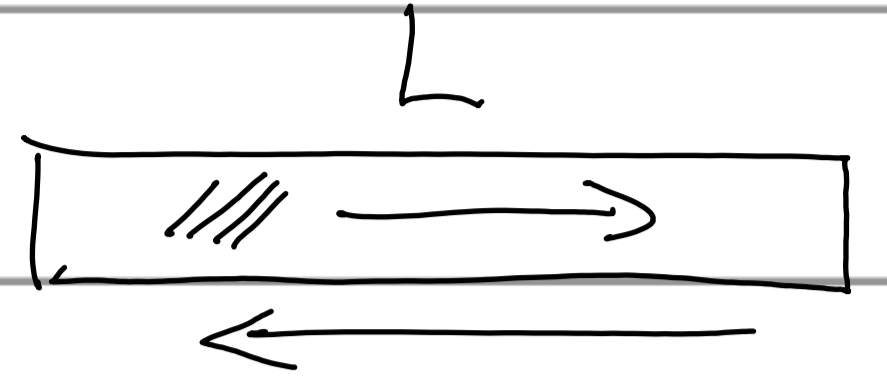
$$f_m = m f_1 \text{ donc } f_2 = 220 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 330 \text{ Hz}$$

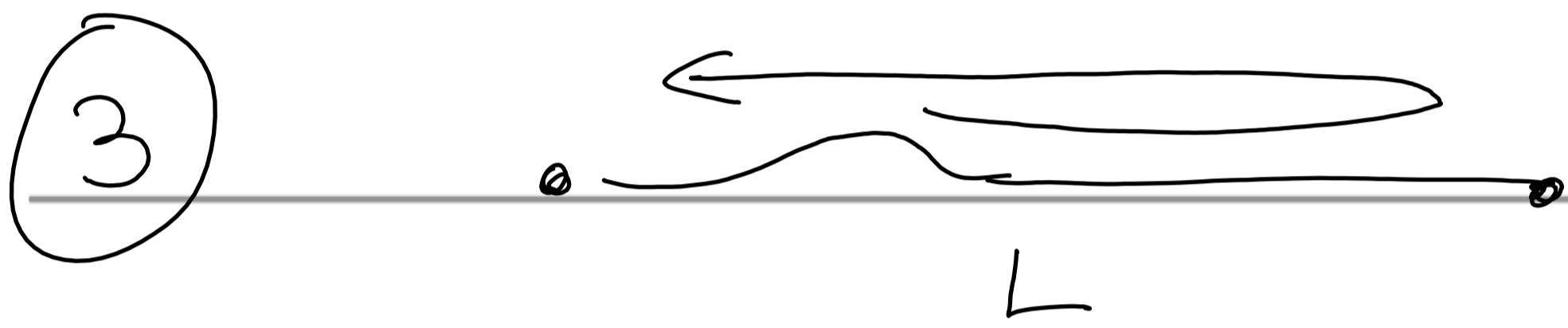
$$f_4 = 440 \text{ Hz}, \quad f_5 = 550 \text{ Hz}$$

②  $c = \frac{2L}{T}$  ← longueur aller-retour du signal périodique  
 ← période

$= f 2L$  car  $f = \frac{1}{T}$



donc  $L = \frac{c}{2f} = \frac{343 \text{ m/s}}{2 \times 343 \text{ s}^{-1}} = 0,5 \text{ m}$



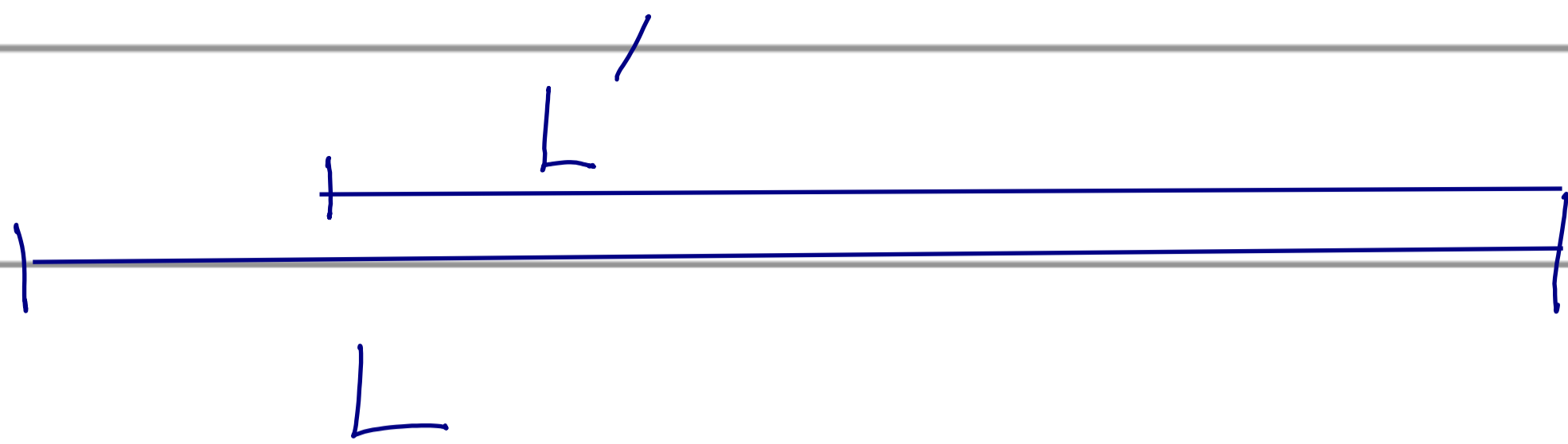
$v = \frac{2L}{T}$  ← longueur aller-retour du signal périodique  
 ← période

$= f 2L$  car  $f = \frac{1}{T}$

$= 150 \text{ s}^{-1} \times 2 \times 0,5 \text{ m} = 150 \text{ m/s}$



④



$$\text{on souhaite } f' = \frac{5}{4} f \quad \Leftrightarrow \frac{f}{f'} = \frac{4}{5}$$

$$\text{or } c = \frac{2L}{T} = f 2L = f' 2L'$$

$$\text{donc } L' = \frac{f}{f'} L = \frac{4}{5} L = \frac{4}{5} \times 0,5 = 0,4 \text{ m}$$

⑤  $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f_{A_5}$

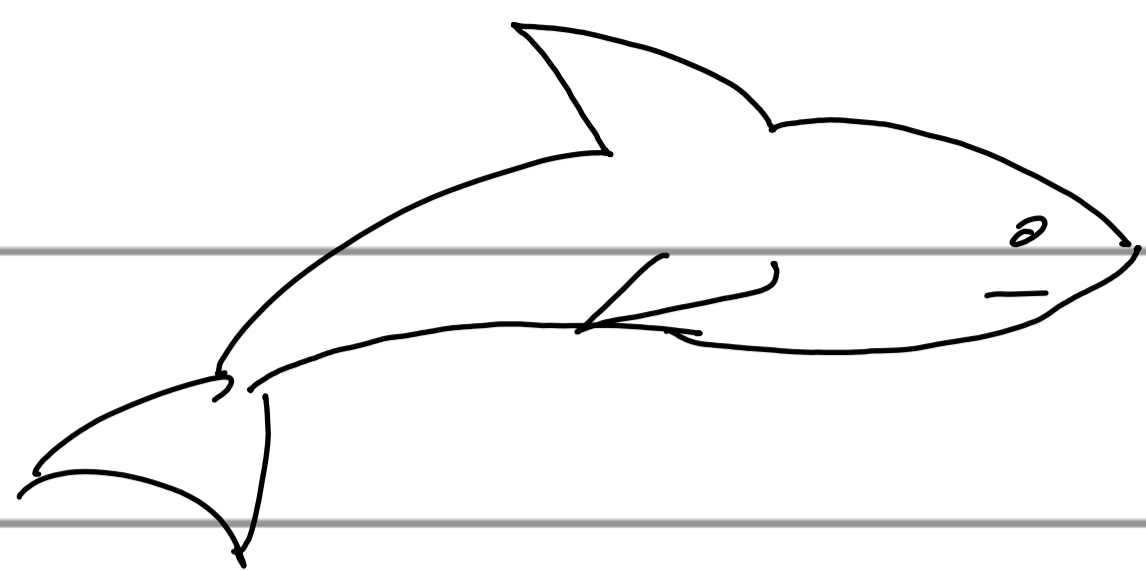
$$\Leftrightarrow \lambda_{A_5} = \frac{c}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{440 \text{ s}^{-1}} = 0,80 \text{ m}$$

Pour les autres la :

$$\bullet f_{A_6} = 2 f_{A_5} = 880 \text{ Hz}, \quad \lambda_{A_6} = \frac{343}{880} = \frac{\lambda_{A_5}}{2} = 0,4 \text{ m}$$

$$\bullet f_{A_7} = 4 f_{A_5}, \quad \lambda_{A_7} = \frac{\lambda_{A_5}}{4} = 0,20 \text{ m}$$

6



$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{1500 \text{ m/s}}{150 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}} = 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

• Pour les Marsouins  $f \geq 10^5 \text{ Hz}$

$$\lambda = \frac{c}{f} \leq \frac{1500 \text{ m/s}}{10^5 \text{ s}^{-1}} = 0,015 \text{ m} = 1,5 \text{ cm}$$

Pour les Orques,  $f \leq 10^5 \text{ Hz}$ ,

$$\lambda = \frac{c}{f} \geq 1,5 \text{ cm}$$

# Equation des ondes sur le rectangle $[0, L_1] \times [0, L_2]$

Domaine rectangulaire :

$$x = (x_1, x_2) \in \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$$

$$\text{avec } L_1, L_2 > 0$$

Equation des ondes pour  $(x, t) \mapsto v(x, t) \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \Delta v = 0$$

$$\text{avec } \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$$

① Montrons que pour tout entiers

$$m_1 \geq 1, \quad m_2 \geq 2,$$

l'expression suivante est solution :

$$v(x, t) = \cos(\omega_m t + \varphi) \overset{\text{arbitraire}}{\sin(k_{m_1} x_1)} \sin(k_{m_2} x_2)$$

$$\text{avec } k_{m_1} = m_1 \frac{\pi}{L_1}, \quad k_{m_2} = m_2 \frac{\pi}{L_2}$$

$$\omega_m = c |k_m|, \quad |k_m|^2 = k_{m_1}^2 + k_{m_2}^2$$

$$\text{En effet } \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\omega_m^2 v$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = -k_{m_j}^2 v \quad \text{donc } \Delta v = -|k_m|^2 v$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} - c^2 \Delta v = \underbrace{(-\omega_m^2 + c^2 |k_m|^2)}_0 v = 0$$

c'est à dire que l'équation d'onde est vérifiée.

De plus sur le bord de  $\Omega$ :

• si  $x_1 = 0$  ou  $x_2 = 0$

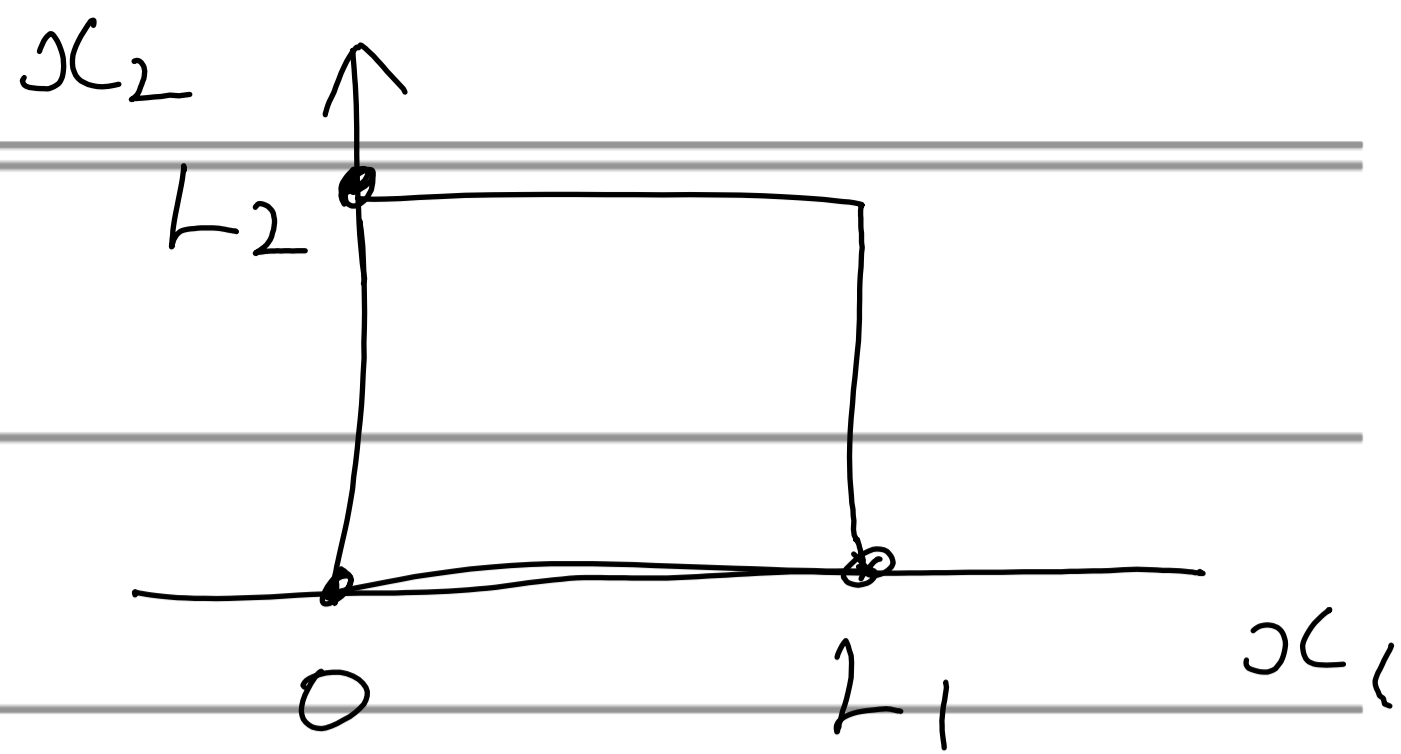
alors  $v = 0$

• si  $x_1 = L_1$ , alors  $\sin(k_{n_1} x_1) = \sin\left(n_1 \frac{\pi}{L_1} L_1\right) = 0$

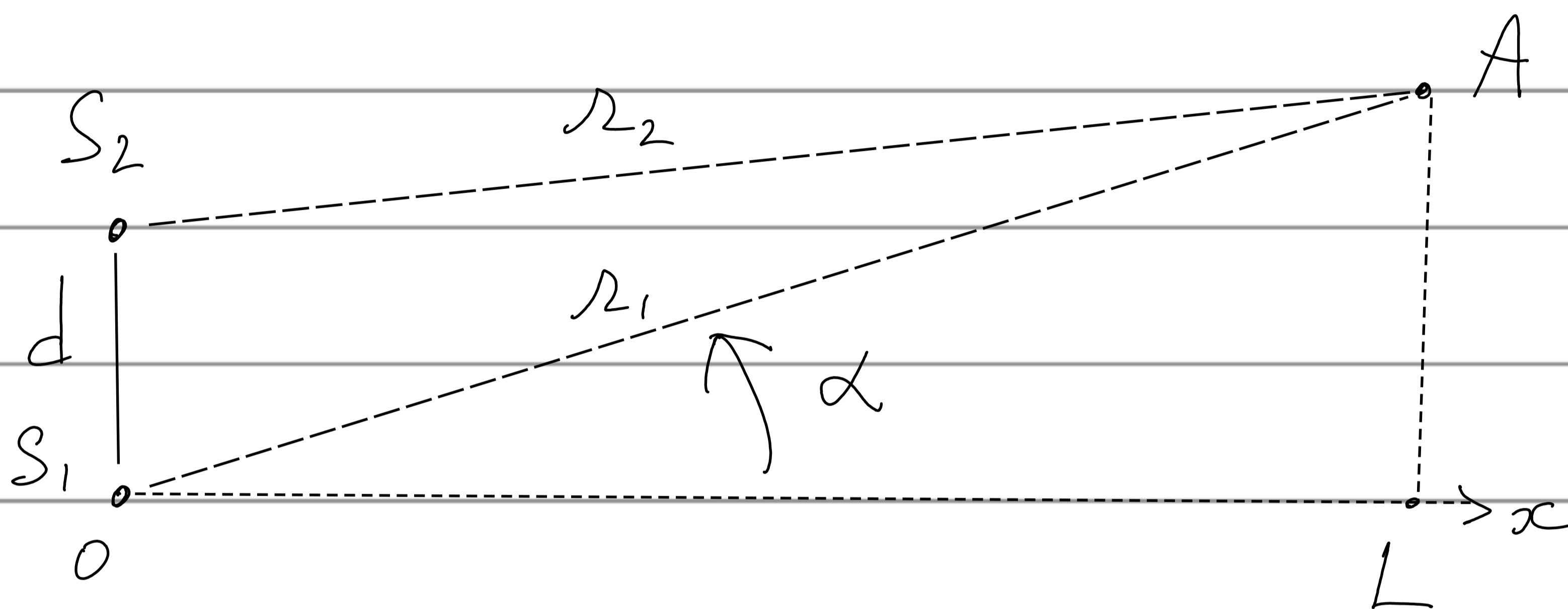
donc  $v = 0$ ,

de même si  $x_2 = L_2$  alors  $\sin(k_{n_2} x_2) = 0$ ,  $v = 0$ .

Donc les conditions aux bords sont vérifiées.



# Interférences



Le signal en  $A$  à la date  $t$  est

$$s = \cos(\omega t - k r_1) + \cos(\omega t - k r_2)$$

or  $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

donc

$$s = 2 \cos\left(\frac{k}{2}(r_1 - r_2)\right) \cos\left(\omega t - k\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)\right)$$

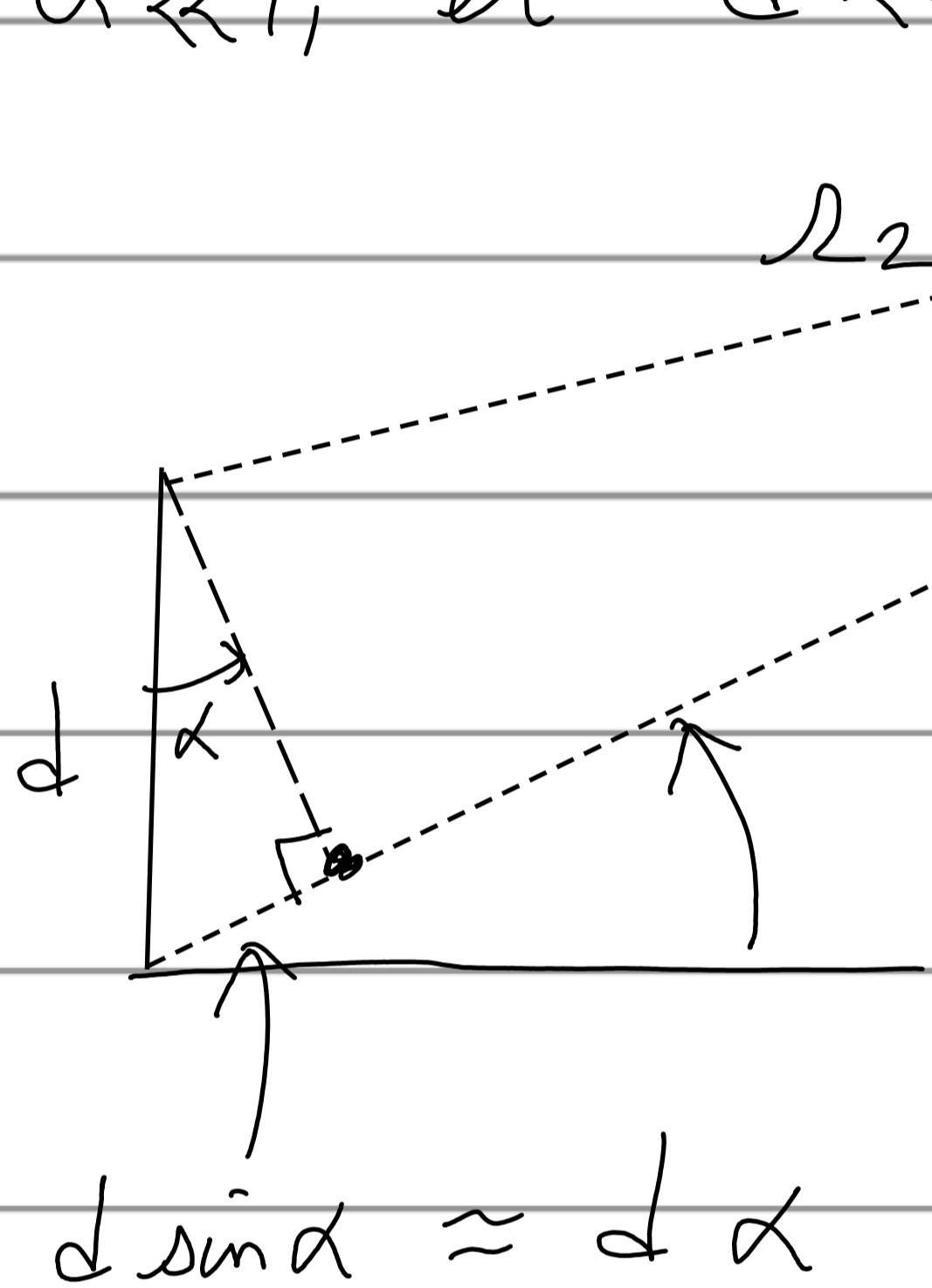
amplitude indépendante de  $t$  mais dépendant de la position  $r_1, r_2$       signal dépendant de  $t$  qui oscille

On cherche donc à quelles positions on a

une amplitude  $A = \cos\left(\frac{k}{2}(r_1 - r_2)\right)$  nulle ?

Pour cela il faut déterminer  $(r_1 - r_2)$  à partir  
de  $L, d, \alpha$  :

si  $d \ll L$ , et  $d \ll L$



$$R^2 + (d \cos \alpha)^2 = r_2^2$$

$$\Leftrightarrow R \approx r_2 \quad \text{car } \cos \alpha \approx 1$$

$r_2 \approx L \gg d$

donc  $r_1 - r_2 = d \alpha + R - r_2 \approx d \alpha$

Amplitude  $A = \cos\left(\frac{k}{2}(r_1 - r_2)\right) = \cos\left(\frac{k d \alpha}{2}\right)$   
 $= 0$

si  $\frac{k d \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + m \pi, \quad m \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{k d} \left( \frac{\pi}{2} + m \pi \right), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \leftarrow \text{longueur onde}$$

$$= \frac{\lambda}{d} \left( \frac{1}{2} + m \right)$$

La distance angulaire entre deux zéros

est donc  $\Delta\alpha = \frac{\lambda}{d}$

$$\alpha_m = \frac{\lambda}{d} \left( \frac{1}{2} + m \right) :$$

