Université Grenoble Alpes. Licence 2 Physique et musicologie. Frédéric Faure.

Exercices 3. **Perception du son.** (2023/03/03)

Table des matières

Sur ce document au format pdf, vous pouvez cliquer sur les liens en couleurs.

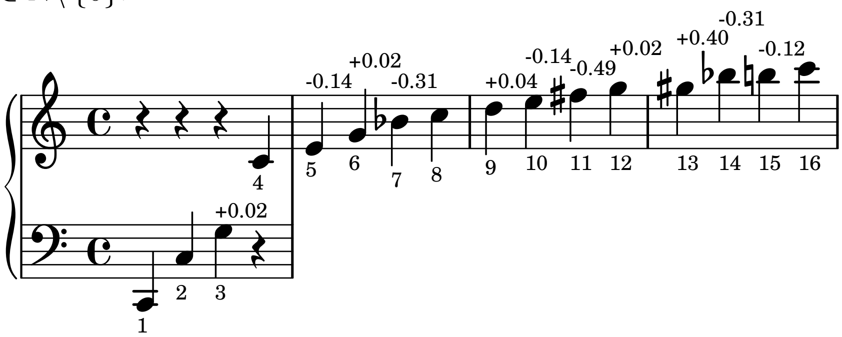
1 Perception du son

Rappels : bien se rappeler des notions suivantes, étudiées dans les exercices précédents :

— Signal périodique fréquence fondamentale f, période T. Décomposition de Fourier en harmoniques de fréquences nf avec $n \in \mathbb{N}^*$. Signal sinusoïdal (son pur) de phase φ, amplitude A. Schéma.

— Formule de passage entre la fréquence f et le pitch MIDI x.

— Voici la **suite des harmoniques** d'une note fondamentale et les corrections de pitch, permettant de déduire le pitch des intervalles justes $\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1}$ avec les numéros d'harmonique $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.



1.1 Nombres rationnels

En musique, un **intervalle juste** est constitué de deux notes, de fréquence $f_1, f_2 \in \mathbb{R}$ telles que le rapport de fréquences qui est un nombre rationnel :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{N} \backslash \{0\} .$$

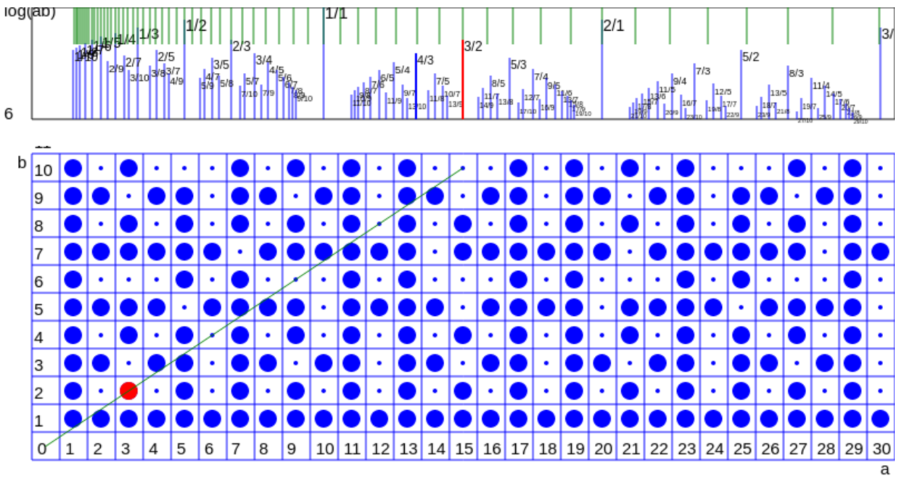
L'importance de ces intervalles vient du fait que ce sont les intervalles que l'on trouve entre les harmoniques d'un signal périodique, et donc que notre cerveau analyse de façon préférentielle (c'est hypothétique, voir cette conférence de Christine Petit). Il y a une structure mathématique naturelle dans les nombres rationnels, étudiée depuis l'antiquité. Cette structure riche se manifeste dans la richesse des règles harmoniques en musique.

Exercice 1.1. « **Verger d'Euclide** ».

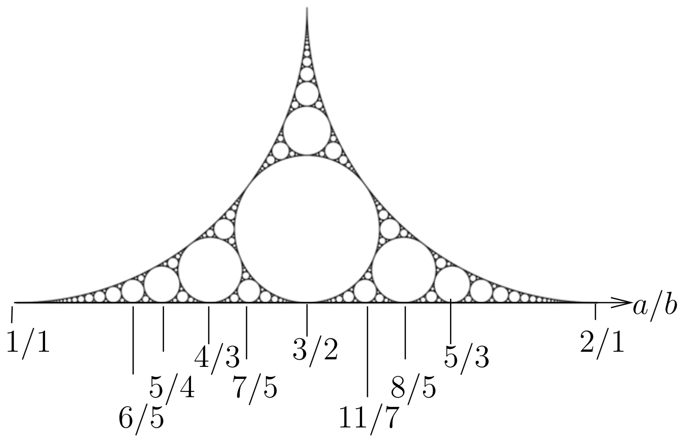
Une fraction est irréductible $\frac{a}{b}$ si elle ne peut pas se simplifier, donc si a, b sont premier entre eux.

1. Dans le plan, avec les axes $a \in \{1, \ldots, 20\}$ et $b \in \{1, \ldots 10\}$ dessiner les points (a, b) qui sont premiers entre eux (retrouver le dessin ci-dessous)

2. A partir de la suite des harmoniques, identifier les fractions correspond aux intervalles justes musicaux simples $\frac{a}{b}$: unisson, octave, quinte, quarte, tierces majeure et mineure, triton, sixte, septieme.
3. Trouver un moyen graphique de représenter ces intervalles et de les comparer aux intervalles du tempérament égal. Aide : considérer les point d'intersection $I = D_{(a,b)} \cap H$ entre la droite D passant par $(0,0)$ et (a,b) et la droite horizontale H passant par $(0,b_0)$ avec b_0 arbitraire. Montrer que $I = b_0 \left(\frac{a}{b}, 1\right)$. Utiliser/consulter le site web just intervals.



4. Optionnel : écrire un programme (python) qui fait ce dessin précisément et fait apparaître la **fractale de Thomae**.
5. Optionnel : dessiner la fractale des cercles d'Appolonius et montrer que cela donnes les même positions, et donc les intervalles juste en musique.



Exercice 1.2. « Accords justes ». Le tonnetz est une représentation d'un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ par les exposants $n_2, n_3, n_5, n_7, \ldots \in \mathbb{Z}$ d'après la décomposition d'Euclide :

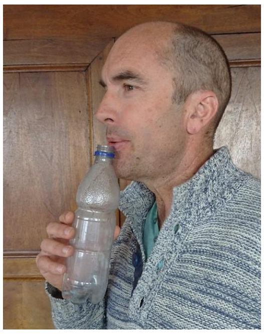
$$\frac{a}{b} = 2^{n_2} 3^{n_3} 5^{n_3} 7^{n_7} \ldots$$

1. On considère seulement les axes $n_3, n_5, n_7 \in \mathbb{Z}$, associés aux nombres premiers $\{2, 3, 5, 7\}$ (mais sans représenter l'axe 2) formant ainsi un réseau $\mathbb{Z}^3$ appelé le « **tonnetz** $3, 5, 7$ ». A l'origine $(0,0,0)$ placer la note C et de proche en proche placer le nom des autres notes sur les points voisins du réseau.
2. Considérer des ensemble de notes proches, appelés **accords justes**, (3 notes, puis 4 notes, puis 5 notes) et les identifier comme des accords intéressants en musique.

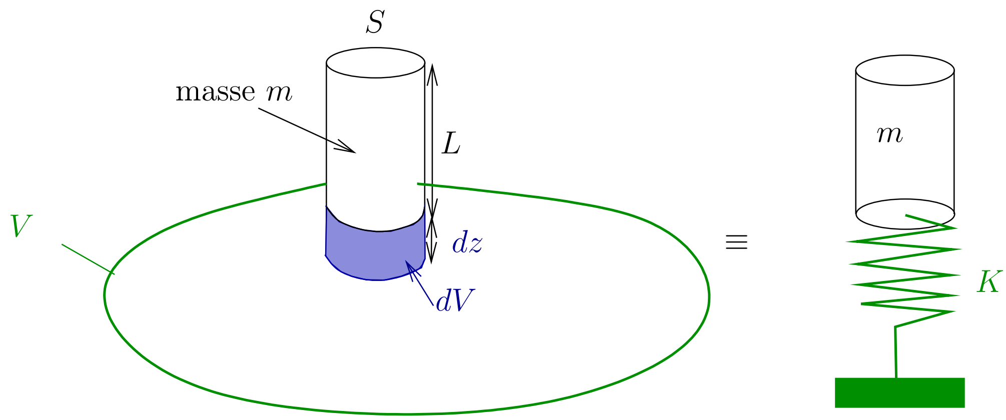
3. Optionnel : considérer des **mouvements d'accords justes** qui satisfont la règle de conduite des voix (i.e. petit mouvement en fréquence) et reconnaître des cadences intéressantes en musique, comme la résolution du triton, les cadences $II^{m7} \rightarrow V^7 \rightarrow I$, $II^{m,b5,7} \rightarrow V^7 \rightarrow I^m$ ou la grande cadence
$$I^{maj7} \rightarrow IV^{maj7} \rightarrow VII^{m,b5,7} \rightarrow III^{m7} \rightarrow VI^{m7} \rightarrow II^{m7} \rightarrow V^7 \rightarrow I^{maj7}$$
.

2 Physique des instruments

Exercice 2.1. « Résonateur de Helmholtz » Ce modèle est supposé représenter par exemple une bouteille avec un goulot, qui produit du son lorsque l'on souffle sur le goulot.



Considérons un volume V, en vert sur la figure, connecté à l'extérieur par un cylindre de surface S et longueur L. Dans le volume V et le cylindre il y a de l'air de masse volumique ρ. On néglige le poids.



Supposons que le fluide dans le cylindre se déplace de façon rigide. On l'assimile à une masse m. Par contre dans le volume V l'air est compressible. Une variation de volume dV implique une variation de pression dP d'après la loi de Laplace $PV^\gamma = \text{cste}$.

1. Estimer la masse m du gaz dans le cylindre en fonction de ρ, S, L.
2. Si le cylindre se déplace verticalement de dz, estimer la variation de pression dP dans le volume et donc la force dF induite sur le cylindre. Déduire que le volume V agit sur le cylindre comme un ressort de raideur K que l'on explicitera à partir de γ, P, S, V.
3. A partir de l'équation de mouvement de Newton déduire la fréquence d'oscillation ω du cylindre à partir de S, V, L et la vitesse du son dans l'air $c = \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)^{1/2}$.
4. Application numérique : $V = 33\text{cl}$, $L = 2\text{cm}$, $S = 1\text{cm}^2$, $c = 343 m/s$. Calculer la **fréquence**
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} c \left(\frac{S}{VL}\right)^{1/2}$$
et comparer à l'expérience.