Université Grenoble Alpes. Licence 2 Physique et musicologie. Frédéric Faure.

Exercices 2. **Propagation du son, dynamique des ondes.** (2023/02/01)

Table des matières

Sur ce document au format pdf, vous pouvez cliquer sur les liens en couleurs.

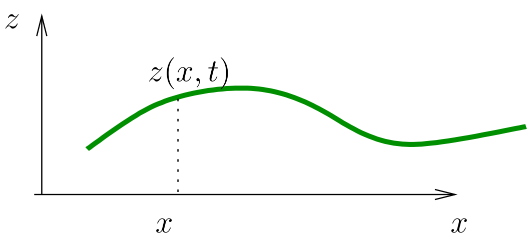
On étudie le cas très particulier de la propagation en dimension 1, c'est à dire une onde de déformation d'une corde ou une onde sonore dans un tuyau, etc.

1 Origine de l'équation des ondes

Exercice 1.1. « Vibration d'une corde » On considère une corde horizontale (axe x) ayant un petit déplacement vertical à la date t représenté par la fonction

$$x, t \in \mathbb{R} \to z(x, t) \in \mathbb{R},$$

On note $\mu = \frac{dm}{dx}$ la masse par unité de longueur de la corde et T la tension qui est la force tangentielle à la corde. On ne considère pas le poids.



En appliquant l'équation de mouvement de Newton à un élément de longueur, démontrer que dans l'approximation des petits déplacements (i.e. $|z| \ll 1$ et $\left|\frac{dz}{dx}\right| \ll 1$), la corde satisfait l'**équation des ondes**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \tag{1.1}$$

où on exprimera c à partir des données.

Exercice 1.2. (Optionnel) « Des équations de Euler à l'équation des ondes sonores »

Référence : cours Proposition 1.2.1 page 16.

On suppose que le fluide (air ou eau) est soumis aux équations de mouvement de Euler $\boldsymbol{\rho}\frac{dv}{dt} = -\mathrm{grad}(\boldsymbol{p})$ où v est le champ de vitesse, $\boldsymbol{\rho}$ est la masse volumique et $\boldsymbol{p}$ le champ de pression. On suppose des petites fluctuations de la pression p et de la densité ρ autour de l'état d'équilibre constant et uniforme, i.e

$$\boldsymbol{p}(x, t) = p_0 + p(x, t)$$

$$\boldsymbol{\rho}(x, t) = \rho_0 + \rho(x, t)$$

avec $|p| \ll p_0$ et $|\rho| \ll \rho_0$.

1. On admet l'équation de Laplace [1] $\boldsymbol{p} = C\boldsymbol{\rho}^\gamma$, avec $\gamma = \frac{7}{5}$. Déduire la relation suivante entre p, ρ :
$$\frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0}. \tag{1.2}$$
2. Utilisant l'équation de mouvement de Euler du fluide, l'équation de conservation de la masse $\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{\rho} v) = 0$ et l'équation de Laplace, montrer que au premier ordre, p est solution de **l'équation des ondes**
$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 \tag{1.3}$$
avec la **vitesse du son**
$$c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma R T_0}{M}\right)^{1/2},$$
utilisant la loi des gaz parfait $\boldsymbol{p}V = nRT$ pour n moles de gaz dans un volume V, à la pression $\boldsymbol{p}$ et température T, avec la constante de Boltzmann $k = 1.38\,10^{-23} J/K$ et $R = N_A k = 8.31 \frac{J}{K}$, et $M = 29g/mole$ la masse molaire de l'air.

Exercice 1.3. « Valeurs numériques sur les ondes sonores »

Remarque 1.4. On verra plus tard que la valeur c dans l'équation des ondes est appelée « vitesse du son » car elle correspond en effet à la vitesse de propagation des paquets d'ondes.

1. Application numérique : avec une température $T_0 = 293K = 20C^\circ$, une pression $p_0 = 10^5$Pa, calculer la densité de l'air moyenne ρ_0 et déduire la vitesse de son c.
2. Pendant le temps de réaction typique d'un neurone qui est de $\Delta t = 50ms$, le son dans l'air avance de quelle distance d (donner un ordre de grandeur) ? Quelle est la manifestation pratique de ce temps Δt en musique et comment s'appelle t-il ?
3. Si on entend le tonnerre $10s$ après avoir vu l'éclair, quelle est la distance d de l'orage ?
4. Calculer la longueur d'onde λ_{F_5} pour une onde sonore de fréquence $f_{F_5} = 343$Hz, (le fa F_5) et $\lambda_{F_3}, \lambda_{F_4}$ pour les fa F_3, F_4 des octaves inférieures ?

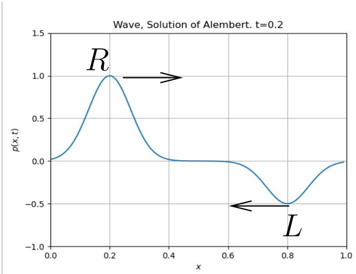
1. Equation de Laplace que l'on admet et qui résulte d'un comportement isentropique du fluide, voir TD3, ex.3.1. On a
$$\gamma = 1 + \frac{2}{\mathbf{3+2}} = \frac{7}{5}$$
où le chiffre **3** correspond aux trois dimension de l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$, i.e. les 3 degrés de liberté de translation de chaque molécule, le chiffre **2** correspond aux deux dimension de la sphère S^2, i.e. les 2 degrés de liberté de rotation de l'axe des molécules diatomiques.

2 Méthode de résolution d'Alembert

Pour l'équation d'onde à 1 dimension il y a deux méthodes de résolution assez différentes. La méthode d'Alembert spécifique à la dimension 1 et la méthode de Fourier, plus générale aux domaines rectangulaires, présentée après.

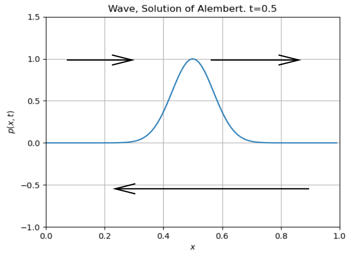
Exercice 2.1. « Solution d'Alembert de l'équation des ondes à 1D sur $\mathbb{R}$ ». On considère l'équation des ondes à une dimension (1.1), portant sur les fonctions une fonctions $x, t \in \mathbb{R} \to z(x,t) \in \mathbb{R}$ avec $c > 0$ fixé.

Rappel : cette équation modélise la déformation d'une corde près de sa position d'équilibre $z \equiv 0$ (voir exercice 1.1), et modélise aussi les fluctuations de pression $p(x,t)$ d'un fluide comme l'air (voir TD1). Voici un exemple d'une onde, vidéo1 fait par ce programme onde_1dim_segment_superposition.py.



1. Si $X \in \mathbb{R} \to R(X), L(X)$ sont des fonctions arbitraires, montrer que
$$z(x,t) = R(x - ct) + L(x + ct) \qquad (2.1)$$
est solution de l'équation des ondes (1.1).
2. Montrer que $(x,t) \to R(x - ct)$ est une **« onde progressive »** se déplaçant vers la droite (Right) sans se déformer et $(x,t) \to R(x - ct)$ est une onde progressive se déplaçant vers la gauche (Left).
3. (Optionnel). Réciproquement, montrer que toute solution de l'équation (1.1) est de la forme (2.1) avec des fonctions R, L données à partir des conditions initiales à $t = 0$, $z(x,0)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x',0)$ par
$$R(x) = \frac{1}{2}\left(z(x,0) - \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x',0)\,dx'\right) \qquad (2.2)$$
$$L(x) = \frac{1}{2}\left(z(x,0) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x',0)\,dx'\right)$$
avec $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitraire fixé.

Exercice 2.2. « Solution d'Alembert de l'équation des ondes à 1D sur un segment $[0, L]$ ». On considère à nouveau l'équation des ondes (1.1) portant sur les fonctions $x \in [0, L], t \in \mathbb{R} \to z(x,t) \in \mathbb{R}$ i.e. sur un segment de longueur $L > 0$ et avec les conditions aux bords
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(0,t) = z(L,t) = 0. \qquad (2.3)$$
Voici un exemple d'une onde, vidéo fait par ce programme onde_1dim_segment_superposition.py sur le segment $x \in [0, 1]$.



1. Si $X \in \mathbb{R} \to R(X) \in \mathbb{R}$ est une fonction période $2L$ arbitraire, i.e.
$$\forall X \in \mathbb{R}, \quad R(X + 2L) = R(X),$$
montrer que
$$z(x,t) = R(x - ct) - R(-x - ct) \qquad (2.4)$$
est solution de l'équation des ondes (1.1) avec les conditions aux bords (2.3) et réciproquement.
2. Montrer que la solution (2.4) est **périodique en temps**, de période $T = \frac{2L}{c}$, i.e.
$$\forall x \in [0, L], \forall t \in \mathbb{R},$$
$$z\left(x, t + \frac{2L}{c}\right) = z(x,t).$$
Expliquer graphiquement ce résultat à partir du mouvement de l'onde sur $x \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.3. La **périodicité en temps** de l'équation d'onde est une **propriété spéciale à la géométrie sur un segment** $[0, L]$ et produit un signal périodique aussi appelée **"note musicale"** ou « système harmonique ». Cette périodicité du signal n'est pas vrai pour d'autres géométries (ex : membrane 2D). Cette propriété est la raison principale d'utiliser des cordes pincées ou frappées dans certains **instruments de musique**, comme la kora, le piano, la guitare, le clavecin, la harpe, etc.

3 Méthode de résolution de Fourier

On étudie ici la méthode de résolution de Fourier pour l'équation d'onde qui est assez différente de la méthode d'Alembert car on utilise la « base des ondes planes ».

Exercice 3.1. « Solution de Fourier de l'équation des ondes à 1D sur $\mathbb{R}$ ». On considère à nouveau l'équation des ondes (1.1) pour une fonction $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \to z(x,t) \in \mathbb{R}$.

1. Pour des paramètres $\omega \in \mathbb{R}$ appelé de **fréquence temporelle** et $k \in \mathbb{R}$ appelé **vecteur d'onde (ou fréquence spatiale)**, on considère la fonction
$$z_{k,\omega}(x,t) := e^{i(kx - \omega t)}$$
appelée **mode de Fourier** ou **onde plane.** Montrer que $z_{k,\omega}$ est solution de (1.1) si et seulement si k, ω vérifient une certaine condition appelée **relation de dispersion**.

2. Donner l'expression de $\mathrm{Re}\left(z_{k,\omega}(x,t)\right)$. Faire un schéma de la fonction $x \to \mathrm{Re}\left(z_{k,\omega}(x,t)\right)$ à t fixé, et $t \to \mathrm{Re}\left(z_{k,\omega}(x,t)\right)$ à x fixé, en indiquant $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ appelée **longueur d'onde** et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ appelée **période** et $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ appelée **fréquence**.

Exercice 3.2. « Solution de Fourier de l'équation des ondes à 1D sur un segment $[0, L]$ **».** On considère à nouveau l'équation des ondes (1.1) portant sur les fonctions $x \in [0, L], t \in \mathbb{R} \to z(x,t) \in \mathbb{R}$ i.e. sur un segment de longueur $L > 0$ et avec les conditions aux bords (2.3).

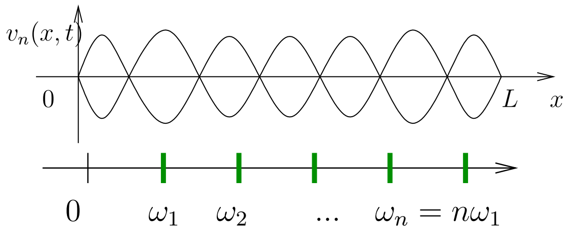


FIGURE 3.1 – (a) Enveloppe d'un mode propre (3.1), ici $n = 7$ appelé **onde stationnaire** ou **mode propre**. La fréquence ω_n est appelée harmonique n. (b) « Spectre harmonique ». Voici des vidéos pour le mode n=1, mode n=2, et mode n=3 faites par ce programme onde_1dim_segment.py. Voici des superpositions de modes, vidéo1, vidéo2,video3 faites par ce programme onde_1dim_segment_superposition.py.

1. Montrer que la fonction suivante est solution

$$z(x,t) = \sum_{n \geq 1} V_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \sin(k_n x) \quad (3.1)$$

avec pour chaque **numéro d'harmonique** n, une amplitude $V_n \geq 0$ et phase $\alpha_n \in \mathbb{R}$ arbitraires, et un vecteur d'onde $k_n = n\frac{\pi}{L}$ et une fréquence $\omega_n = n\frac{\pi c}{L}$ vérifiant $\omega_n = k_n c$ et donc

$$\omega_n = n\omega_1 \qquad n \in \mathbb{N}^*, \quad (3.2)$$

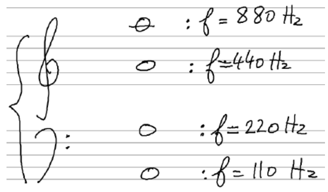
multiple entier de $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$

2. Optionnel : montrer réciproquement que toute solution de l'équation des ondes sur un segment $[0, L]$ s'écrit comme (3.1).

4 Applications numériques

Exercice 4.1.

1. On souhaite qu'une corde de guitare (3/4) de longueur $L = 56$cm, produise un la de fréquence $f = 110$Hz. Calculer la vitesse c de l'onde élastique sur la corde. Donner les fréquences des harmoniques f_1, f_2, f_3, f_4, f_5.
2. Trouver la longueur L d'un tuyau sonore fermé pour produire un fa F de fréquence $f_F = 343$Hz ?
3. On souhaite qu'une corde de guitare de longueur $L = 50$cm, produise un ré de fréquence $f = 150$Hz. Calculer la vitesse v de l'onde élastique sur la corde.
4. Considérons la corde de si$_5 = B_5$, $f_{B_5} = 496$Hz d'une guitare de longueur $L = 50$cm. A quelle distance L' du chevalet placer le doigt, pour produire la tierce $D\#_5$ de fréquence $f_{D\#_5} = \frac{5}{4} \times f_{B_5}$?
5. Calculer la longueur d'onde λ pour une onde sonore de fréquence $f = 440$Hz, (la du diapason) et pour les autres la de la figure ?



6. Dans l'eau, la vitesse du son est $c = 1500\,\mathrm{m}/s$. Les **dauphins** utilisent des sons de fréquences $f \approx 150\,\mathrm{kHz}$ pour localiser les poissons (proies). Quelle est la longueur d'onde λ correspondante ? Même questions pour les **Marsouins** ($f \geq 100$kHz et les **Orques** $f \leq 100$kHz) ?

5 Equation des ondes sur le rectangle $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$

On peut généraliser le résultat de l'exercice 3.2 (qui était à 1 dim) et considérer une cavité rectangulaire en utilisant la séparation des variables. Considérons une **"cavité rectangulaire"**, à **deux dimensions** $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$, une fonction $x = (x_1, x_2) \in \Omega, t \in \mathbb{R} \to v(x,t)$ solution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \Delta v = 0 \quad (5.1)$$

où $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$ et avec les conditions aux bords $v(x,t) = 0$ si $x \in \partial\Omega$ (bords de Ω). Voici la solution à ce problème.

Proposition 5.1. *Toute solution de (5.1) est une superposition de **modes stationnaires** (ou **modes propres**) :*

$$v(x,t) = \sum_{n=(n_1,n_2)\in(\mathbb{N}^*)^2} V_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_{n_1} x_1) \sin(k_{n_2} x_2) \tag{5.2}$$

avec les vecteurs d'ondes $k_n = (k_{n_1}, k_{n_2}) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$k_{n_j} = n_j \frac{\pi}{L_j}, \quad j = 1, 2,$$

*(k_n appartient à un réseau) et le **spectre de fréquences***

$$\omega_n = c\,|k_n|, \tag{5.3}$$

*avec $|k_n| = \left(k_{n_1}^2 + k_{n_2}^2\right)^{1/2}$, l'amplitude $V_n > 0$, et phase $\varphi_n \in \mathbb{R}$. Le spectre "n'est pas harmonique", et on a la **loi de Weyl :** le nombre de fréquences propres ω_n dans l'intervalle $[0,\omega]$ est*

$$\mathcal{N}(\omega) := \sharp\{\omega_n \leq \omega\} = \frac{\omega^2}{4\pi c^2} L_1 L_2 + o\left(\omega^2\right) \tag{5.4}$$

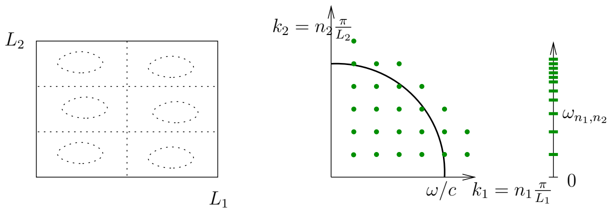


FIGURE 5.1 – (a) Enveloppe d'un mode propre (5.2), ici $n_1 = 2$, $n_2 = 3$. (b) Plan du vecteur d'onde $k = (k_1, k_2)$. Le spectre est la condition $\omega = c\,|k|$ (c) Spectre (non harmonique).

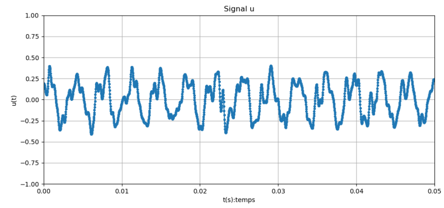
Exercice 5.2.

1. Montrer que (5.2) est solution de l'équation d'onde et vérifie les conditions aux bords de Ω.
2. (Optionnel). Montrer réciproquement que toute solution est de la forme (5.2).
3. (Optionnel). Déduire la loi de Weyl (5.4).

Remarque 5.3. Voici le signal mesuré en un point de la plaque et le son produit audio_2D.wav avec une fondamentale à $f_0 = 440\text{Hz}$, par ce programme sinus_sum_general.py. Il s'agit précisément de la fonction

$$u(t) = \sum_{n_1,n_2=1}^{10} A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

avec l'amplitude $A_n = 1/\left(n_1^2 + n_2^2\right)$, des fréquences $f_n = \left(n_1^2 + n_2^2\right)^{1/2} f_0$ et des phases φ_n aléatoires. On perçoit le son comme non harmonieux, car le signal est non périodique, le spectre est non harmonique.



6 Interférences

Il y a deux sources S_1, S_2 émettant le même signal monochromatique $\cos(\omega t - k r_j)$ où r_j est la distance à la source S_j. Déterminer les directions α pour lesquelles l'amplitude observée au point A est nulle avec les approximations $L \gg d$ et $|\alpha| \ll 1$.