Exercices 1. **Signaux**

Table des matières

1 Codage des nombres en base 2 (binaire)

On rappelle qu'en base 10, qui est la base usuelle, on a 10 symboles disponibles : $0, 1, 2, \ldots, 9$ et que les nombres entiers écrits de la façon suivante :

$$0, 1, 2, \ldots 9, 10, 11, 12, \ldots, 19, 20, 21, \ldots$$

1. En base 10, combien d'entiers différents peut-on écrire avec $B = 3$ cases $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ et un chiffre dans chaque case ?

   De la même façon, en base 2 on a 2 symboles disponibles, par exemple $0, 1$. Les nombres entiers sont écrits de la façon suivante :

$$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, \ldots$$

2. En base 2, combien d'entiers différents peut-on écrire avec $B = 3$ cases $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ et un chiffre dans chaque case ?

   Remarque 1.1. On rappelle qu'un **octet** correspond à 8 **bits** (i.e. $B = 8$ cases).

   En base 2, avec un certain nombre de cases B fixé (nombre de bits), si on souhaite aussi **écrire des entiers négatifs**, on convient d'utiliser la première case pour le signe : 0 signifie positif et 1 signifie négatif. Par exemple avec $B = 3$ cases : on aura

entier	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
code en base 2	100	101	110	111	000	001	010	011

   - Remarquer que pour obtenir la deuxième ligne, on part de 0 et on remplit le tableau de façon croissante et circulaire.
   - Plus généralement, avec B cases, on code les entiers de $-\frac{2^B}{2} = -2^{B-1}$ à $\frac{2^B}{2} - 1 = 2^{B-1} - 1$.
   - L'avantage de cette convention est que l'opération d'addition est inchangée, par exemple pour calculer $+3-2$ on effectue en base 2 : $011 + 110$ ce qui donne 1001, mais en fait 001 car on a que $B = 3$ cases. Le résultat est donc $+1$ comme attendu.

3. Compléter le tableau suivant qui donne l'écriture binaire de nombres entiers positifs et négatif (« complément à deux ») sur $B = 4$ bits

entier	-8	...	-2	-1	0	$+1$	$+2$	...	$+7$
code en base 2					0000	0001			

4. Avec $B = 24$ bits on peut coder des entiers positifs et négatif sur quel intervalle (donner un ordre de grandeur) ? (aide $2^{24} \approx 16 \times 10^6$)

2 Les signaux

Notation 2.1. La notation $[\![a,b]\!]$ signifie l'ensemble des entiers n dans l'intervalle $a \leq n \leq b$. Par exemple $[\![0,3]\!] = \{0,1,2,3\}$.

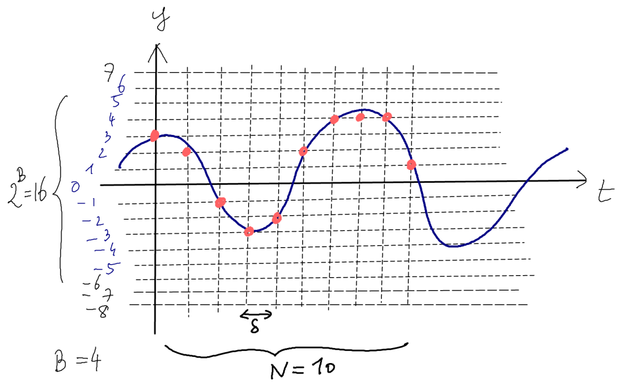
Définition 2.2. Un **signal échantillonné** est :
- un nombre fini N de valeurs du signal,

$$u = (u_0, u_1, u_2, \dots u_{N-1}),$$
$$u_j \in \left[\!\left[-2^{B-1}, 2^{B-1}-1\right]\!\right],$$
$$j \in [\![0, N-1]\!],$$

- où chaque valeur est codée avec un nombre B de bits. $B = 8, 16, 24, 32, 64$ de sorte qu'une valeur u_j est un entier dans l'intervalle $\left[\!\left[-2^{B-1}, 2^{B-1}-1\right]\!\right]$. Ce codage appelé Complément à deux.
- à des d'instants t_j espacés d'une durée $\delta > 0$ appelé **période d'échantillonnage**, par exemple $\delta = \frac{1}{44100}s$, (ainsi la fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{\delta} = 44100$Hz est supérieure à 20000Hz qui est la limite supérieure des fréquences humainement audibles). Ainsi

$$t_j = j\delta, \quad j \in [\![0, N-1]\!],$$

$$u_j \approx u(t_j)$$



Exercice 2.3. Combien y a t-il d'échantillons N dans un signal de durée $D = 40$ minutes qui est échantillonné avec un pas de temps $\delta = \frac{1}{50000}s$. ?

Exercice 2.4. Un signal enregistré sur ordinateur, avec $N = 15 \times 10^6$ échantillons, codé en $B = 24$ bits occupe combien d'octets en mémoire ? (1 octet = 8 bits)

Exercice 2.5. **« Battements ».** Le signal suivant est la somme de deux signaux sinus de même amplitude mais de fréquences très voisines f et $f+\epsilon$ avec $\epsilon \ll f$:

$$u(t) = \sin(2\pi f t) + \sin(2\pi(f+\epsilon)t).$$

Ecrire $u(t)$ comme un produit pour montrer que il y a des « battements » et trouver la fréquence $f_{\text{batt.}}$ de ces battements.

3 Mesure de l'intensité en décibels

Exercice 3.1. Compléter le tableau suivant selon le modèle donné (remplir les cases vides)

Valeurs de x :	0.01	0.1	1	10	100	1000
écriture de x avec l'exposant					10^2	
$\mathrm{Log}_{10}(x)$: exposant ou logarithme (en base 10)					2	
$\mathrm{dB}(x) = 10\,\mathrm{Log}_{10}(x)$:décibel					20	

Exercice 3.2. Compléter le tableau suivant selon le modèle donné (remplir les cases vides)

x :	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}
nom :			milli				

Exercice 3.3. Supposons qu'entre deux sons donnés, il y a une différence de 50dB. Quel est le rapport de puissance correspondant ?

Exercice 3.4. Compléter le tableau suivant

Instrument	trombone fortissimo	clarinette fortissimo	voix humaine parlant	chanteur fortissimo
Puissance en W	$10\,W$	0.01W	$10^{-4}W$	0.01W
Puissance en dB			60	

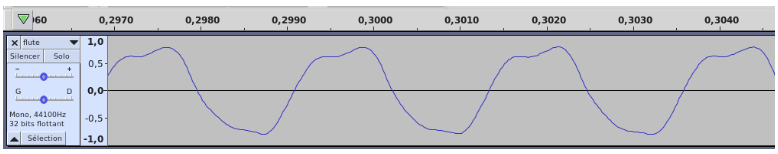
Exercice 3.5. Une clarinette jouant fort émet un son à 80dB. Quel est le niveau sonore de 10 clarinettes (en dB) ? Un trombone jouant fort est à 100dB. Combien faut-il de clarinettes jouant fort (cf questions précédente) pour avoir la même puissance ?

Exercice 3.6. Si on multiplie par 8 le signal c'est à dire $u'(t) = 8u(t)$, que devient l'intensité $I(t) = |u(t)|^2$ et que devient la mesure en décibels $\mathrm{dB}(I(t))$? (Aide : $\mathrm{Log}_{10}(2) \approx 0.3$).

Exercice 3.7. Si un signal numérique est codé sur $B = 24$ bits, quelle variation en dB (décibels) cela permet t-il entre l'amplitude la plus faible et la plus forte. Comment s'appelle ce rapport ? (Aide : $\mathrm{Log}_{10}(2) \approx 0.3$)

4 Le cercle, sinus et décomposition de Fourier

1. Si la fréquence d'un signal périodique est $f = 1000Hz$, donner sa période T en secondes ?
2. Si un signal périodique est de période $T = 0.01s.$, donner les fréquences f_1, f_2, f_3 de ses 3 premières harmoniques ?
3. Entre la voyelle « A » et la voyelle « O » prononcée avec la même énergie et même hauteur, laquelle a le plus d'énergie dans les harmoniques élevées ?
4. Mesurer approximativement la période T en secondes du signal suivant (l'axe horizontal est en secondes) et déduire les fréquences f_1, f_2, f_3 de ses premières harmoniques ?



5 Pitch d'un signal périodique

Exercice 5.1. On rappelle que le pitch x d'un signal périodique de fréquence f est la mesure en demi-tons donnée par

$$x := \left(\frac{12}{\ln 2}\right) \ln\left(\frac{f}{f_{A_5}}\right) + x_{A_5} \quad \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

avec $f_{A_5} = 440\mathrm{Hz}$ appelé **diapason** et $x_{A_5} = 69$ code MIDI du la A_5.

Quel est le pitch de $f = 220\mathrm{Hz}$? dessiner la note sur la portée musicale ?

Exercice 5.2. Exprimer f à partir de x ?

Exercice 5.3. Si on a deux notes de fréquences f, f' et de pitch respectifs x, x', exprimer $x' - x$ à partir de f'/f ?

Exercice 5.4. Un rapport de fréquence $f'/f = 3/2$ correspond à combien de demi-tons $x' - x$? et $f'/f = 7/4$?

Aide :

p	2	3	5	7
$\frac{12}{\ln 2}\ln(p)$:	12	$12+7+0.02$	$2\times 12+4-0.14$	$2\times 12+10-0.31$

6 Sonogramme

Exercice 6.1. Rappeler l'expression d'un paquet d'onde Gaussien $\varphi(t)$ centré en t_0, de fréquence f_0 et largeur en temps $\Delta t = \sigma$?

Exercice 6.2. Quelle est sa largeur en fréquence Δf après transformée de Fourier ?

Exercice 6.3. Si on souhaite faire une note de musique de fréquence $f_0 = 220$Hz, de précision $\Delta x < 1/2$ (= 1/4ton), quelle durée Δt minimale doit elle avoir ?

Exercice 6.4. Rappeler la définition de la transformée par paquets d'ondes ou sonogramme d'un signal $u(t)$?

Exercice 6.5. Quel est l'avantage d'un sonogramme par rapport à la transformée de Fourier ?

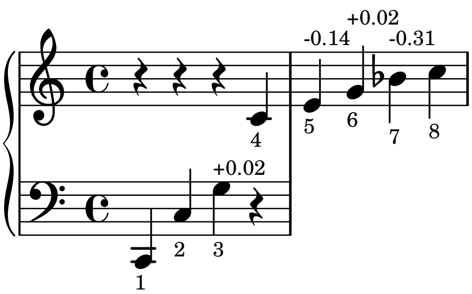
7 Intervalles

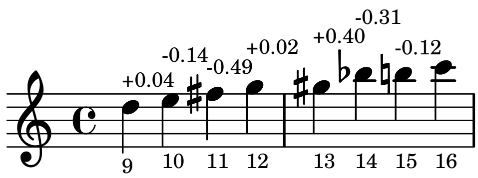
1. Sachant qu'un demi-ton correspond à une augmentation de 6% de la fréquence, sachant que A_4 a la fréquence $f_{A_4} = 220$, quelle est la fréquence $f_{A\#_4}$?

2. Sachant que l'intervalle le plus petit perceptible est de $\Delta x = \frac{1}{10}$ de demi-ton, cela correspond à quelle pourcentage en fréquence ? Quelle est l'intervalle minimum de fréquence perceptible Δf autour de $f_{A_5} = 220$ Hz ?

3. Deux flûtes jouent un A, $f_A = 440Hz$ à l'unisson, mais sont légèrement désaccordées. On entend $4,4$ battements par secondes. Déduire la différence de fréquence Δf entre les deux flûtes ? Cette écart correspond à quel écart de pitch Δx (unité de demi-ton) ? Cette différence est-elle perceptible (hormis par battements) ?

4. Expliquer cette suite des harmoniques de C_3 et les corrections de pitch par rapport au tempérament égal :





5. Un accordeur de piano souhaite accorder une tierce $C_4 - E_4$ au tempérament égal, avec $f_{C_4} = 130Hz$. Quelle sont les harmoniques de ces deux notes qui sont en quasi-unisson et combien de battements par seconde doit t-il percevoir ?