Université Grenoble Alpes. Licence 3 Physique.
TD de musique et physique. Frédéric Faure.

TD 3. **Signaux**

Table des matières

1 Codage des nombres en base 2 (binaire)

On rappelle qu'en base 10, qui est la base usuelle, on a 10 symboles disponibles : $0, 1, 2, \ldots, 9$ et que les nombres entiers écrits de la façon suivante :

$$0, 1, 2, \ldots 9, 10, 11, 12, \ldots, 19, 20, 21, \ldots$$

1. En base 10, combien d'entiers différents peut-on écrire avec $B = 3$ cases $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ et un chiffre dans chaque case ?

   De la même façon, en base 2 on a 2 symboles disponibles, par exemple $0, 1$. Les nombres entiers sont écrits de la façon suivante :

   $$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, \ldots$$

2. En base 2, combien d'entiers différents peut-on écrire avec $B = 3$ cases $\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ et un chiffre dans chaque case ?

   Remarque 1.1. On rappelle qu'un **octet** correspond à 8 **bits** (i.e. $B = 8$ cases).

En base 2, avec un certain nombre de cases B fixé (nombre de bits), si on souhaite aussi **écrire des entiers négatifs**, on convient d'utiliser la première case pour le signe : 0 signifie positif et 1 signifie négatif. Par exemple avec $B = 3$ cases : on aura

entier	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
code en base 2	100	101	110	111	000	001	010	011

— Remarquer que pour obtenir la deuxième ligne, on part de 0 et on remplit le tableau de façon croissante et circulaire.
— Plus généralement, avec B cases, on code les entiers de $-\frac{2^B}{2} = -2^{B-1}$ à $\frac{2^B}{2} - 1 = 2^{B-1} - 1$.
— L'avantage de cette convention est que l'opération d'addition est inchangée, par exemple pour calculer $+3 - 2$ on effectue en base 2 : $011 + 110$ ce qui donne 1001, mais en fait 001 car on a que $B = 3$ cases. Le résultat est donc $+1$ comme attendu.

3. Compléter le tableau suivant qui donne l'écriture binaire de nombres entiers positifs et négatif (« complément à deux ») sur $B = 4$ bits

entier	-8	...	-2	-1	0	$+1$	$+2$	...	$+7$
code en base 2					0000	0001			

4. Avec $B = 24$ bits on peut coder des entiers positifs et négatif sur quel intervalle (donner un ordre de grandeur) ? (aide $2^{24} \approx 16 \times 10^6$)

2 Les signaux

Notation 2.1. La notation $[\![a, b]\!]$ signifie l'ensemble des entiers n dans l'intervalle $a \leq n \leq b$. Par exemple $[\![0, 3]\!] = \{0, 1, 2, 3\}$.

Définition 2.2. Un **signal échantillonné** est :

— un nombre fini N de valeurs du signal,

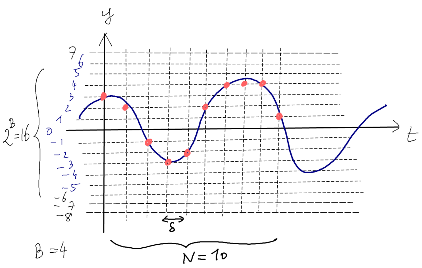
$$u = (u_0, u_1, u_2, \ldots u_{N-1}),$$
$$u_j \in \llbracket -2^{B-1}, 2^{B-1} - 1 \rrbracket,$$
$$j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket,$$

— où chaque valeur est codée avec un nombre B de bits. $B = 8, 16, 24, 32, 64$ de sorte qu'une valeur u_j est un entier dans l'intervalle $\llbracket -2^{B-1}, 2^{B-1} - 1 \rrbracket$. Ce codage appelé Complément à deux.

— à des d'instants t_j espacés d'une durée $\delta > 0$ appelé **période d'échantillonnage**, par exemple $\delta = \frac{1}{44100}s$, (ainsi la fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{\delta} = 44100$Hz est supérieure à 20000Hz qui est la limite supérieure des fréquences humainement audibles). Ainsi

$$t_j = j\delta, \quad j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket,$$

$$u_j \approx u(t_j)$$



Exercice 2.3. Combien y a t-il d'échantillons N dans un signal de durée $D = 40$ minutes qui est échantillonné avec un pas de temps $\delta = \frac{1}{50000}s$. ?

Exercice 2.4. Un signal enregistré sur ordinateur, avec $N = 15 \times 10^6$ échantillons, codé en $B = 24$ bits occupe combien d'octets en mémoire ? (1 octet = 8 bits)

3 Mesure de l'intensité en décibels

Exercice 3.1. Compléter le tableau suivant selon le modèle donné (remplir les cases vides)

Valeurs de x :	0.01	0.1	1	10	100	1000
écriture de x avec l'exposant					10^2	
$\mathrm{Log}_{10}(x)$: exposant ou logarithme (en base 10)					2	
$\mathrm{dB}(x) = 10\,\mathrm{Log}_{10}(x)$:décibel					20	

Exercice 3.2. Compléter le tableau suivant selon le modèle donné (remplir les cases vides)

x :	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^3	10^6	10^9	10^{12}
nom :			milli				

Exercice 3.3. Supposons qu'entre deux sons donnés, il y a une différence de 50dB. Quel est le rapport de puissance correspondant ?

Exercice 3.4. Compléter le tableau suivant

Instrument	trombone fortissimo	clarinette fortissimo	voix humaine parlant	chanteur fortissimo
Puissance en W	$10\,W$	0.01W	$10^{-4}W$	0.01W
Puissance en dB			60	

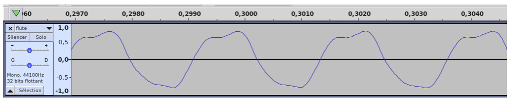
Exercice 3.5. Une clarinette jouant fort émet un son à 80dB. Quel est le niveau sonore de 10 clarinettes (en dB) ? Un trombone jouant fort est à 100dB. Combien faut-il de clarinettes jouant fort (cf questions précédente) pour avoir la même puissance ?

Exercice 3.6. Si on multiplie par 8 le signal c'est à dire $u'(t) = 8u(t)$, que devient l'intensité $I(t)$ et que devient la mesure en décibels $\mathrm{dB}(I(t))$? (Aide : $\mathrm{Log}_{10}(2) \approx 0.3$).

Exercice 3.7. Si un signal numérique est codé sur $B = 24$ bits, quelle variation en dB (décibels) cela permet t-il entre l'amplitude la plus faible et la plus forte. Comment s'appelle ce rapport ? (Aide : $\mathrm{Log}_{10}(2) \approx 0.3$)

4 Le cercle, sinus et décomposition de Fourier

1. Si la fréquence d'un signal périodique est $f = 1000 Hz$, donner sa période T en secondes ?
2. Si un signal périodique est de période $T = 0.01 s.$, donner les fréquences f_1, f_2, f_3 de ses 3 premières harmoniques ?
3. Entre la voyelle « A » et la voyelle « O » prononcée avec la même énergie et même hauteur, laquelle a le plus d'énergie dans les harmoniques élevées ?
4. Mesurer approximativement la période T en secondes du signal suivant (l'axe horizontal est en secondes) et déduire les fréquences f_1, f_2, f_3 de ses premières harmoniques ?



5 Pitch d'un signal périodique

Exercice 5.1. On rappelle que le pitch x d'un signal périodique de fréquence f est la mesure en demi-tons donnée par

$$x := \left(\frac{12}{\ln 2}\right) \ln\left(\frac{f}{f_{A_5}}\right) + x_{A_5} \quad \in \mathbb{R} \qquad (5.1)$$

avec $f_{A_5} = 440\text{Hz}$ appelé **diapason** et $x_{A_5} = 69$ code MIDI du la A_5.

Quel est le pitch de $f = 220\text{Hz}$?

Exercice 5.2. Exprimer f à partir de x ?

Exercice 5.3. Si on a deux notes de fréquences f, f' et de pitch respectifs x, x', exprimer $x' - x$ à partir de f'/f ?

Exercice 5.4. Un rapport de fréquence $f'/f = 3/2$ correspond à combien de demi-tons $x' - x$? et $f'/f = 7/4$?

Aide :

p	2	3	5	7
$\frac{12}{\ln 2} \ln(p)$:	12	$12 + 7 + 0.02$	$2 \times 12 + 4 - 0.14$	$2 \times 12 + 10 - 0.31$

6 Sonogramme

Exercice 6.1. Rappeler l'expression d'un paquet d'onde Gaussien $\varphi(t)$ centré en t_0, de fréquence f_0 et largeur en temps $\Delta t = \sigma$?

Exercice 6.2. Quelle est sa largeur en fréquence Δf après transformée de Fourier ?

Exercice 6.3. Si on souhaite faire une note de musique de fréquence $f_0 = 220\text{Hz}$, de précision $\Delta x < 1/2$ $(= 1/4\text{ton})$, quelle durée Δt minimale doit elle avoir ?

Exercice 6.4. Rappeler la définition de la transformée par paquets d'ondes ou sonogramme d'un signal $u(t)$?

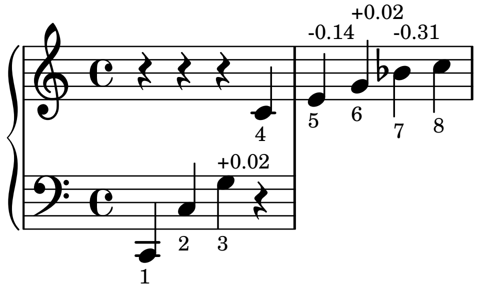
Exercice 6.5. Quel est l'avantage d'un sonogramme par rapport à la transformée de Fourier ?

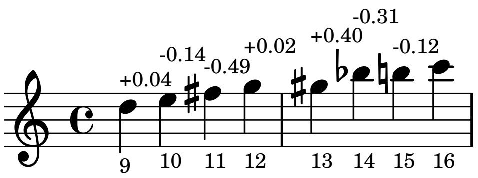
7 Intervalles

1. Sachant qu'un demi-ton correspond à une augmentation de 6% de la fréquence, sachant que A_4 a la fréquence $f_{A_4} = 220$, quelle est la fréquence $f_{A\#_4}$?
2. Sachant que l'intervalle le plus petit perceptible est de $\Delta x = \frac{1}{10}$ de demi-ton, cela correspond à quelle pourcentage en fréquence ? Quelle est l'intervalle minimum de fréquence perceptible Δf autour de $f_{A_5} = 220$ Hz ?
3. Deux flûtes jouent un A, $f_A = 440 Hz$ à l'unisson, mais sont légèrement désaccordées. On entend 4, 4 battements par secondes. Déduire la différence de

fréquence Δf entre les deux flûtes ? Cette écart correspond à quel écart de pitch Δx (unité de demi-ton) ? Cette différence est-elle perceptible si les notes sont jouées l'une après l'autre ?

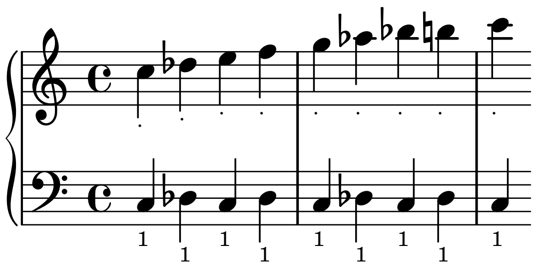
4. Expliquer cette suite des harmoniques de C_3 et les corrections de pitch par rapport au tempérament égal :





5. Un accordeur de piano souhaite accorder une tierce $C_4 - E_4$ au tempérament égal, avec $f_{C_4} = 130Hz$. Quelle sont les harmoniques de ces deux notes qui sont en quasi-unisson et combien de battements par seconde doit t-il percevoir ?

6. Voici un chant diphonique (Anna-Maria Hefele à 2'59"). Ecrire le numéro des harmoniques de la partie supérieure :



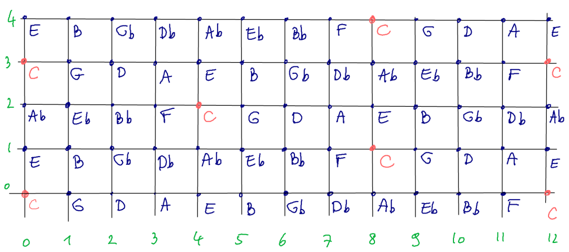


FIGURE 7.1 – réseau tonnetz 2,3,5 où horizontalement les quintes sont justes et verticalement les tierces sont justes.

7. Sur la figure 7.1, entourer par un rond les notes utilisées dans le tempérament juste de pythagore. Entourer par un carré les notes utilisées dans le tempérament juste de Zarlino.

8. Sur la figure 7.1, comment s'appelle le déplacement $(11, 0)$? Calculer sa valeur x en pitch ? Commenter ?

9. Sur la figure 7.1, comment s'appelle le déplacement $(12, 0)$? Calculer sa valeur x en pitch ? Commenter ?

10. Sur la figure 7.1, comment s'appelle le déplacement $(4, -1)$? Calculer sa valeur x en pitch ? Commenter ?

11. Sur la figure 7.1, et suite à la question 7, quelles sont les tierces justes dans le tempérament de pythagore ?

12. Sur la figure 7.1, et suite à la question 7, combien y a t-il de triades majeure et mineure justes dans le tempérament de Zarlino ?