

TD 2. **Propagation du son, dynamique des ondes.** (2023/02/01)

## Table des matières

<b>1 Cas particulier de la dimension 1</b>	<b>1</b>
1.1 Méthode de résolution d'Alembert	1
1.2 Méthode de résolution de Fourier	2
1.3 Applications numériques . . . . .	3
<b>2 Domaines bi-dimensionnels</b>	<b>3</b>
2.1 Equation des ondes sur le rectangle $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$ . . . . .	3
<b>3 Trajectoires de paquets d'ondes</b>	<b>4</b>
3.1 Proposition générale sur la relation onde-particules dans la limite des petites longueurs d'ondes	4
3.2 Applications . . . . .	7

Sur ce document au format pdf, vous pouvez cliquer sur les liens en couleurs.

## 1 Cas particulier de la dimension 1

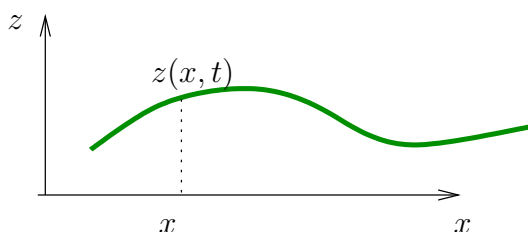
Dans cette section on étudie le cas très particulier de la propagation en dimension 1, c'est à dire une onde de déformation d'une corde ou une onde sonore dans un tuyau, etc.

### Exercice 1.1. « Vibration d'une corde »

On considère une corde horizontale (axe  $x$ ) ayant un petit déplacement vertical à la date  $t$  représenté par la fonction

$$x, t \in \mathbb{R} \rightarrow z(x, t) \in \mathbb{R},$$

On note  $\mu = \frac{dm}{dx}$  la masse par unité de longueur de la corde et  $T$  la tension qui est la force tangentielle à la corde. On ne considère pas le poids.



En appliquant l'équation de mouvement de Newton à un élément de longueur, démontrer que dans l'approximation des petits déplacements (i.e.  $|z| \ll 1$  et  $|\frac{dz}{dx}| \ll 1$ ), la corde satisfait l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad (1.1)$$

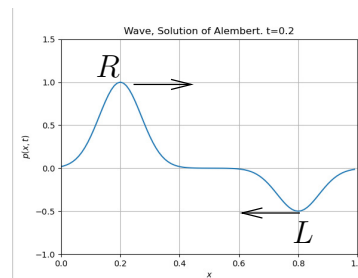
où on exprimera  $c$  à partir des données.

### 1.1 Méthode de résolution d'Alembert

Pour l'équation d'onde à 1 dimension il y a deux méthodes de résolution assez différentes. La méthode d'Alembert spécifique à la dimension 1 et la méthode de Fourier, plus générale aux domaines rectangulaires, présentée après.

**Exercice 1.2. « Solution d'Alembert de l'équation des ondes à 1D sur  $\mathbb{R}$  ».** On considère l'équation des ondes à une dimension (1.1), portant sur les fonctions une fonctions  $x, t \in \mathbb{R} \rightarrow z(x, t) \in \mathbb{R}$  avec  $c > 0$  fixé.

Rappel : cette équation modélise la déformation d'une corde près de sa position d'équilibre  $z \equiv 0$  (voir exercice 1.1), et modélise aussi les fluctuations de pression  $p(x, t)$  d'un fluide comme l'air (voir TD1). Voici un exemple d'une onde, [vidéo1](#) fait par ce programme [onde\\_1dim\\_segment\\_superposition.py](#).



1. Si  $X \in \mathbb{R} \rightarrow R(X), L(X)$  sont des fonctions arbitraires, montrer que

$$z(x, t) = R(x - ct) + L(x + ct) \quad (1.2)$$

est solution de l'équation des ondes (1.1).

2. Montrer que  $(x, t) \rightarrow R(x - ct)$  est une « **onde progressive** » se déplaçant vers la droite (Right) sans se déformer et  $(x, t) \rightarrow L(x + ct)$  est une onde progressive se déplaçant vers la gauche (Left).
3. (Optionnel). Réciproquement, montrer que toute solution de l'équation (1.1) est de la forme (1.2) avec des fonctions  $R, L$

données à partir des conditions initiales à  $t = 0$ ,  $z(x, 0)$ ,  $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x', 0)$  par

$$R(x) = \frac{1}{2} \left( z(x, 0) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x', 0) dx' \right) \quad (1.3)$$

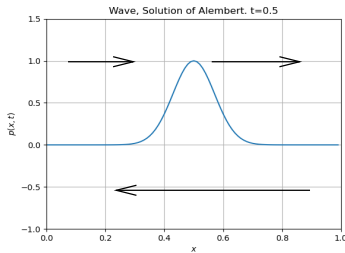
$$L(x) = \frac{1}{2} \left( z(x, 0) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x', 0) dx' \right)$$

avec  $x_0 \in \mathbb{R}$  arbitraire fixé.

**Exercice 1.3.** « Solution d'Alembert de l'équation des ondes à 1D sur un segment  $[0, L]$  ». On considère à nouveau l'équation des ondes (1.1) portant sur les fonctions  $x \in [0, L], t \in \mathbb{R} \rightarrow z(x, t) \in \mathbb{R}$  i.e. sur un segment de longueur  $L > 0$  et avec les conditions aux bords

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z(0, t) = z(L, t) = 0. \quad (1.4)$$

Voici un exemple d'une onde, vidéo fait par ce programme [onde\\_1dim\\_segment\\_superposition.py](#) sur le segment  $x \in [0, 1]$ .



1. Si  $X \in \mathbb{R} \rightarrow R(X) \in \mathbb{R}$  est une fonction période  $2L$  arbitraire, i.e.

$$\forall X \in \mathbb{R}, \quad R(X + 2L) = R(X),$$

montrer que

$$z(x, t) = R(x - ct) - R(-x - ct) \quad (1.5)$$

est solution de l'équation des ondes (1.1) avec les conditions aux bords (1.4) et réciproquement.

2. Montrer que la solution (1.5) est **périodique en temps**, de période  $T = \frac{2L}{c}$ , i.e.

$$\forall x \in [0, L], \forall t \in \mathbb{R},$$

$$z\left(x, t + \frac{2L}{c}\right) = z(x, t).$$

Expliquer graphiquement ce résultat à partir du mouvement de l'onde sur  $x \in \mathbb{R}$ .

*Remarque 1.4.* La **périodicité en temps** de l'équation d'onde est une **propriété spéciale à la géométrie sur un segment**  $[0, L]$  et produit un signal périodique aussi appelée **«note musicale»** ou « système harmonique ». Cette périodicité du signal n'est pas vrai pour d'autres géométries (ex : membrane 2D). Cette propriété est la raison principale d'utiliser des cordes pincées ou frappées dans certains **instruments de musique**, comme la **kora**, le piano, la guitare, le clavecin, la harpe, etc.

## 1.2 Méthode de résolution de Fourier

On étudie ici la méthode de résolution de Fourier pour l'équation d'onde qui est assez différente de la méthode d'Alembert car on utilise la « base des ondes planes ».

**Exercice 1.5.** « Solution de Fourier de l'équation des ondes à 1D sur  $\mathbb{R}$  ». On considère à nouveau l'équation des ondes (1.1) pour une fonction  $x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \rightarrow z(x, t) \in \mathbb{R}$ .

1. Pour des paramètres  $\omega \in \mathbb{R}$  appelé de **fréquence temporelle** et  $k \in \mathbb{R}$  appelé **vecteur d'onde (ou fréquence spatiale)**, on considère la fonction

$$z_{k,\omega}(x, t) := e^{i(kx - \omega t)}$$

appelée **mode de Fourier** ou **onde plane**. Montrer que  $z_{k,\omega}$  est solution de (1.1) si et seulement si  $k, \omega$  vérifient une certaine condition appelée **relation de dispersion**.

2. Donner l'expression de  $\text{Re}(z_{k,\omega}(x, t))$ . Faire un schéma de la fonction  $x \rightarrow \text{Re}(z_{k,\omega}(x, t))$  à  $t$  fixé, et  $t \rightarrow \text{Re}(z_{k,\omega}(x, t))$  à  $x$  fixé, en indiquant  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  appelée **longueur d'onde** et  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  appelée **période** et  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  appelée **fréquence**.

**Exercice 1.6.** « Solution de Fourier de l'équation des ondes à 1D sur un segment  $[0, L]$  ». On considère à nouveau l'équation des ondes (1.1) portant sur les fonctions  $x \in [0, L], t \in \mathbb{R} \rightarrow z(x, t) \in \mathbb{R}$  i.e. sur un segment de longueur  $L > 0$  et avec les conditions aux bords (1.4).

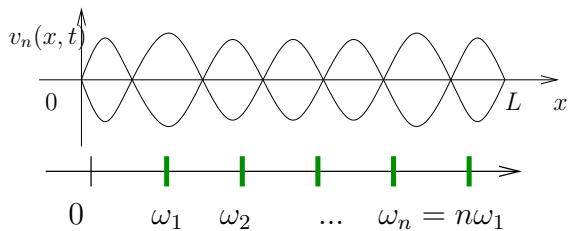


FIGURE 1.1 – (a) Enveloppe d'un mode propre (1.6), ici  $n = 7$  appelé **onde stationnaire** ou **mode propre**. La fréquence  $\omega_n$  est appelée harmonique  $n$ . (b) « Spectre harmonique ». Voici des vidéos pour le **mode n=1**, **mode n=2**, et **mode n=3** faites par ce programme `onde_1dim_segment.py`. Voici des superpositions de modes, **vidéo1**, **vidéo2**, **vidéo3** faites par ce programme `onde_1dim_segment_superposition.py`.

1. Montrer que la fonction suivante est solution

$$z(x, t) = \sum_{n \geq 1} V_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \sin(k_n x) \quad (1.6)$$

avec pour chaque **numéro d'harmonique**  $n$ , une amplitude  $V_n \geq 0$  et phase  $\alpha_n \in \mathbb{R}$  arbitraires, et un vecteur d'onde  $k_n = n \frac{\pi}{L}$  et une fréquence  $\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$  vérifiant  $\omega_n = k_n c$  et donc

$$\omega_n = n \omega_1 \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (1.7)$$

multiple entier de  $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$

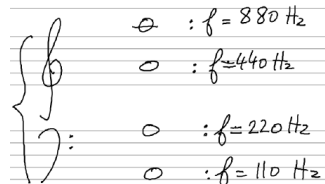
2. Optionnel : montrer réciproquement que toute solution de l'équation des ondes sur un segment  $[0, L]$  s'écrit comme (1.6).

### 1.3 Applications numériques

#### Exercice 1.7.

1. On souhaite qu'une corde de guitare (3/4) de longueur  $L = 56\text{cm}$ , produise un la de fréquence  $f = 110\text{Hz}$ . Calculer la vitesse  $c$  de l'onde élastique sur la corde. Donner les fréquences des harmoniques  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ .
2. Trouver la longueur  $L$  d'un tuyau sonore fermé pour produire un fa F de fréquence  $f_F = 343\text{Hz}$ ?
3. On souhaite qu'une corde de guitare de longueur  $L = 50\text{cm}$ , produise un ré de fréquence  $f = 150\text{Hz}$ . Calculer la vitesse  $v$  de l'onde élastique sur la corde.

4. Considérons la corde de si<sub>5</sub> = B<sub>5</sub>,  $f_{B_5} = 496\text{Hz}$  d'une guitare de longueur  $L = 50\text{cm}$ . A quelle distance  $L'$  du chevalet placer le doigt, pour produire la tierce D#<sub>5</sub> de fréquence  $f_{D\#5} = \frac{5}{4} \times f_{B_5}$ ?
5. Calculer la longueur d'onde  $\lambda$  pour une onde sonore de fréquence  $f = 440\text{Hz}$ , (la du diapason) et pour les autres la de la figure?



6. Dans l'eau, la vitesse du son est  $c = 1500\text{m/s}$ . Les **dauphins** utilisent des sons de fréquences  $f \approx 150\text{kHz}$  pour localiser les poissons (proies). Quelle est la longueur d'onde  $\lambda$  correspondante? Même questions pour les **Marsouins** ( $f \geq 100\text{kHz}$  et les **Orques**  $f \leq 100\text{kHz}$ )?

## 2 Domaines bi-dimensionnels

En général il est impossible de résoudre exactement l'équation d'onde dans un domaine bi-dimensionnel quelconque. On peut le faire de façon approchée avec un ordinateur, ou exactement pour des géométries particulières (symétriques) comme le rectangle ou le cercle/ellipse.

### 2.1 Equation des ondes sur le rectangle $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$

On peut généraliser le résultat de l'exercice 1.6 (qui était à 1 dim) et considérer une cavité rectangulaire en utilisant la séparation des variables. Considérons une «**cavité rectangulaire**», à **deux dimensions**  $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$ , une fonction  $x = (x_1, x_2) \in \Omega, t \in \mathbb{R} \rightarrow v(x, t)$  solution de l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \Delta v = 0 \quad (2.1)$$

où  $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$  et avec les conditions aux bords  $v(x, t) = 0$  si  $x \in \partial\Omega$  (bords de  $\Omega$ ). Voici la solution à ce problème.

**Proposition 2.1.** Toute solution de (2.1) est une superposition de **modes stationnaires** (ou **modes propres**) :

$$v(x, t) = \sum_{n=(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2} V_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (2.2)$$

$$\sin(k_{n_1} x_1) \sin(k_{n_2} x_2)$$

avec les vecteurs d'ondes  $k_n = (k_{n_1}, k_{n_2}) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant

$$k_{n_j} = n_j \frac{\pi}{L_j}, \quad j = 1, 2,$$

( $k_n$  appartient à un réseau) et le **spectre de fréquences**

$$\omega_n = c |k_n|, \quad (2.3)$$

avec  $|k_n| = (k_{n_1}^2 + k_{n_2}^2)^{1/2}$ , l'amplitude  $V_n > 0$ , et phase  $\varphi_n \in \mathbb{R}$ . Le spectre "n'est pas harmonique", et on a la **loi de Weyl** : le nombre de fréquences propres  $\omega_n$  dans l'intervalle  $[0, \omega]$  est

$$\mathcal{N}(\omega) := \#\{\omega_n \leq \omega\} = \frac{\omega^2}{4\pi c^2} L_1 L_2 + o(\omega^2) \quad (2.4)$$

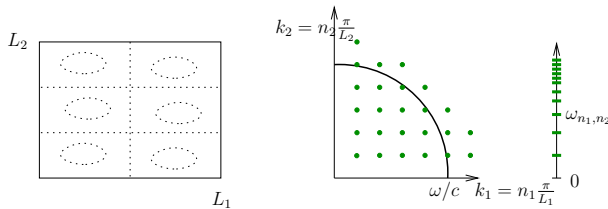


FIGURE 2.1 – (a) Enveloppe d'un mode propre (2.2), ici  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ . (b) Plan du vecteur d'onde  $k = (k_1, k_2)$ . Le spectre est la condition  $\omega = c|k|$  (c) Spectre (non harmonique).

### Exercice 2.2.

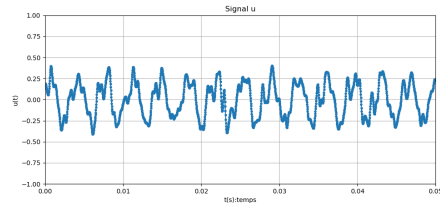
1. Montrer que (2.2) est solution de l'équation d'onde et vérifie les conditions aux bords de  $\Omega$ .
2. (Optionnel). Montrer réciproquement que toute solution est de la forme (2.2).
3. (Optionnel). Dédurre la loi de Weyl (2.4).

*Remarque 2.3.* Voici le signal mesuré en un point de la plaque et le son produit [audio\\_2D.wav](#) avec une fondamentale

à  $f_0 = 440\text{Hz}$ , par ce programme [sinus\\_sum\\_general.py](#). Il s'agit précisément de la fonction

$$u(t) = \sum_{n_1, n_2=1}^{10} A_n \cos(2\pi f_n t + \varphi_n)$$

avec l'amplitude  $A_n = 1/(n_1^2 + n_2^2)$ , des fréquences  $f_n = (n_1^2 + n_2^2)^{1/2} f_0$  et des phases  $\varphi_n$  aléatoires. On perçoit le son comme non harmonieux, car le signal est non périodique, le spectre est non harmonique.



## 3 Trajectoires de paquets d'ondes

Dans la section précédente nous avons décrit la propagation des ondes dans un cas très particulier : 1 dimension et l'équation d'onde uniforme (1.1). Nous avons vu qu'une onde se propage à la vitesse  $c$  constante, sans dispersion.

Dans le cas général (domaine quelconque de dimension quelconque et coefficients variables) il est toujours vrai que les ondes « suivent des trajectoires de particules », mais des trajectoires particulières, gouvernées par des équations de Hamilton. La dispersion éventuelle des ondes viendra du fait que ces trajectoires se dispersent (ou pas). C'est ce que nous allons étudier.

### 3.1 Proposition générale sur la relation onde-particules dans la limite des petites longueurs d'ondes

La proposition suivante montre que une onde quelconque peut être considérée comme superposition de paquets d'ondes élémentaires.

**Définition 3.1.** Un paquet d'onde sur l'espace  $\mathbb{R}^n$  est une fonction de la forme

$$x \rightarrow \varphi_{x_0, k_0}(x) = a e^{ik_0 x} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x-x_0}{\sigma} \right|^2} \quad (3.1)$$

avec les paramètres de l'espace des phases :  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  : position,  $k_0 \in \mathbb{R}^n$  : vecteur d'onde,  $\sigma > 0$  : largeur et  $a > 0$  tel que  $\|\varphi_{x_0, k_0}\|_{L^2} = 1$ .

**Proposition 3.2.** Toute fonction  $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow u(x)$  se décompose comme superposition de paquets d'ondes :

$$u(x) = \int A(x_0, k_0) \varphi_{x_0, k_0}(x) \frac{dx_0 dk_0}{(2\pi)^n}$$

avec des amplitudes données par

$$\begin{aligned} A(x_0, k_0) &= \langle \varphi_{x_0, k_0}(x) | u \rangle_{L^2} \\ &= \int \overline{\varphi_{x_0, k_0}(x)} u(x) dx \end{aligned}$$

La proposition suivante montre que l'évolution d'un paquet est semblable à celui d'une particule soumise aux équations de Hamilton de la mécanique classique.

**Proposition 3.3.** « Relation onde-particules ». Si à la date  $t = 0$ ,  $u_0 = \varphi_{x_0, k_0}$  est un paquet d'onde et la fonction  $u_t$  évolue selon l'équation d'onde

$$\frac{\partial u_t}{\partial t^2} - c^2(x) \Delta u_t = 0 \quad (3.2)$$

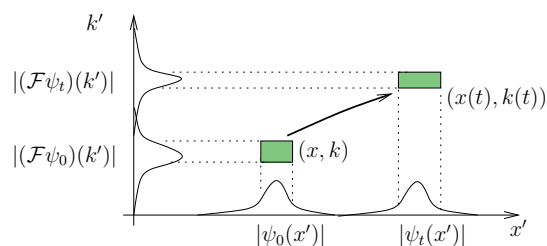
ou plus généralement une EDP (équation linéaire aux dérivées partielles), alors en première approximation, dans la limite semiclassique  $|k_0| \gg 1$ ,  $u_t$  est proche d'un paquet d'onde :

$$u_t \approx \varphi_{x_t, k_t} \quad (3.3)$$

avec  $x_t, k_t$  solutions des équations de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dx_t}{dt} &= \frac{\partial \omega}{\partial k}, & : \text{vitesse de groupe} \quad (3.4) \\ \frac{dk_t}{dt} &= -\frac{\partial \omega}{\partial x}, \end{aligned}$$

et avec la fonction  $(x, k) \rightarrow \omega(x, k)$  appelée **Hamiltonien** (ou relation de dispersion) obtenue en substituant  $e^{i(kx - \omega t)}$  dans l'EDP. Cette substitution s'appelle le **principe de correspondance**. Inversement l'EDP est  $i \frac{\partial u_t}{\partial t} = \hat{\omega} u_t$  où  $\hat{\omega}$  est l'opérateur obtenu à partir de  $\omega(x, k)$  en remplaçant  $k$  par  $-i\nabla = -i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)_j$ .



**Remarque 3.4.** dans l'approximation (3.3) on a omis une constante de phase  $u_t \approx a e^{ik_t(x - x_{\text{phase}}(t))} e^{-\frac{1}{2} \left| \frac{x-x_t}{\sigma} \right|^2}$  et on a  $\frac{dx_{\text{phase}}(t)}{dt} = \omega(k_t, x_t)$  appelée **vitesse de phase**.

**Exercice 3.5.** « De l'équation de Schrödinger à l'équation de Newton ». Les ondes quantiques de matière  $x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \psi_t(x) \in \mathbb{C}$  évoluent selon l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x) \psi$$



où  $\hbar > 0$  est la constante de Planck,  $m > 0$  est la masse de la particule,  $x \rightarrow U(x)$  est l'énergie potentielle et  $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2}$ .

1. En appliquant la proposition 3.3, obtenir la fonction de Hamilton  $(x, k) \rightarrow \omega(x, k)$ . Les fréquences de ces ondes sont très élevées et on définit plutôt

$$\begin{aligned} H = E &:= \hbar\omega && \text{: énergie,} \\ p &:= \hbar k && \text{: impulsion.} \end{aligned}$$

Montrer que l'on obtient l'expression habituelle de l'énergie en mécanique

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U(x),$$

et les équations de Hamilton  $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$ ,  $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ .

2. En appliquant la proposition 3.3 et les équations de Hamilton (3.4), montrer que les paquets d'ondes quantiques évoluent selon l'équation de Newton de la mécanique (1685)

$$m \frac{dx^2}{dt^2} = F(x) = -(\text{grad}U)(x)$$

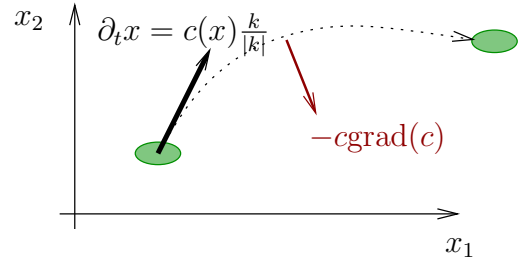
$$\text{avec } \text{grad}U = \left( \frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3} \right).$$

### Exercice 3.6. « Propriétés générales des équations de Hamilton ».

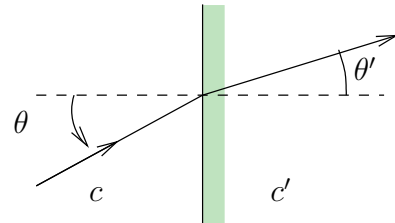
1. Montrer que  $t \rightarrow \omega(x(t), k(t))$  est constante. On appelle cela la « **conservation de l'énergie** », (car dans le cas de la mécanique,  $E = \hbar\omega$  est appelé énergie).
2. Les équations de Hamilton donnant  $V = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dk}{dt} \right)$  s'interprètent comme un champ de vecteur dans l'espace des phases  $(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Montrer que ce champ de vecteur est de **divergence nulle** et que cela implique que le **transport préserve le volume**. On dit que le flot hamiltonien est **conservatif**.

### Exercice 3.7. « Equation des ondes (3.2) à indice variable $c(x)$ et réfraction ».

1. Pour l'équation d'onde  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (c(x))^2 \Delta v = 0$  où  $c(x)$  est l'**indice variable** du milieu, expliciter la fonction de Hamilton  $(x, k) \rightarrow \omega(x, k)$  et déduire que la vitesse d'un paquet d'onde est colinéaire à  $k$  et de module  $\left\| \frac{dx}{dt} \right\| = c(x)$  (la **vitesse de l'onde**) et que  $\frac{dk}{dt} = -\|k\| \text{grad}(c)$  donc la direction de  $k$  varie dans la direction de  $-\text{grad}(c)$ , qui agit comme une « force ».



2. Dans le cas particulier où l'indice  $c(x)$  prend deux valeurs différentes  $c, c'$  de part et d'autre d'une interface, montrer que les équations de Hamilton donnent la formule de la réfraction  $\frac{1}{c} \sin \theta = \frac{1}{c'} \sin \theta'$  (découvert par **Ibn Sahl** (983) à Bagdad pour la lumière)



### Exercice 3.8. (Optionnel) « Preuve de la relation onde-particules 3.3 ».

Nous considérons ici une preuve simplifiée. Pour cela on considère une fonction de Hamilton  $\omega(x, k)$  linéarisée à l'ordre 1 (près d'un point de l'espace des phases qui sert d'origine. On admettra que les termes d'ordres supérieures sont négligeables dans la limite semiclassique  $|k_0| \gg 1$ ) :

$$\omega(x, k) = \omega_0 + \alpha \cdot x + \beta \cdot k$$

avec  $\omega_0 \in \mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ .

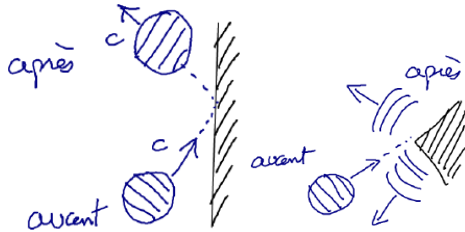
1. Montrer que par le principe de correspondance on obtient l'EDP

$$i \frac{\partial u_t}{\partial t} = (\omega_0 + \alpha \cdot x + \beta \cdot (-i\nabla)) u_t$$

2. Partant d'un paquet d'onde (3.1) à  $t = 0$ , montrer que  $u_t$  est un paquet d'onde en  $(x_t, k_t)$  qui satisfait les équations de Hamilton (3.4).

### 3.2 Applications

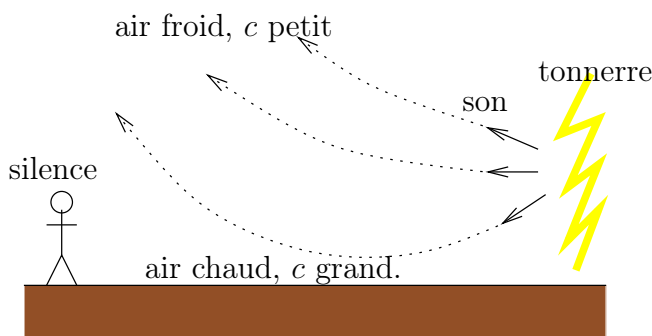
1. Pour une note musicale de durée  $t = 0.2s$ , calculer la taille  $L$  du « paquet d'onde sonore » produit ?
2. Comment se comporte un paquet d'onde arrivant sur un obstacle plan non absorbant ? et sur un obstacle pointu ?



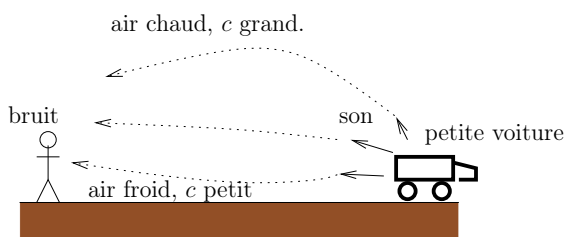
3. Une onde sonore se déplace dans un grand espace où l'air est plus froid au sol et plus chaud en hauteur. Tracer l'allure des trajectoires sonores.

**Exercice 3.9. “Mirage acoustique”** Référence : Pour la science n298 (2002) Courty-Kierlyk. Expliquer les phénomènes suivants à partir du résultat de l'exercice 3.7 que la direction des paquets d'ondes sonores sont déviés selon  $\frac{dk}{dt} = -\|k\| \text{grad}(c)$ .

- En été, le soir, il est possible d'observer des orages aux loin, mais de ne pas entendre de tonnerre. On parle “d'éclairs de chaleur”.



- En hiver, il est possible d'entendre assez fortement une voiture qui passe pourtant loin dans une campagne calme.



- Dans l'océan, vers une profondeur de 1000m, la valeur de  $c(z)$  est minimale, ainsi les rayons sonores sont capturés

dans ce canal appelé **canal SOFAR** et découvert en 1943. Les **baleines commu- niquent** entre elles à longues distances (1000 km) en se plaçant à cette profondeur. De plus elle envoient des sons qui font échos sur des montagnes sous-marines et leur permette de se localiser dans l'océan. Il semble en effet qu'elles mémorise les positions des ces montagnes dans l'océan. Vidéo, chant des baleines à bosse.

