Université Grenoble Alpes. Licence 3 Physique.
TD de musique et physique. Frédéric Faure.

TD 1. **Le son**

Table des matières

1 Composition de l'air

Référence : cours page 12.

L'air est un fluide essentiellement constitué des molécules diatomiques N_2 (di-azote) pour 80% des molécules et de O_2 (di-oxygène) pour 20%. On rappelle que $N_A = 6.10^{23}$ est le nombre d'Avogadro qui est le nombre d'objets dans une mole et que la masse d'une mole de nucléons (i.e. neutron ou proton) est de 1 gramme. D'après la composition des noyaux atomiques, l'atome d'azote N contient 7 protons et 7 neutrons, l'atome d'oxygène O contient 8 protons et 8 neutrons. Déduire la masse molaire moyenne M des molécules de l'air.

2 Equation de mouvement du fluide : équation d'Euler

Référence : cours Proposition 1.1.3.

On note $x \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées en espace. On note $t \in \mathbb{R}$ le temps. On note le champ de pression $\boldsymbol{p}(x,t) \in \mathbb{R}$ qui est la force orthogonale à une unité de surface d'orientation quelconque. On note le champ de densité (ou masse volumique) $\boldsymbol{\rho}(x,t) \in \mathbb{R}$ et le champ de vitesse $v(x,t) \in \mathbb{R}^3$. Le champ de vitesse détermine des trajectoires du fluide $t \to x(t)$ par l'équation $\frac{dx}{dt} = v$. On notera l'accélération du fluide par

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v(x(t), t).$$

On néglige la force de pesanteur. Le fluide subit seulement des forces de pression internes.

1. Montrer « l'équation de conservation de la masse »
$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{\rho} v) = 0$$
2. Considérer un petit élément de volume d^3x dans le fluide. Montrer que la force de pression résultante exercée sur cet élément de volume est $-\mathrm{grad}(\boldsymbol{p})\, d^3x$.
3. Montrer que l'équation de la dynamique de Newton pour le fluide par unité de volume prend la forme
$$\boldsymbol{\rho}\frac{dv}{dt} = -\mathrm{grad}(\boldsymbol{p}) \qquad (2.1)$$
appelée **équation d'Euler**.

3 Des équation de Euler à l'équation des ondes sonores

Référence : cours Proposition 1.2.1 page 16.

On suppose que le fluide est soumis aux équations de mouvement de Euler $\boldsymbol{\rho}\frac{dv}{dt} = -\mathrm{grad}\left(\boldsymbol{p}\right)$. On suppose des petites fluctuations de la pression p et de la densité ρ autour de l'état d'équilibre constant et uniforme, i.e.

$$\boldsymbol{p}\left(x,t\right) = p_0 + p\left(x,t\right)$$

$$\boldsymbol{\rho}\left(x,t\right) = \rho_0 + \rho\left(x,t\right)$$

avec $|p| \ll p_0$ et $|\rho| \ll \rho_0$.

1. On admet l'équation de Laplace[1] $\boldsymbol{p} = C\boldsymbol{\rho}^{\gamma}$, avec $\gamma = \frac{7}{5}$. Déduire la relation suivante entre p, ρ :
$$\frac{p}{p_0} = \gamma\frac{\rho}{\rho_0}. \tag{3.1}$$
2. Utilisant l'équation de mouvement de Euler du fluide, l'équation de conservation de la masse et l'équation de Laplace, montrer que au premier ordre, p est solution de **l'équation des ondes**
$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2\Delta p = 0 \tag{3.2}$$
avec la **vitesse du son**
$$c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma R T_0}{M}\right)^{1/2},$$
utilisant la loi des gaz parfait $\boldsymbol{p}V = nRT$ pour n moles de gaz dans un volume V, à la pression $\boldsymbol{p}$ et température T, avec la constante de Boltzmann $k = 1.38\,10^{-23}J/K$ et $R = N_A k = 8.31\frac{J}{K}$.

4 Valeurs numériques sur les ondes sonores

Remarque 4.1. On verra plus tard que la valeur c dans l'équation des ondes est appelée « vitesse du son » car elle correspond en effet à la vitesse de propagation des paquets d'ondes.

1. Application numérique : avec une température $T_0 = 293K = 20C^{\circ}$, une pression $p_0 = 10^5\mathrm{Pa}$, calculer la densité de l'air moyenne ρ_0 et déduire la vitesse de son c.
2. Dans l'air en conditions normales, si la température augmente de $\delta T = 20C^{\circ}$ calculer la variation de la vitesse du son on donnant les valeurs de $\frac{\delta c}{c}$ et δc.
3. Sachant que le noyau de l'Hélium 4 contient 2 protons et 2 neutrons et que l'Hélium est gaz monoatomique, déduire la valeur de $\gamma = \frac{5}{3}$ et la vitesse du son c dans l'Hélium.
4. Dans des conditions normales de température et pression, combien y a t-il de molécules N dans un mètre cube d'air (donner un ordre de grandeur) ?
5. Pendant le temps de réaction typique d'un neurone qui est de $\Delta t = 50ms$, le son dans l'air avance de quelle distance d (donner un ordre de grandeur) ? Quelle est la manifestation pratique de ce temps Δt en musique et comment s'appelle t-il ?
6. Si on entend le tonnerre $10s$ après avoir vu l'éclair, quelle est la distance d de l'orage ?
7. Calculer la longueur d'onde λ_{F_5} pour une onde sonore de fréquence $f_{F_5} = 343\mathrm{Hz}$, (le fa F_5) et $\lambda_{F_3}, \lambda_{F_4}$ pour les fa F_3, F_4 des octaves inférieures ?

1. Equation de Laplace que l'on admet et qui résulte d'un comportement isentropique du fluide, voir TD3, ex.3.1. On a
$$\gamma = 1 + \frac{2}{\mathbf{3}+\mathbf{2}} = \frac{7}{5}$$
où le chiffre **3** correspond aux trois dimension de l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$, i.e. les 3 degrés de liberté de translation de chaque molécule, le chiffre **2** correspond aux deux dimension de la sphère S^2, i.e. les 2 degrés de liberté de rotation de l'axe des molécules diatomiques.

8. Les dauphins utilisent des sons de fréquences $f \approx 150\,\mathrm{kHz}$ pour localiser les poissons (proies). Quelle est la longueur d'onde λ correspondante ? ($c = 1500\,\mathrm{m}/s$ dans l'eau)