Codage des nombres en base 2

(1) en base 10 avec $B = 3$ cases,

on peut coder $10^3 = 1000$ entiers :

$$\left.\begin{matrix} 000 \\ 001 \\ \vdots \\ 009 \\ 010 \\ \vdots \\ 999 \end{matrix}\right\} \text{1000 valeurs}$$

avec B cases, on peut coder 10^B entiers

de 0 à $10^B - 1$.

(2) en base 2, avec $B = 3$ cases,

on peut coder $2^B = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ entiers :

$$\left.\begin{matrix} 000 & : 0 \\ 001 & : 1 \\ 010 & : 2 \\ 011 & : 3 \\ 100 & : 4 \\ 101 & : 5 \\ 110 & : 6 \\ 111 & : 7 \end{matrix}\right\} \text{8 entiers}$$

Plus généralement, avec B cases,
appelés "nombre de bit", on peut coder
2^B entiers de 0 à $2^B - 1$.

(3) avec $B = 4$ bits, le codage des
entiers positifs et négatifs est le suivant :

entier	code en base 2 (complément à deux)
+7	0111
+6	0110
+5	0101
+4	0100
+3	0011
+2	0010
+1	0001
0	0000
−1	1111
−2	1110
−3	1101
−4	1100
−5	1011
−6	1010
−7	1001
−8	1000

"bit de signe"

(4) avec $B = 24$ bits,

avec le complément à 2,

on peut coder des entiers

entre $-\frac{2^B}{2} = -2^{B-1} \approx -8.10^6$

et $\frac{2^B}{2} - 1 = 2^{B-1} - 1 \approx 8.10^6$

Les signaux

- Dans un signal de durée $D = 40$ mn.
  échantillonné avec pas de temps
  $\delta = \frac{1}{50\,000}$ s. il y a

$$N = \frac{D}{\delta} = \frac{40 \text{ mn}}{\frac{1}{50\,000} \text{ s}} = 40 \times 60 \times 50\,000$$
$$= 1.2 \; 10^8$$
échantillons

- Un signal avec $N = 15 \cdot 10^6$ échantillons
  codé sur $B = 24$ bits $= 3 \times 8$ bits
  $= 3$ octets

occupe $N \times 3$ octets $= 45 \cdot 10^6$ octets $= 45$ Mo
en mémoire

Mesure de l'intensité en décibels

• x :	$0{,}01$	$0{,}1$	1	10	100	1000
	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log_{10}(x)$:	-2	-1	0	1	2	3
$dB(x) = 10 \log_{10}(x)$:	-20	-10	0	10	20	30

• $10^{-9} \equiv$ nano, $10^{-6} \equiv$ micro

$10^{-3} \equiv$ milli, $10^{3} \equiv$ kilo

$10^{6} \equiv$ Méga, $10^{9} \equiv$ Giga

$10^{12} \equiv$ Téra

- un écart de 50 dB correspond à un rapport de puissance x tq.

$$dB(x) = 50 \Leftrightarrow \log_{10}(x) = 5 \Longleftrightarrow x = 10^5$$

- Trombonne $10W = \underbrace{10^5}_{50\,dB} \cdot \underbrace{10^{-4}}_{60\,dB} W$

donc $50 + 60 = 110\ dB$

Clarinette ou chanteur $0.01W = \underbrace{100}_{20\,dB} \cdot \underbrace{10^{-4}}_{60\,dB} W$

donc $60 + 20 = 80\ dB$

- Puissance de 10 clarinettes

$= \underbrace{10}_{10\,dB} \times \underbrace{\text{puissance d'une clarinette}}_{80\,dB}$

donc $10 + 80\,dB = 90\,dB$

$\underbrace{100\,dB}_{\text{Trombonne}} = \underbrace{80\,dB}_{\text{clarinette}} + \underbrace{20\,dB}_{\text{facteur } x = 10^2 = 100}$

donc puissance du trombonne

= puissance de 100 clarinettes

- si signal $u' = 8 \times u$

alors intensité $I' = (u')^2 = 64\,u^2 = \underset{\overset{\parallel}{2^6}}{64}\, I$

donc $dB' = 10 \log_{10}(I') = 10 \log_{10}(2^6\, I)$

$= 10 \log_{10}(2^6) + 10 \log_{10}(I)$

$= 6 \times 10 \underbrace{\log_{10}(2)}_{0.3} + dB = 18 + dB$

- Si un signal est codé sur $B = 24$ bits le rapport entre l'amplitude minimale 1 et l'amplitude maximale $2^{24-1} = 2^{23}$ est de $x = \dfrac{2^{23}}{1} = 2^{23}$

ce qui correspond à

$$dB(x) = 10 \log_{10}\left(2^{23}\right) = 10 \times 23 \times \log_{10}(2) \qquad \log_{10}(2) \approx 0.3$$

$$= 138 \text{ dB}$$

appelé "<u>rapport signal sur bruit</u>"

le cercle

① si $f = 1000\ Hz$, $T = \frac{1}{1000}\ s = 10^{-3} s = 0.001\ s$

② si $T = 0.01 s = 10^{-2} s$.

$$f_1 = \frac{1}{T} = 10^{2} s^{-1} = 100\ Hz$$
$$f_2 = 2 f_1 = 200\ Hz$$
$$f_3 = 3 f_1 = 300\ Hz$$

③ La voyelle A a plus d'énergie dans les harmoniques élevées que la voyelle O

(4) $T = (0.3040 - 0.2995)\,\frac{1}{2}$

$= \frac{0.0045}{2} = 0.0022\,s$

donc

$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.0022} = 450\ Hz$

$f_2 = 2 f_1 = 900\ Hz$

$f_3 = 3 f_1 = 1350\ Hz$

Pitch d'un signal périodique

① Le pitch de $f = 220$ Hz
est $x = \frac{12}{\ln 2} \ln\left(\frac{220}{440}\right) + 69$

$$= \frac{12}{\ln 2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + 69$$
$$= \frac{12}{\ln 2}\left(-\ln 2\right) + 69 = -12 + 69$$
$$= 57$$

② $x = \frac{12}{\ln 2} \ln\left(\frac{f}{f_{A5}}\right) + x_{A5}$

$$\Longleftrightarrow \left(x - x_{A5}\right)\frac{\ln 2}{12} = \ln\left(\frac{f}{f_{A5}}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f}{f_{A5}} = \exp\left(\frac{\ln 2}{12}\left(x - x_{A5}\right)\right)$$

$$\Longleftrightarrow f = f_{A5}\, 2^{(x - x_{A5})/12}$$

③ $$x = \frac{12}{\ln 2} \ln\left(\frac{f}{f_{A5}}\right) + x_{A5}$$
$$x' = \frac{12}{\ln 2} \ln\left(\frac{f'}{f_{A5}}\right) + x_{A5}$$

et $$\ln\left(\frac{f'}{f_A}\right) - \ln\left(\frac{f}{f_A}\right) = \ln\left(\frac{f'}{\cancel{f_A}} \frac{\cancel{f_A}}{f}\right) = \ln\left(\frac{f'}{f}\right)$$

donc $$x' - x = \frac{12}{\ln 2} \ln\left(\frac{f'}{f}\right)$$

④ $\frac{f'}{f} = \frac{3}{2}$ correspond à

$$x' - x = \frac{12}{\ln 2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{12}{\ln 2} \ln 3 - \frac{12}{\ln 2} \ln 2$$
$$= 12 + 7 + 0.02 - 12$$
$$= 7 + 0.02 \quad \text{demi tons}$$

quinte

$\cdot \ \dfrac{f'}{f} = \dfrac{7}{4} = \dfrac{7}{2^2}$ correspond à

$$x' - x = \frac{12}{\ln 2} \ln\left(\frac{7}{2^2}\right) = \frac{12}{\ln 2} \ln 7 - \frac{12 \times 2 \ln 2}{\ln 2}$$

$$= 2 \times 12 + 10 - 0.31 - 2 \times 12$$

$$= 10 - 0.31$$ demi tons

$\uparrow$

septième mineure

Sonogramme

① Paquet d'onde Gaussien

$$\varphi_{t_0,f_0,\sigma}(t) = e^{i2\pi f_0 t}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2}$$

② $\Delta f = \dfrac{1}{\Delta t}$

③ $x = \dfrac{12}{\ln 2} \ln\left(\dfrac{f}{f_{A5}}\right) + x_{A5}$

on dérive : $dx = \dfrac{12}{\ln 2} \dfrac{df}{f}$

donc pour des petits intervalles :

$$\Delta x = \frac{12}{\ln 2} \frac{\Delta f}{f} = \frac{12}{\ln 2} \frac{1}{f \Delta t}$$

donc

$$\Delta t = \frac{12}{\ln 2} \frac{1}{f \Delta x} > \frac{2 \times 12}{\ln 2} \frac{1}{220} = 0.16 \text{ sec}$$

si $\Delta x < 1/2$ = quart de ton

(4) Transformée par paquets d'ondes

$$(Tu)(t,f) = \frac{1}{\|\varphi_{t,f}\|} \langle \varphi_{t,f} | u \rangle_{L^2}$$

(5) L'avantage du sonogramme par rapport à la transformée de Fourier est d'avoir l'information en temps <u>et</u> fréquence.

Intervalles

(1) $f_{A\#_4} = 220 \times \underbrace{1.06}_{(1+6\%)} = 233\ Hz$

(2) $\frac{1}{10}\ 6\% = 0,6\% = 0,006$

$\Delta f = 0.006 \times 220\ Hz = 1.3\ Hz$

(3) $\Delta f = 4,4\ Hz$: nombre de battements par secondes

= écart en fréquence

donc $\frac{\Delta f}{f} = \frac{4,4}{440} = 0.01$

or 1 pitch $= 6\% = 0.06$

donc $\Delta x = \frac{0.01}{0.06} = 1/6$ de demi ton (perceptible)

④ L'harmonique n a la fréquence

$$f_n = n f_1$$

$\llcorner$ fréquence de la fondamentale

donc l'écart en pitch est

$$x_n - x_1 = \frac{12}{\ln 2} \ln\left(\frac{f_n}{f_1}\right) = \frac{12}{\ln 2} \ln n$$

ainsi

$$x_2 - x_1 = \frac{12}{\ln 2} \ln 2 = 12 = 1 \text{ octave}$$

$$x_3 - x_1 = \frac{12}{\ln 2} \ln 3 = 12 + 7 + 0.02$$

$$= 1 \text{ octave} + 1 \text{ quinte} + 0.02$$

$$x_4 - x_1 = \frac{12}{\ln 2} \ln 4 = \frac{12}{\ln 2} \ln 2^2 = \frac{12 \times 2}{\ln} \ln 2$$

$$= 2 \times 12 = 2 \text{ octaves}$$

$$x_5 - x_1 = \frac{12}{\ln 2} \ln 5 = 2 \times 12 + 4 - 0.14$$

$$= 2 \text{ octaves} + \text{tierce maj} - 0.14$$

$$x_6 - x_1 = \frac{12}{\ln 2}\ln 6 = \frac{12}{\ln 2}\ln(2\times 3) = \frac{12}{\ln 2}\ln 2 + \frac{12}{\ln 2}\ln 3$$

$$= 12 + 12 + 7 + 0.02 = 2 \text{ octaves} + \text{quinte} + 0.02$$

$$x_7 - x_1 = \frac{12}{\ln 2}\ln 7 = 2\times 12 + 10 - 0.31$$

$$= 2 \text{ octaves} + \text{sept. mineure} - 0.31$$

$$x_8 - x_1 = \frac{12}{\ln 2}\ln 8 = \frac{12}{\ln 2}\ln(2^3) = 3\times\frac{12\ln 2}{\ln 2} = 3 \text{ octaves}$$

$$x_9 - x_1 = \frac{12}{\ln 2}\ln 3^2 = 2\times\frac{12\ln 3}{\ln 2} = 2\times 12 + 2\times 7 + 0.04$$

$$= 2 \text{ octaves} + 2 \text{ quintes} + 0.04$$

$$= 3 \text{ octaves} + 1 \text{ ton} + 0.04$$

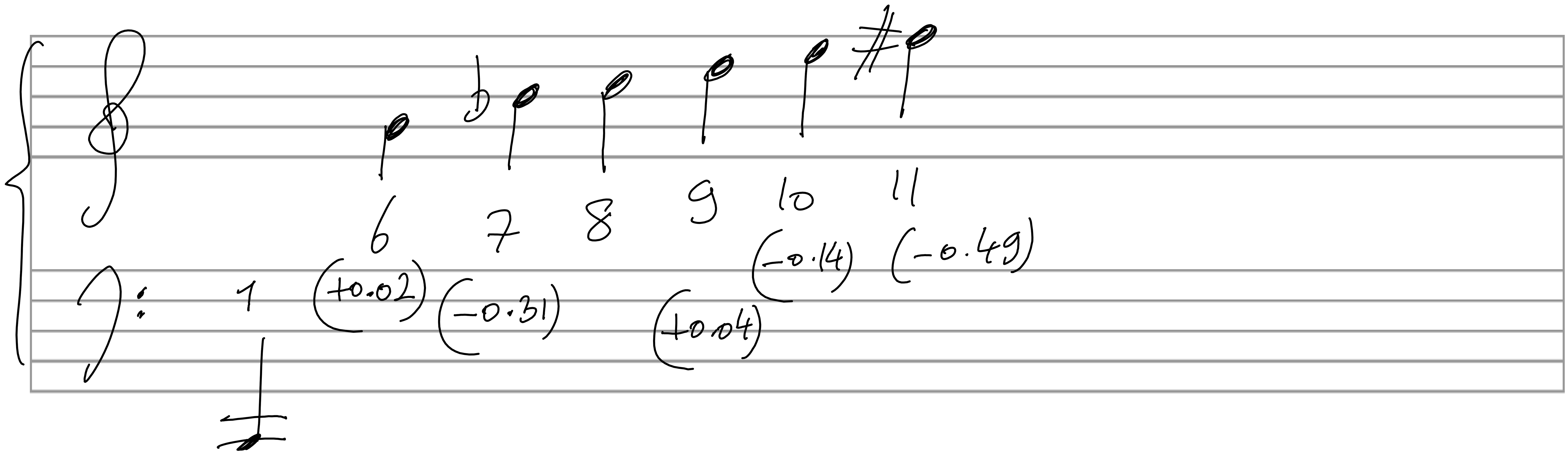
$$x_{10} - x_1 = \frac{12}{\ln 2}\ln 10 = \frac{12}{\ln 2}\ln(2\times 5)$$

$$= 12 + 2\times 12 + 4 - 0.14$$

$$= 3 \text{ octaves} + \text{tierce maj} - 0.14$$

$$x_{11} - x_1 = \frac{12}{\ln 2}\ln 11 = 3\times 12 + 6 - 0.49$$

$$= 3 \text{ octaves} + \text{triton} - 0.49$$



5

E_6 est l'harmonique 5 de C_4

E_6 est l'harmonique 4 de E_4

on souhaite un écart de $\Delta x = 0.14$ pitch

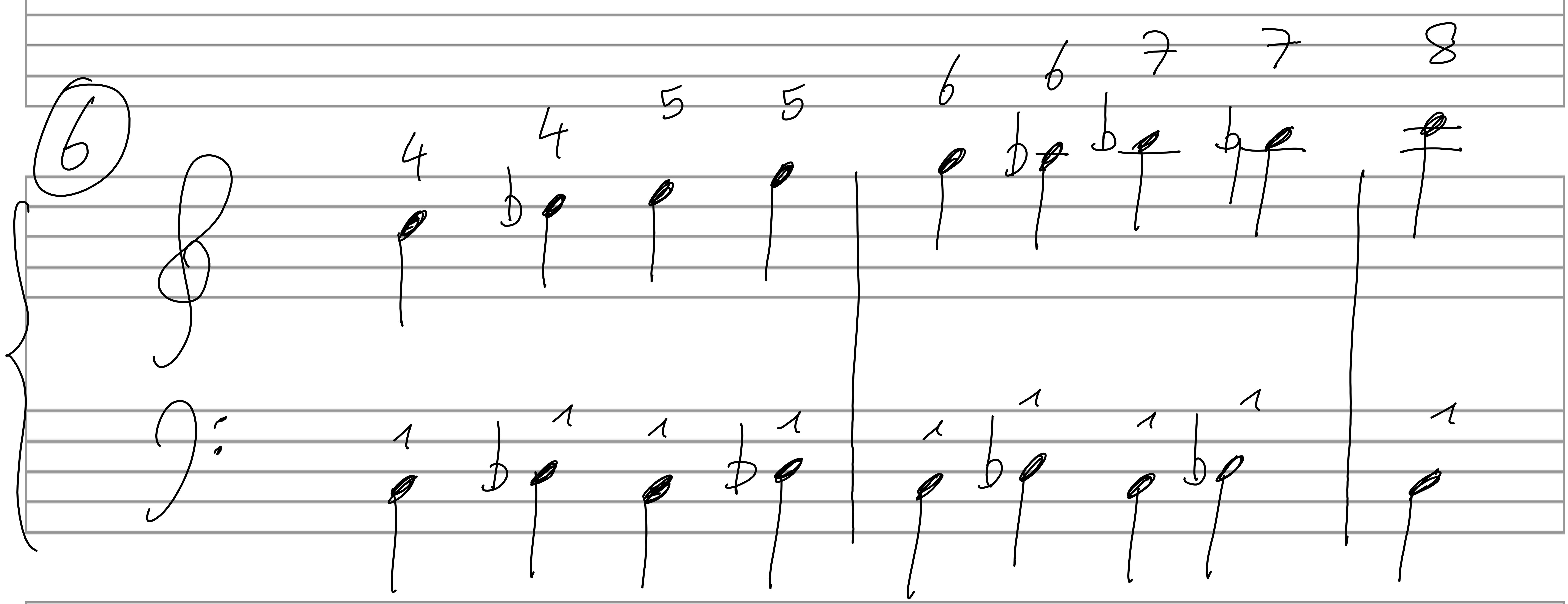
soit $\frac{\Delta f}{f} = 0.14 \times 0.06 = 0.0084$

or $f_{E_6} = 5 f_{C_4} = 5 \times 130\,\text{Hz} = 650\,\text{Hz}$

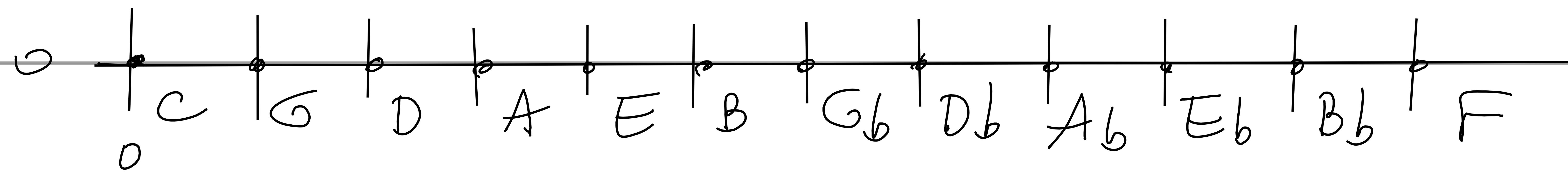
donc $\Delta f = 0.0084 \times f_{E_6} = 0.0084 \times 650\,\text{Hz}$

$= 5.46\,\text{Hz}$ battements par seconde

6



7. tempérament de pythagore:



tempérament de Zarlino:

Ab	Eb	Bb	F
E	B	Gb	Db
C	G	D	A

8. (11,0) : C-F sur le tempérament de pythagore s'appelle la "quinte du Loup" ou quinte du Loup

en pitch : $x = 11 \times 7.02$ modulo 12

$= 77 + 0.22$

$= 12 \times 6 + 5 + 0.22$ perceptible

$\equiv \underset{\text{quarte}}{5} + 0.22 = \underbrace{(5 - 0.02)}_{\text{quarte juste}} + 0.24$

(9) $(12,0)$ est le comma de pythagore

Son pitch est $x = 12 \times 7.02 = 84.24$
(en demi-ton)

$= 12 \times 7 + 0.24$

$= 0.24$ modulo 12

(10) $(4,-1)$ est le comma de Zarlino

Son pitch est $x = 4 \times (7 + 0.02)$

$- (4 - 0.14)$

$= 0.08 + 0.14$ modulo 12

$= 0.22$

(11) Il n'y a pas de tierce juste dans le tempérament de pythagore

(12) Dans le tempérament de Zarlino il y a 6 triades majeures justes et 6 triades mineures justes