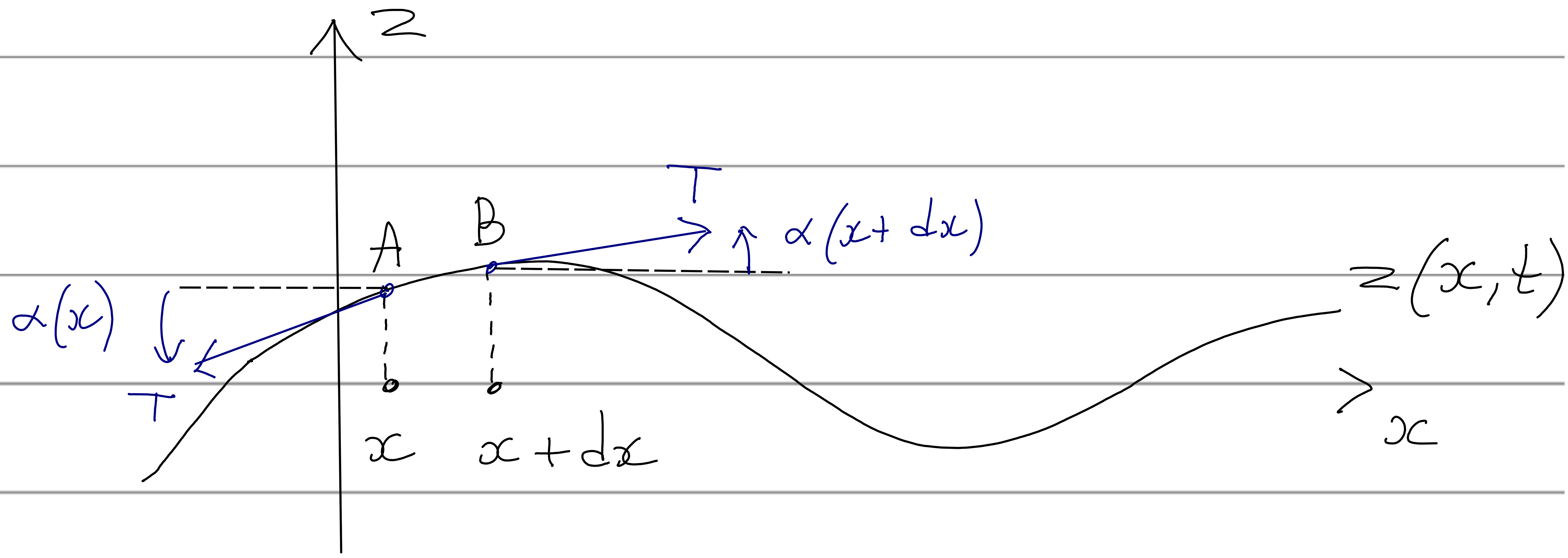
Propagation du Son

Vibration d'une corde

On considère une corde dans un plan.
Sa position à la date t est donnée par le graphe de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto z(x,t) \in \mathbb{R}$



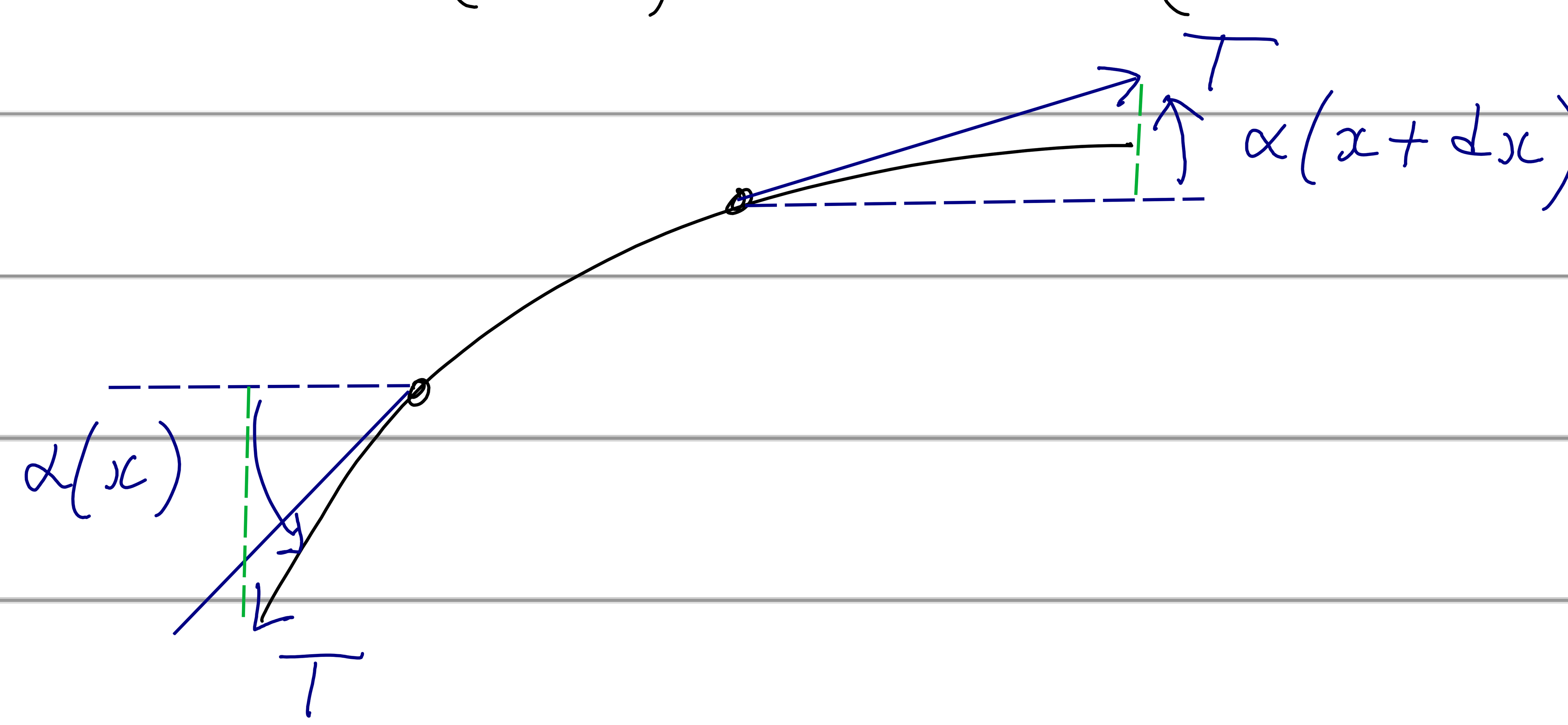
on considère un petit élément de corde entre les points $A = (x, z(x))$
et $B = (x+dx, z(x+dx))$

- La masse par unité de longueur est
$\mu = \frac{dm}{dx} \iff dm = \mu\, dx$: masse de l'élément

- On note $\alpha(x)$ l'angle entre la tangente à la courbe et l'axe horizontal et T l'intensité de la force de tension qui est tangente à la courbe.

- L'élément de longueur subit une tension à gauche et une tension à droite dont les composantes verticales sont (en vert)

$$F_z = -T\sin(\alpha(x)) + T\sin(\alpha(x+dx))$$



L'équation de mouvement de Newton selon l'axe z s'écrit donc :

$$dm\,\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$
$$= T\left(\sin(\alpha(x+dx)) - \sin(\alpha(x))\right)$$

on a supposé $\left|\frac{dz}{dx}\right| \ll 1$, or $\frac{dz}{dx} = \tan\alpha(x)$

donc $|\alpha(x)| \ll 1$,

alors $\sin\alpha(x) \simeq \alpha(x) + O(\alpha^2)$

terme négligeable

$$\sin\left(\alpha(x+dx)\right) - \sin\left(\alpha(x)\right) = \alpha(x+dx) - \alpha(x) + O(\alpha^2)$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = \frac{\alpha(x+dx) - \alpha(x)}{dx} + O(dx) \text{ : dérivée}$$

donc

$$(*) \iff dm\,\frac{d^2z}{dt^2} = T\,dx\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + O(\alpha^2) + O(dx^2)$$

négligeables

$$\iff \mu\,\frac{d^2z}{dt^2} \simeq T\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)$$

or $\frac{dz}{dx} = \tan\alpha(x) = \alpha(x) + O(\alpha^2)$

$$\Rightarrow \frac{d^2z}{dx^2} \simeq \frac{d\alpha}{dx} + O(\alpha)$$

donc (*) $\Longleftrightarrow$ $\mu \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \approx T \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ avec $c^2 = T/\mu$

"équation des ondes".

Solution d'Alembert de l'équation des ondes à 1D sur $\mathbb{R}$

L'équation d'onde pour la fonction

$$(x,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto z(x,t) \in \mathbb{R},$$

est

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{avec } c>0 \text{ fixé.}$$

(1) si $X \in \mathbb{R} \longmapsto R(X), L(X) \in \mathbb{R}$ sont des fonctions arbitraires, et on pose $z(x,t) := R(x-ct) + L(x+ct)$

Remarquer que à droite, ce sont des fonctions composées, i.e : $(x,t) \longmapsto X(x,t) = x - ct$

composée avec $X \longmapsto R(X)$

ainsi $z(x,t) = (R \circ X)(x,t)$

On rappelle la formule générale de dérivée de fonctions composées : $\frac{\partial}{\partial t}(R \circ X) = \left(\frac{dR}{dX}\right) \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)$ etc

On notera $R'(X) = \frac{dR}{dX}$ (car une seule variable)

et si $X(x,t) = x - ct$,

on a $\frac{\partial X}{\partial t} = -c$

alors

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -c\, R'(x-ct) + c\, L'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 R''(x-ct) + c^2 L''(x+ct)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = R'(x-ct) + L'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = R''(x-ct) + L''(x+ct)$$

donc $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$: équation (*) vérifiée.

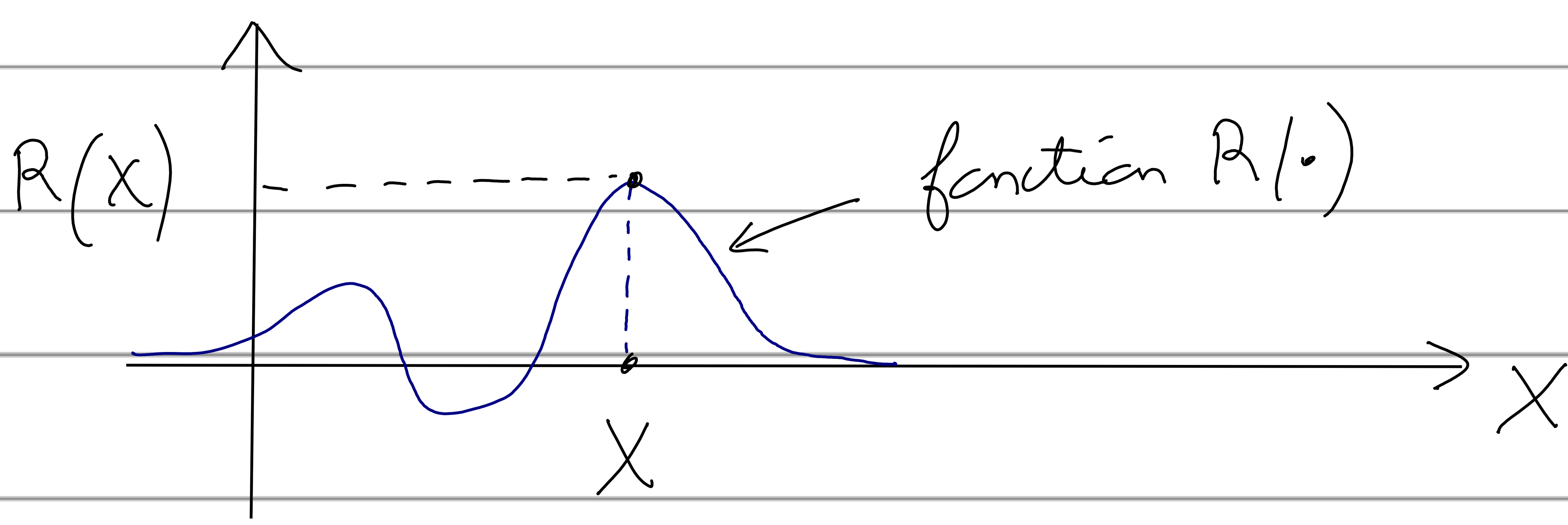
② Dans la solution ci-dessus, il y a deux termes. Le premier est l'onde :

$$(x,t) \longmapsto R(x-ct)$$

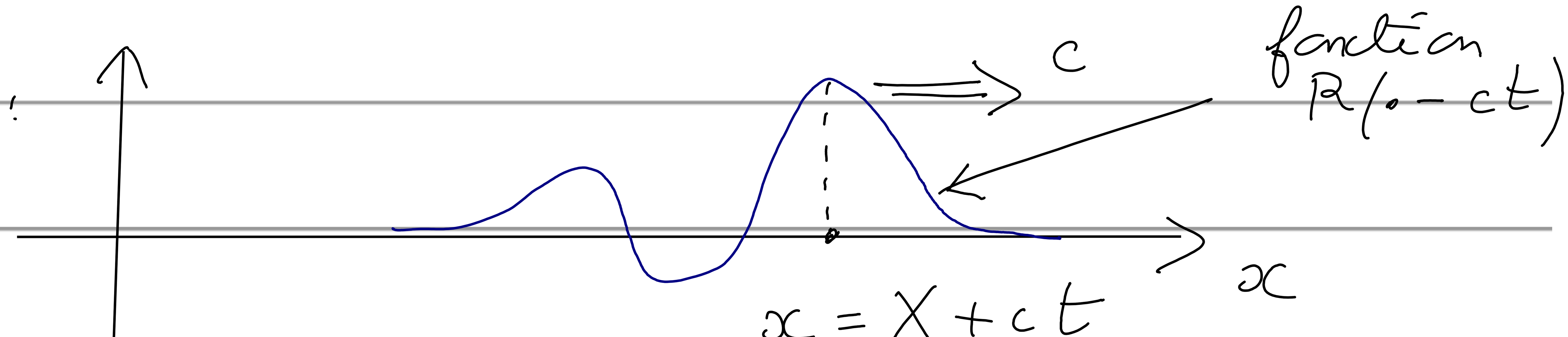
Posons $X = x - ct$ fixé : relation entre x et t

$\iff \quad x = X + ct$.

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = c$: donc $t \mapsto x(t)$ se déplace à la vitesse $c > 0$, i.e vers la droite



à t fixé :



donc l'onde $t \mapsto R(\cdot - ct)$ se déplace vers la droite (Right) à la vitesse $c > 0$.

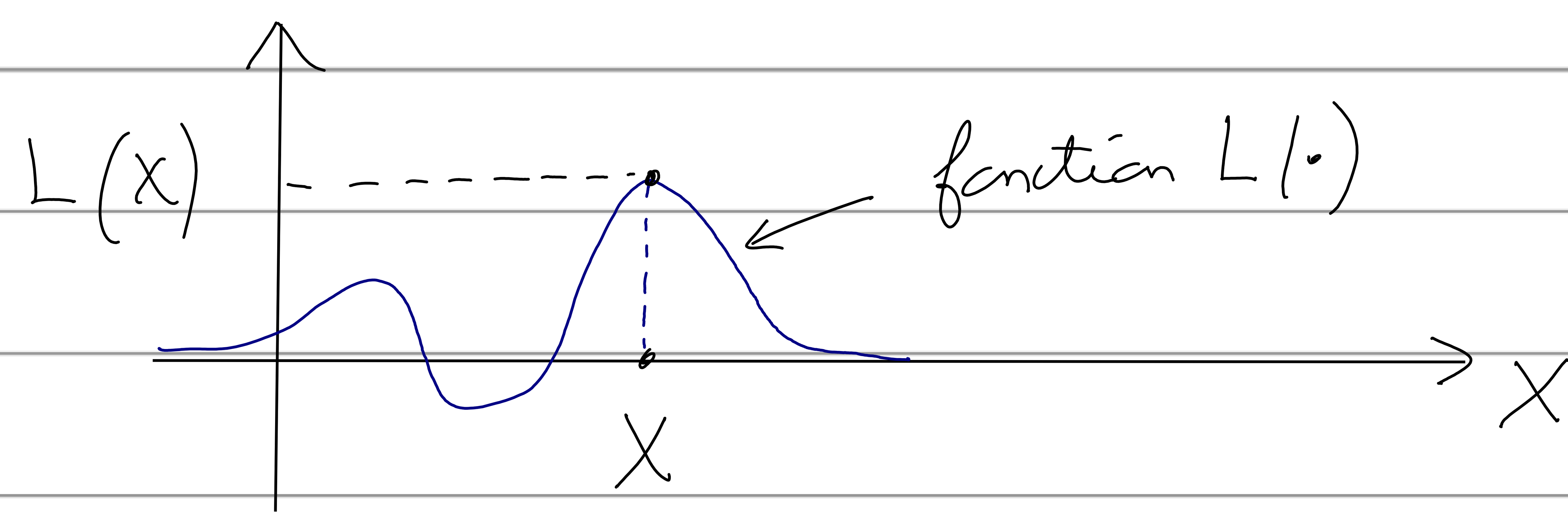
De même pour le terme

$$(x,t) \longmapsto L(x+ct)$$

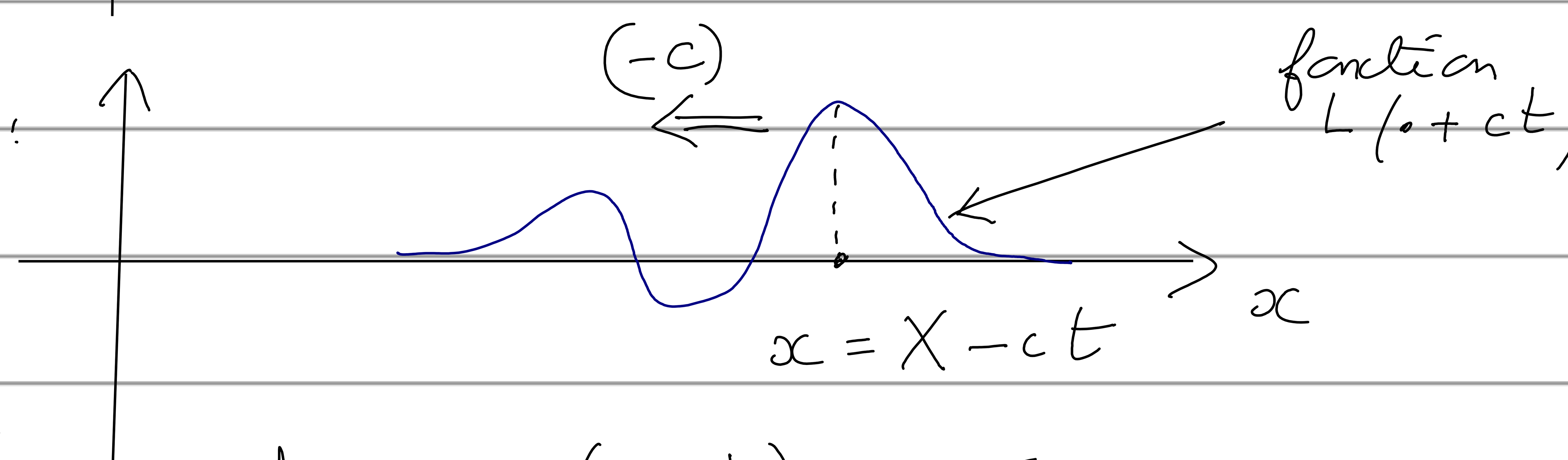
Posons $X = x + ct$ fixé avec $c > 0$,

$\iff \quad x = X - ct$

$\implies \dfrac{dx}{dt} = -c$: se déplace à la vitesse $(-c) < 0$
(vers la gauche)



à t fixé :



donc l'onde $t \mapsto L(\cdot + ct)$ se déplace vers la gauche (left) à la vitesse $(-c) < 0$

On les appelle des <u>ondes progressive</u>.
La solution <u>générale est superposition des ces deux ondes progressives</u>.

(3) On va tout d'abord montrer que une onde $(x,t) \longmapsto z(x,t)$ solution de l'équation $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ $(*)$

est <u>déterminée par les "conditions initiales"</u> qui sont la forme à $t=0$:

$$x \longmapsto z(x,0)$$

et la "vitesse initiale" à $t=0$:

$$x \longmapsto \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x,0)$$

. Pour cela, on va transformer l'équation $(*)$ qui est du deuxième ordre en t, en <u>deux équations du premier ordre en t</u>, portant donc sur deux quantités, qui sont d'une part $z(x,t)$ et d'autre part,

posons $V(x,t) = \dfrac{\partial z}{\partial t}(x,t)$. (vitesse verticale)

et $F(x,t) := \begin{pmatrix} z(x,t) \\ V(x,t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$: 2 composantes

L'équation des ondes se ré-écrit :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$: équation du 2ème ordre en t

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = V \\ \dfrac{\partial}{\partial t} V = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \end{cases}$$: 2 équations couplées, mais 1er ordre en temps

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \Bigg($$