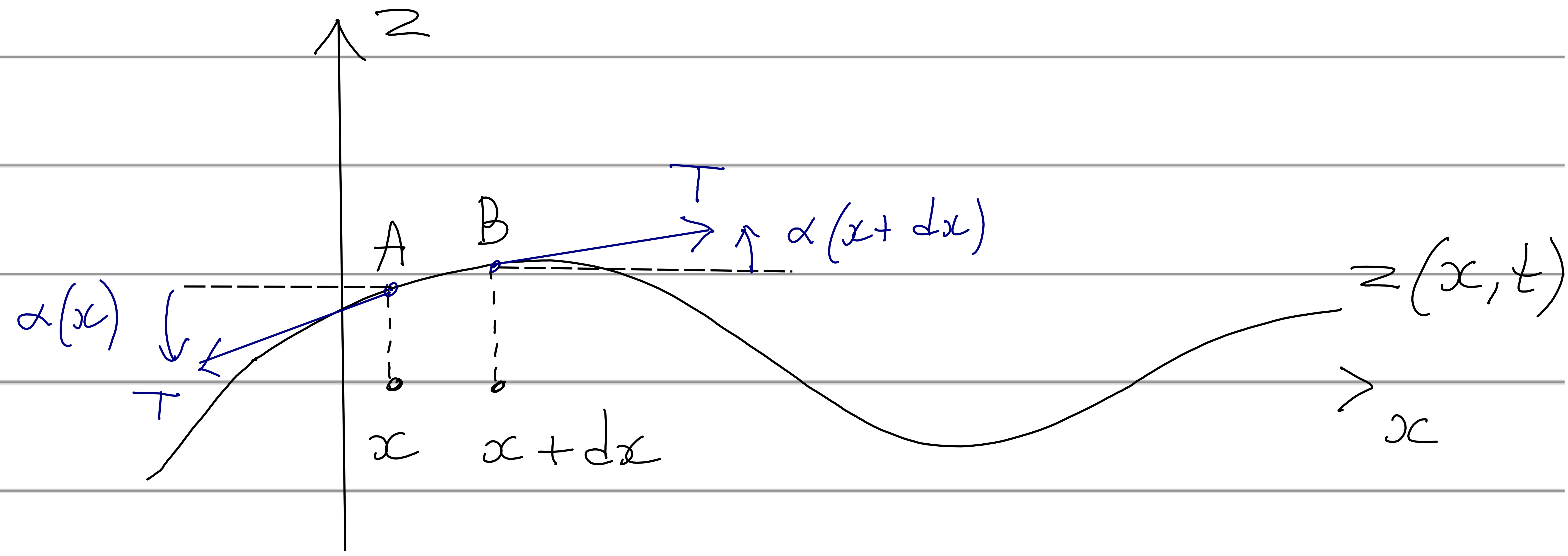
Propagation du Son

Vibration d'une corde

On considère une corde dans un plan.
Sa position à la date t est donnée par le graphe de la fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto z(x,t) \in \mathbb{R}$



on considère un petit élément de corde entre les points $A = (x, z(x))$
et $B = (x+dx, z(x+dx))$

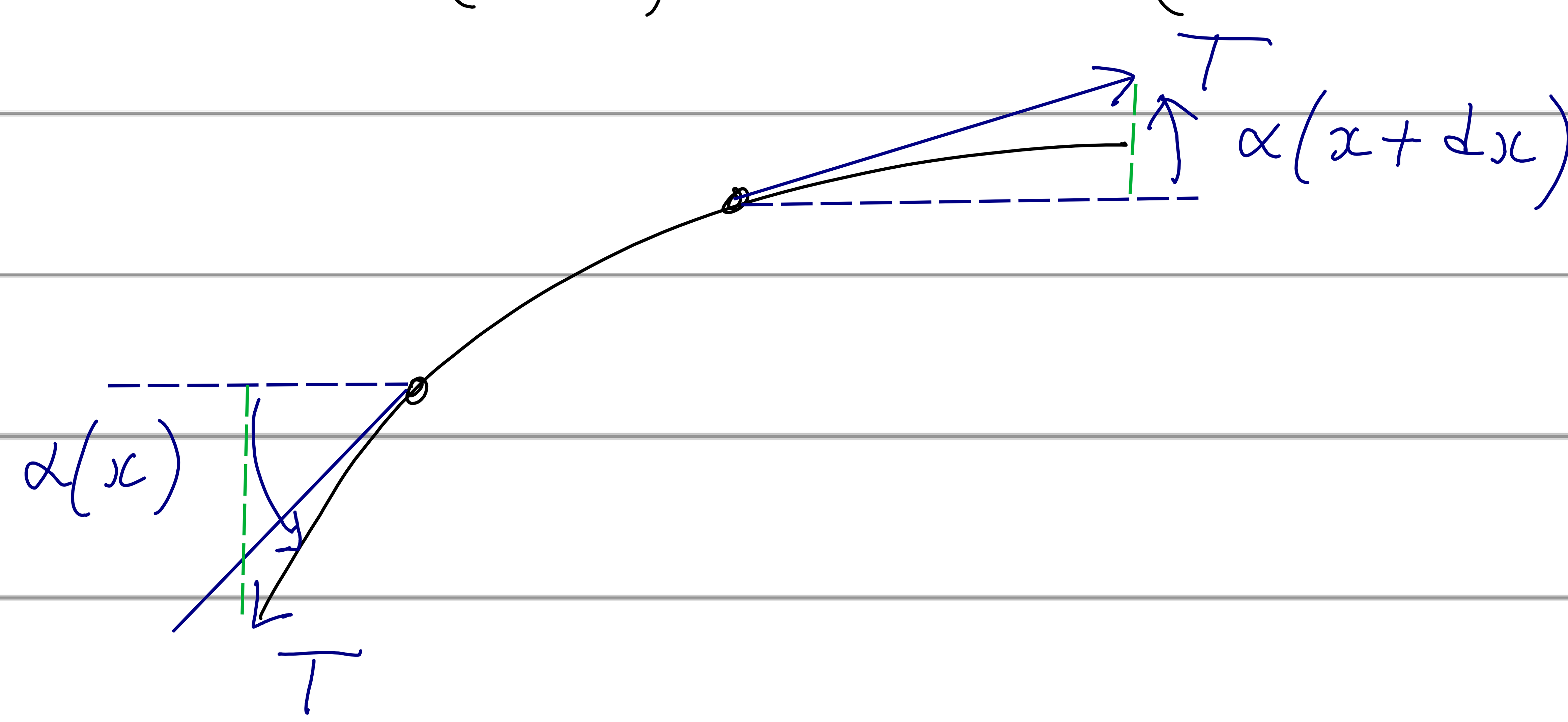
- La masse par unité de longueur est

$$\mu = \frac{dm}{dx} \iff dm = \mu \, dx \text{ : masse de l'élément}$$

- On note $\alpha(x)$ l'angle entre la tangente à la courbe et l'axe horizontal et T l'intensité de la force de tension qui est tangente à la courbe.

- L'élément de longueur subit une tension à gauche et une tension à droite dont les composantes verticales sont (en vert)

$$F_z = -T\sin(\alpha(x)) + T\sin(\alpha(x+dx))$$



L'équation de mouvement de Newton selon l'axe z s'écrit donc :

$$dm\,\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$
$$= T\left(\sin(\alpha(x+dx)) - \sin(\alpha(x))\right)$$

on a supposé $\left|\frac{dz}{dx}\right| \ll 1$, or $\frac{dz}{dx} = \tan \alpha(x)$

donc $|\alpha(x)| \ll 1$,

alors $\sin \alpha(x) \simeq \alpha(x) + O(\alpha^2)$

terme négligeable

$$\sin\Big(\alpha(x+dx)\Big) - \sin\Big(\alpha(x)\Big) = \alpha(x+dx) - \alpha(x) + O(\alpha^2)$$

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = \frac{\alpha(x+dx) - \alpha(x)}{dx} + O(dx) \text{ : dérivée}$$

donc

$$(*) \Longleftrightarrow dm \frac{d^2 z}{dt^2} = T\, dx \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + O(\alpha^2) + O(dx^2)$$

négligeables

$$\Longleftrightarrow \mu \frac{d^2 z}{dt^2} \simeq T \left(\frac{d\alpha}{dx}\right)$$

or $\frac{dz}{dx} = \tan \alpha(x) = \alpha(x) + O(\alpha^2)$

$$\Longrightarrow \frac{d^2 z}{dx^2} \simeq \frac{d\alpha}{dx} + O(\alpha)$$

donc $(*) \iff \mu \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \approx T \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$$\iff \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{avec } c^2 = T/\mu$$

"equation des ondes".

Solution d'Alembert de l'équation des ondes à 1D sur $\mathbb{R}$

L'équation d'onde pour la fonction

$$(x,t) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto z(x,t) \in \mathbb{R},$$

est

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{avec } c>0 \text{ fixé.}$$

(1) si $X \in \mathbb{R} \longmapsto R(X), L(X) \in \mathbb{R}$ sont des fonctions arbitraires, et

on pose $z(x,t) := R(x-ct) + L(x+ct)$

Remarquer que à droite, ce sont des fonctions composées, i.e : $(x,t) \longmapsto X(x,t) = x - ct$

composée avec $X \longmapsto R(X)$

ainsi $z(x,t) = (R \circ X)(x,t)$

On rappelle la formule générale de dérivée de fonctions composées : $\frac{\partial}{\partial t}(R \circ X) = \left(\frac{dR}{dX}\right) \cdot \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)$ etc

On notera $R'(X) = \frac{dR}{dX}$ (car une seule variable)

et si $X(x,t) = x - ct$,

on a $\frac{\partial X}{\partial t} = -c$

alors

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -c\, R'(x-ct) + c\, L'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 R''(x-ct) + c^2 L''(x+ct)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = R'(x-ct) + L'(x+ct)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = R''(x-ct) + L''(x+ct)$$

donc $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$: équation (*) vérifiée.

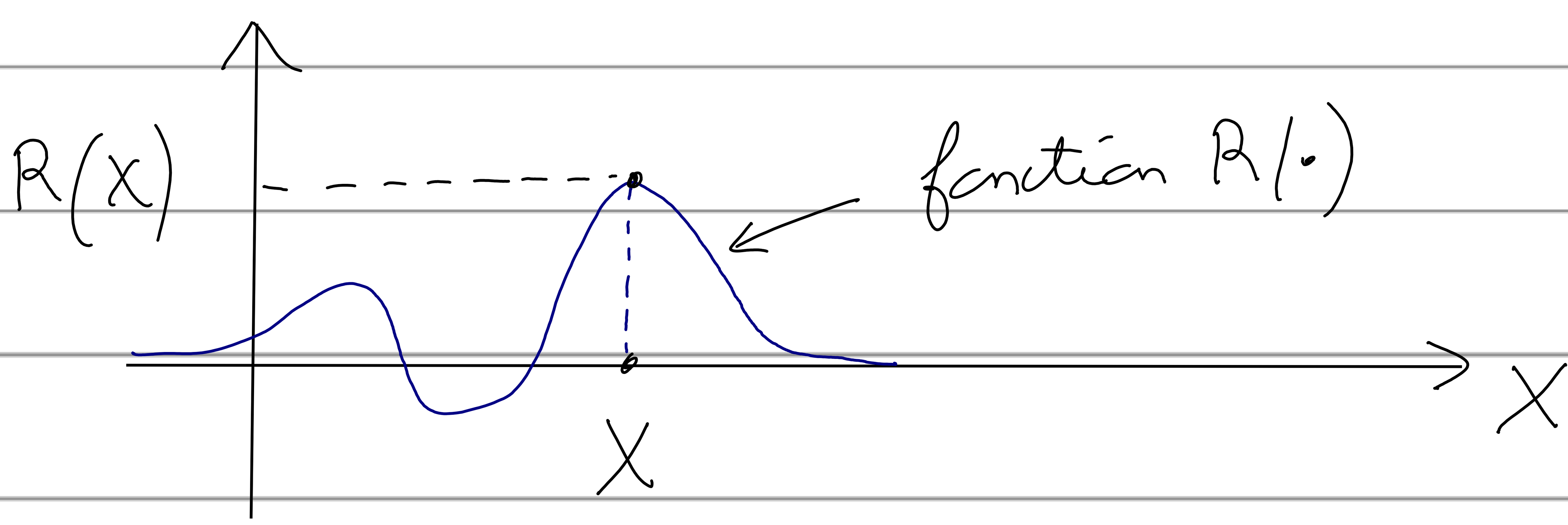
(2) Dans la solution ci-dessus, il y a deux termes. Le premier est l'onde :

$$(x,t) \longmapsto R(x-ct)$$

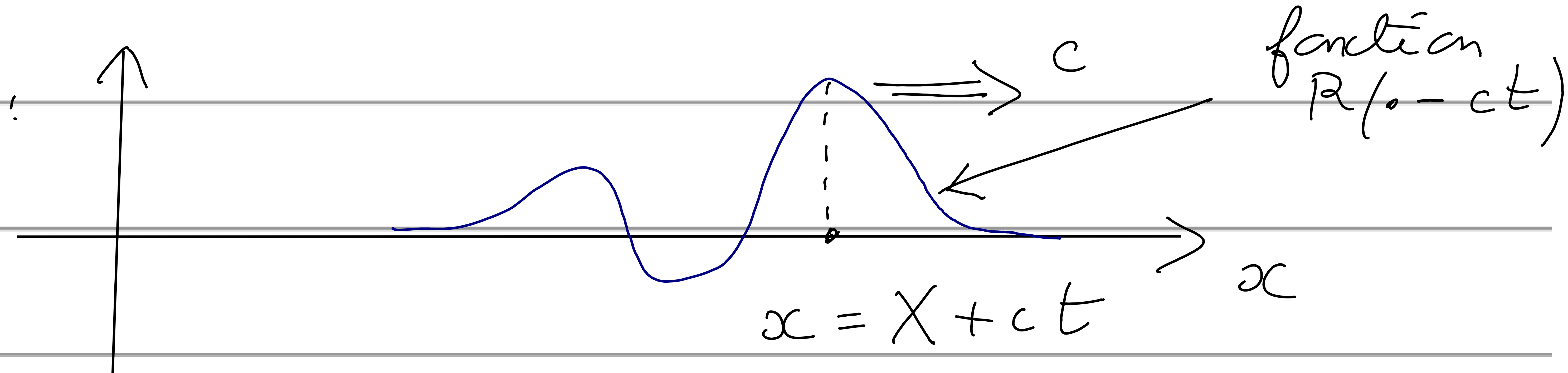
Posons $X = x - ct$ fixé : relation entre x et t

$$\iff \quad x = X + ct \, .$$

$$\implies \frac{dx}{dt} = c$$: donc $t \mapsto x(t)$ se déplace à la vitesse $c>0$, ie vers la droite



à t fixé :



donc l'onde $t \mapsto R(\cdot - ct)$ se déplace vers la droite (Right) à la vitesse $c>0$.

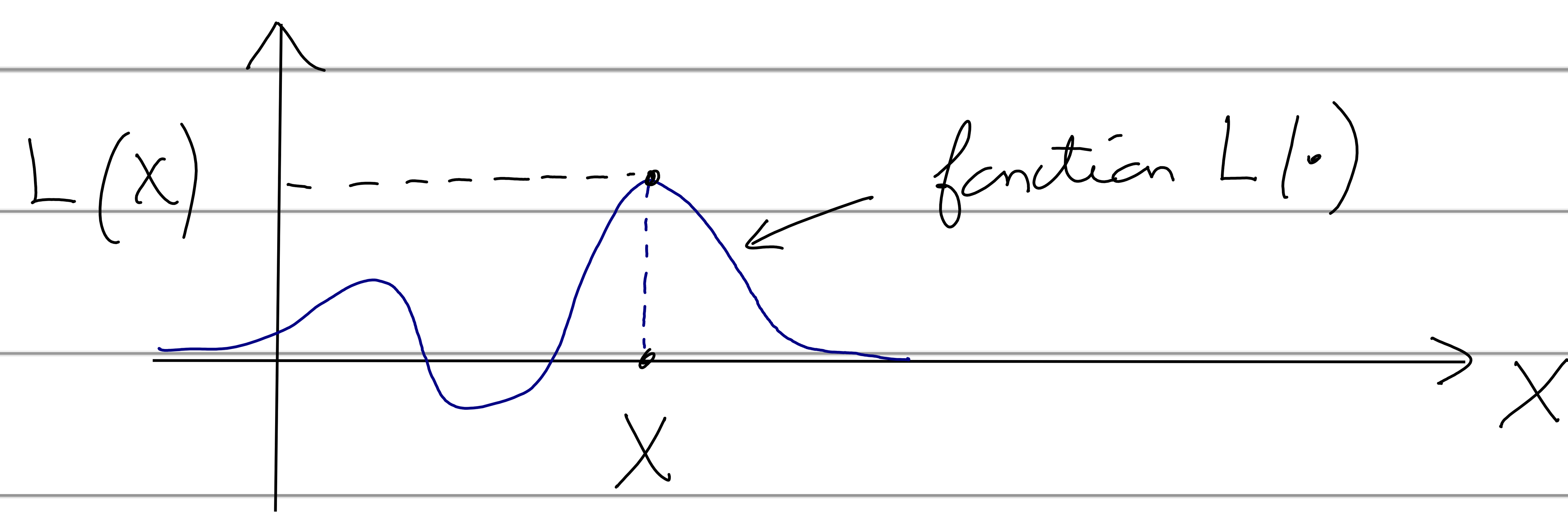
De même pour le terme

$$(x,t) \longmapsto L(x+ct)$$

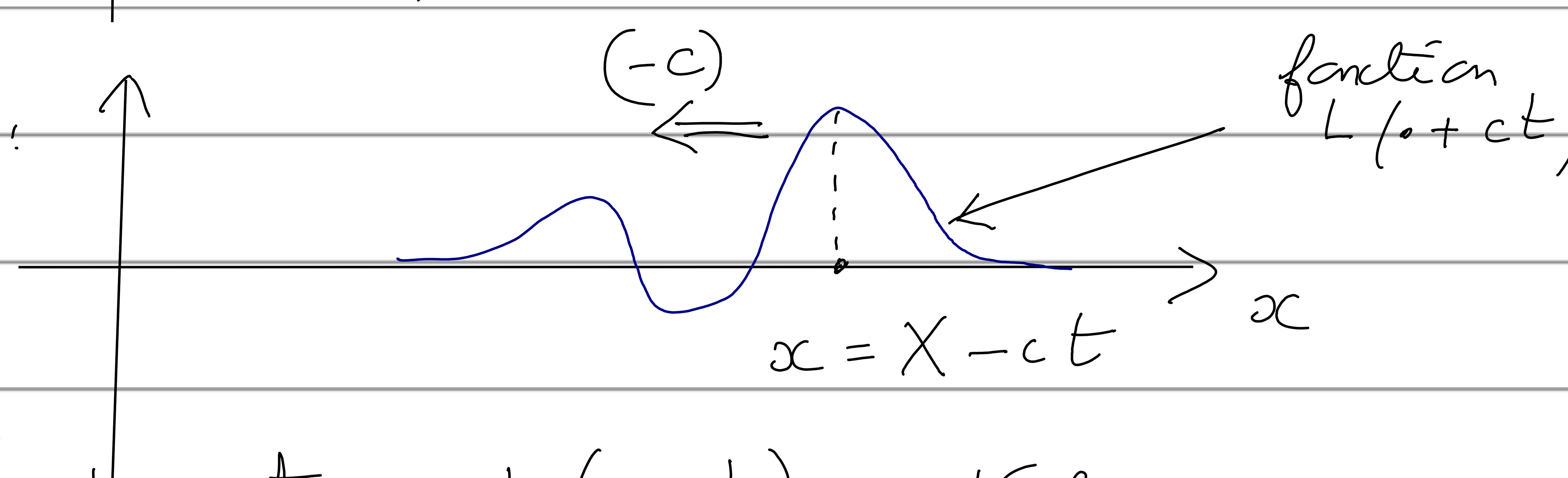
Posons $X = x + ct$ fixé avec $c > 0$,

$$\iff x = X - ct$$

$$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = -c$$: se déplace à la vitesse $(-c) < 0$ (vers la gauche)



à t fixé :



donc l'onde $t \longmapsto L(\cdot + ct)$ se déplace vers la gauche (left) à la vitesse $(-c) < 0$

On les appelle des <u>ondes progressive</u>.

La solution <u>générale est superposition des ces deux ondes progressives</u>.

(3) On va tout d'abord montrer que une onde $(x,t) \longmapsto z(x,t)$ solution de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ $(*)$

est déterminée par les "conditions initiales" qui sont la forme à $t=0$:

$$x \longmapsto z(x,0)$$

et la "vitesse initiale" à $t=0$:

$$x \longmapsto \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x,0)$$

. Pour cela, on va transformer l'équation $(*)$ qui est du deuxième ordre en t, en deux équations du premier ordre en t, portant donc sur deux quantités, qui sont d'une part $z(x,t)$ et d'autre part, posons $V(x,t) = \frac{\partial z}{\partial t}(x,t)$. (vitesse verticale)

et $F(x,t) := \begin{pmatrix} z(x,t) \\ V(x,t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$: 2 composantes

- L'équation des ondes se ré-écrit :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$: équation du 2ème ordre en t

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = V \\ \dfrac{\partial}{\partial t} V = c^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \end{cases}$$: 2 équations couplées, mais 1er ordre en temps

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial z^2} & 0 \end{pmatrix} F$$: équation différentielle ordinaire vectorielle du 1er ordre

- L'intérêt de cette formulation est de déduire que l'état initial à $t=0$:

$$F(x,0) = \begin{pmatrix} z(x,0) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(x,0) \end{pmatrix}$$ détermine

la solution car si $F(x,0) = 0, \forall x$ alors $F(x,t) = 0, \forall x, \forall t$.

et inversement tout état initial a une solution.

. $2^{\text{ème}}$ étape : on va montrer que toute solution $(x,t) \longmapsto z(x,t)$ peut s'écrire :

$$(*) \qquad z(x,t) = R(x-ct) + L(x+ct).$$

$$(*) \Longrightarrow z(x,0) = R(x) + L(x) \qquad (1)$$

et $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x,t) = -c\,R'(x-ct) + c\,L'(x+ct)$

donc $$\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x,0) = -c\,R'(x) + c\,L'(x)$$
$$= c\,\big(L(x) - R(x)\big)'$$

$$\Longleftrightarrow L(x) - R(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x',0)\,dx' \qquad (2)$$

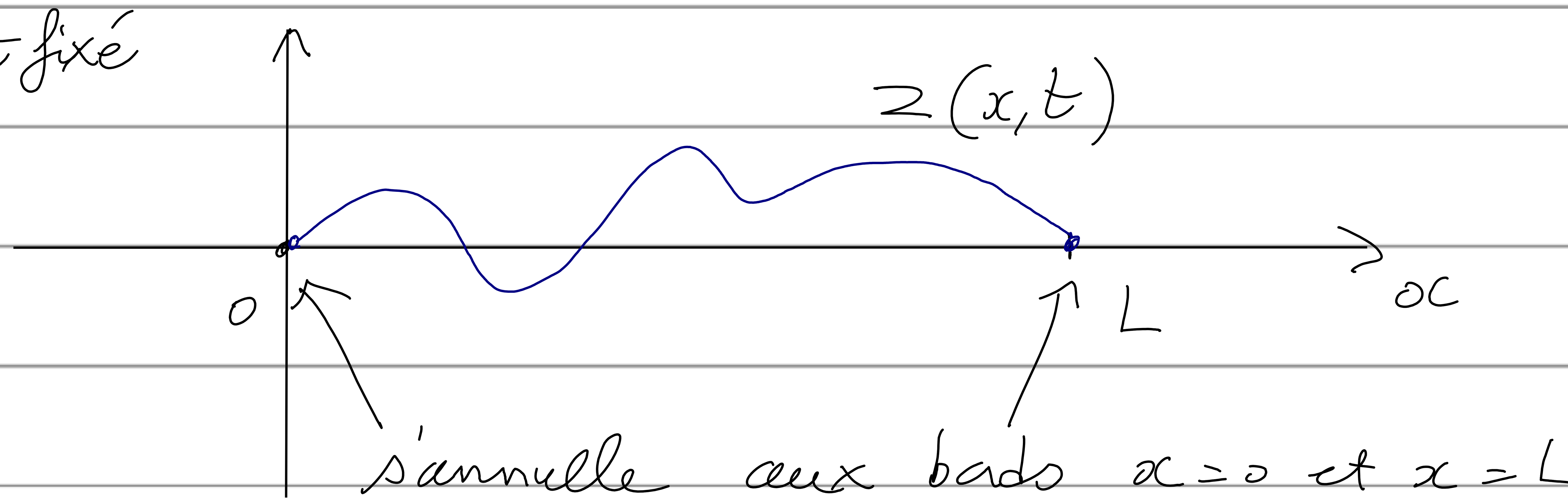
Par somme et différence de (1) et (2), on déduit

$$L(x) = \frac{1}{2}\left(z(x,0) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x',0)\,dx'\right)$$

$$R(x) = \frac{1}{2}\left(z(x,0) - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)(x',0)\,dx'\right)$$

Solution d'Alembert de l'équation des ondes 1D sur un segment $[0, L]$

à t fixé



(1) Toute solution de l'équation d'onde est de la forme suivante (d'après un exercice précédent sur $\mathbb{R}$)

$$z(x,t) = R(x-ct) + L(x+ct)$$

et les conditions au bord $x=0$ et $x=L$ imposent :

en $x=0$

$$0 = z(0,t) = R(-ct) + L(ct), \quad \forall t,$$

$$\iff L(ct) = -R(-ct), \quad \forall t$$

$$\iff L(X) = -R(-X), \quad \forall X$$

ce qui signifie que la fonction L est déterminée par la fonction R est donc

$$\boxed{z(x,t) = R(x-ct) - R(-x-ct)}$$

en $x=L$

et $0 = z(L,t) = R(L-ct) - R(-L-ct), \quad \forall t$

$\iff$ en posant $X = -L-ct \iff X+2L = L-ct$

cela donne $\boxed{R(X+2L) = R(X), \quad \forall X}$

2 on a montré que

$$z(x,t) = R(x - ct) - R(-x - ct),$$

avec une fonction $X \longmapsto R(X)$ vérifiant

$$R(X + 2L) = R(X), \ \forall X \ . \ \text{" : } 2L \text{ périod."}$$

Cela implique :

$$\forall x, \forall t, \quad z\left(x, t + \frac{2L}{c}\right) = R\left(x - ct - c\left(\frac{2L}{c}\right)\right) - R\left(-x - ct - c\left(\frac{2L}{c}\right)\right)$$

$$= R(x - ct - 2L) - R(-x - ct - 2L)$$

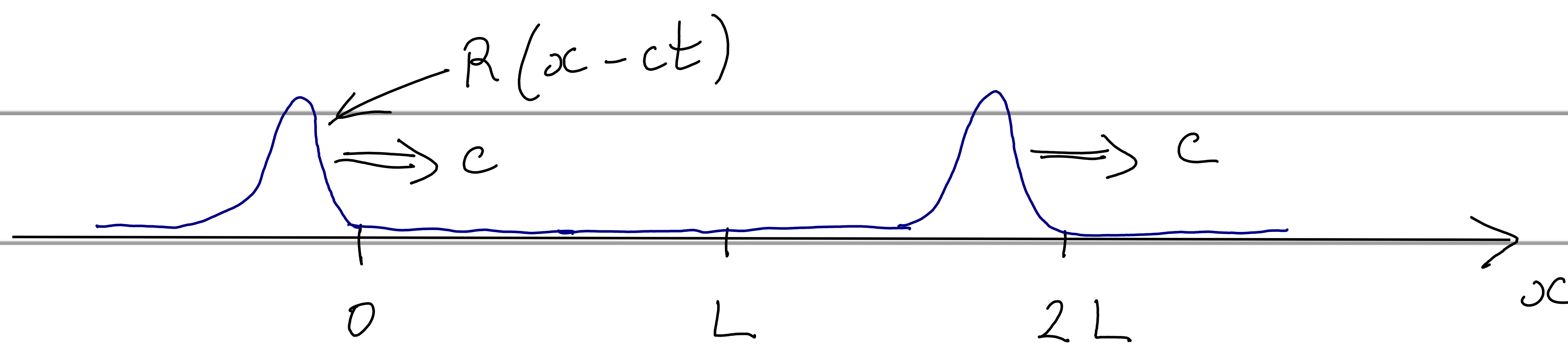
$$= R(x - ct) - R(-x - ct) \quad \text{: car } R \text{ est } 2L \text{ périodique}$$

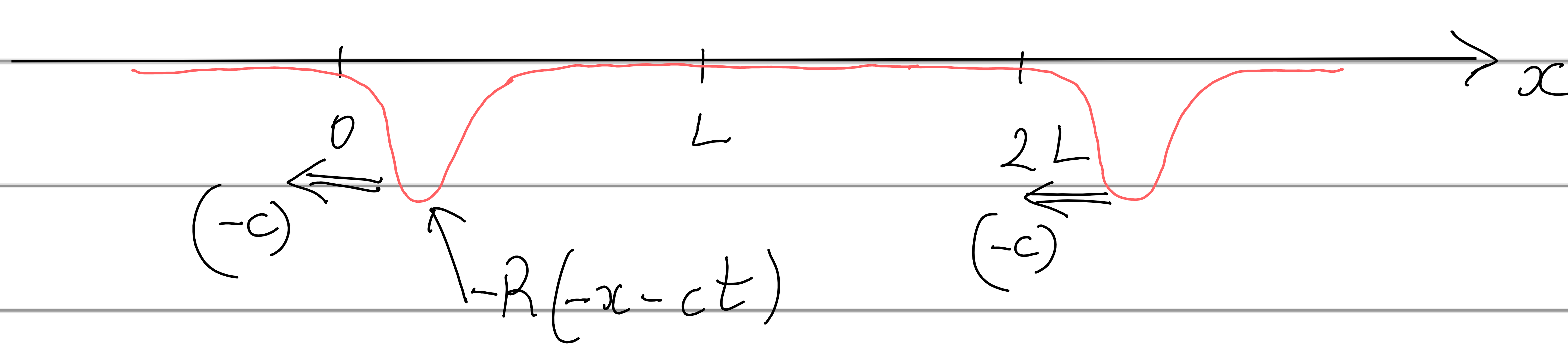
$$= z(x,t)$$

ce qui signifie que le signal $t \mapsto z(x,t)$ est périodique de période $T = \frac{2L}{c}$ en tout point x.

<u>interprétation</u> : à t fixé :

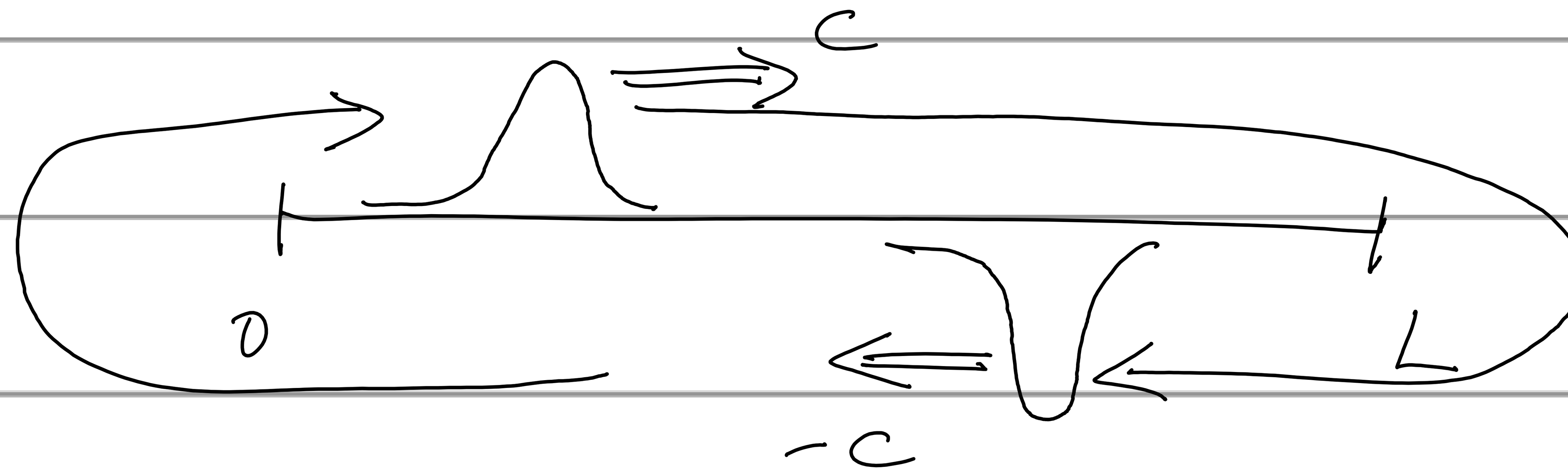
voici un schéma des fonctions $x \mapsto R(x-ct)$
et $x \mapsto -R(-x-ct)$





on observe que la superposition de ces deux fonctions donne une fonction $z(x,t)$ qui s'annulle en $x=0$ et $x=L$ pour tout temps t.

De plus dans le segment $x \in [0,L]$, l'onde $z(x,t)$ semble rebondir sur les bords :



Longueur aller + retour $= 2L$ donc période T tq $c = \frac{2L}{T} \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{2L}{c}}$

Solution de Fourier de l'équation des ondes à 1D. sur $\mathbb{R}$

On considère une fonction

$$x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \longrightarrow z(x,t) \in \mathbb{R}$$

solution de l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

① Soit $k \in \mathbb{R}$ (vecteur d'onde)

$\omega \in \mathbb{R}$ (fréquence)

et

$$z_{k,\omega}(x,t) := e^{i(kx - \omega t)}$$

"ondes planes"

ou "Mode de Fourier"

on calcule $\frac{\partial z_{k\omega}}{\partial t} = -i\omega\, e^{i(kx-\omega t)}$

$$\frac{\partial^2 z_{k\omega}}{\partial t^2} = (-i\omega)^2 e^{i(kx-\omega t)} = -\omega^2 z_{k\omega}$$

et $\frac{\partial^2 z_{k\omega}}{\partial x^2} = -k^2 z_{k\omega}$

donc

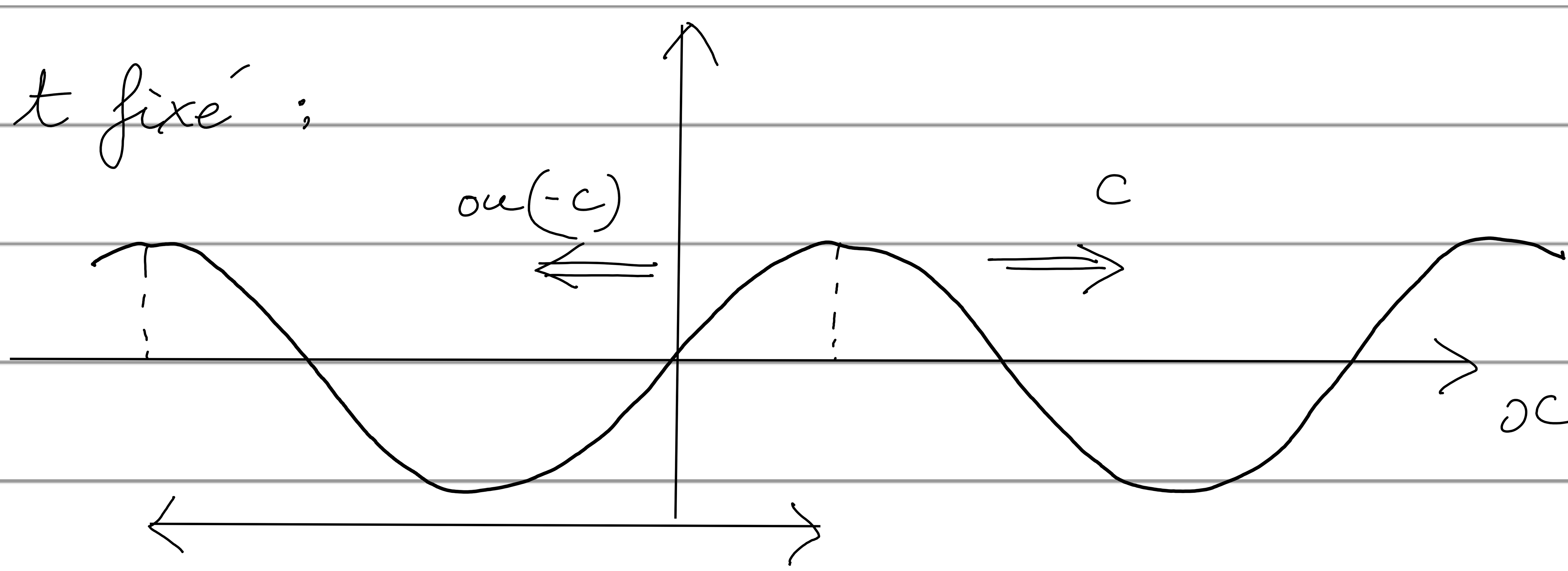
$$\frac{\partial^2 z_{k\omega}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z_{k\omega}}{\partial x} \underset{\text{ci dessus}}{=} \left(-\omega^2 + c^2 k^2\right) z_{k\omega} \underset{\substack{\text{condition}\\ \text{que l'on souhaite}}}{=} 0$$

$$\iff \omega^2 = c^2 k^2$$

$$\iff \boxed{|\omega| = c\,|k| \qquad \text{"relation de dispersion"}}$$

② $\mathrm{Re}\left(z_{k,\omega}(x,t)\right) = \cos(kx - \omega t)$

à t fixé :

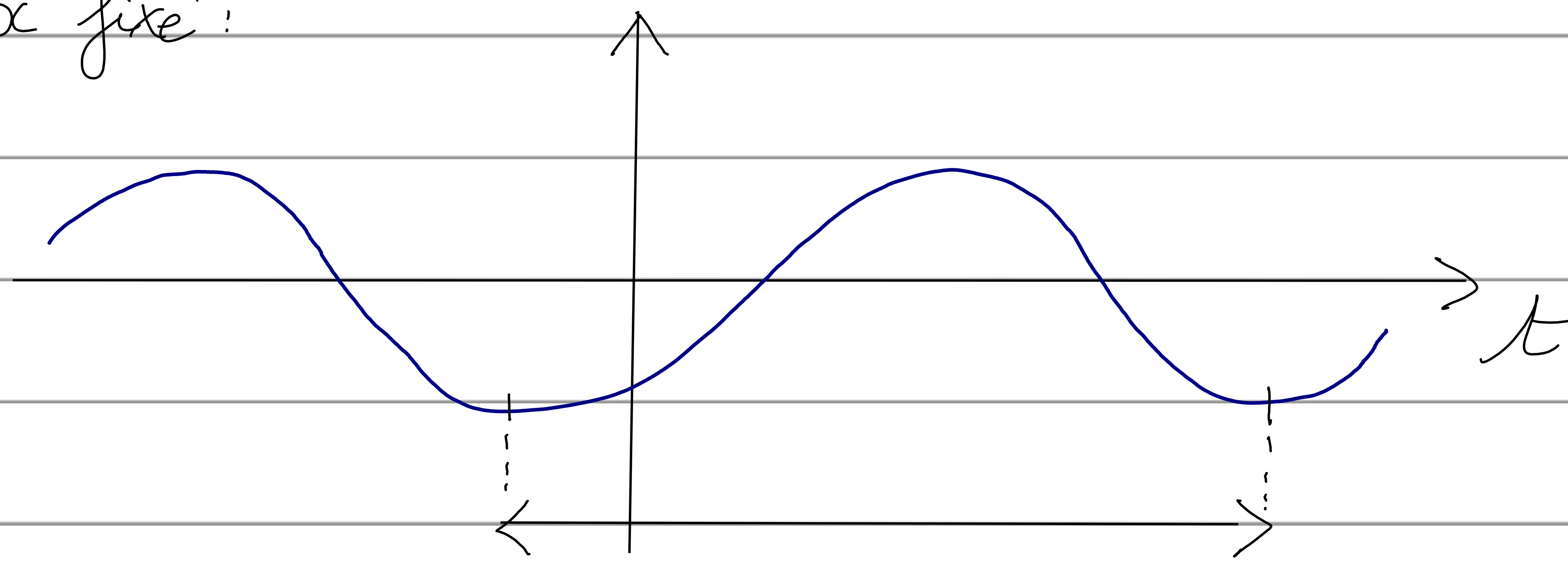


$\lambda = \frac{2\pi}{k}$: longueur d'onde

On a $\frac{|\omega|}{|k|} = c$ si $\frac{\omega}{k} = +c$ alors l'onde se déplace vers la droite à la vitesse $+c$

si $\frac{\omega}{k} = -c$ alors vers la gauche à la vitesse $-c$

à x fixé :



$T = \frac{2\pi}{\omega}$: période

Solution de Fourier de l'équation des ondes 1D sur un segment $x \in [0, L]$

On suppose que la fonction

$$x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \longrightarrow z(x,t) \in \mathbb{R}$$

est solution de l'équation des ondes

$$(*) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

avec les conditions en $x=0$ et $x=L$:

$$z(0,t)=0, \quad z(L,t)=0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(1) On va vérifier que

$$z(x,t) = \cos(\omega_n t + \alpha_n) \sin(k_n x)$$

est solution, si $k_n = n\frac{\pi}{L}$ et $\omega_n = c\, k_n$.

En effet

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega_n^2 z, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -k_n^2 z$$

donc $(*)$ est vérifiée.

et $z(0,t)=0$ et $z(L,t)=0$ car $\sin(k_n L) = \sin(n\pi) = 0$

(2) A l'exercice précédent, on a vu qu'un mode de Fourier $z_{k,\omega}(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ est solution ssi $\omega = \pm ck$: deux possibilités.

On va chercher une superposition :

$$z(x,t) = z_+ \, e^{i(|k|x+\omega t)} + z_- \, e^{i(-|k|x+\omega t)}$$

avec $z_+, z_- \in \mathbb{C}$: amplitudes

de sorte que les conditions limites sont vérifiées.

$$0 = z(0,t) = z_+ \, e^{i\omega t} + z_- \, e^{i\omega t}$$
$$= (z_+ + z_-)\, e^{i\omega t} \quad , \forall t$$

$$\Longleftrightarrow \quad z_- = -z_+$$

et
$$0 = z(L,t) = z_+ \, e^{i(|k|L+\omega t)} + z_- \, e^{i(-|k|L+\omega t)}$$
$$= z_+ \left(e^{i|k|L} - e^{-i|k|L}\right) e^{i\omega t} \quad , \forall t$$
$$= z_+ \, 2i \sin(|k|L)\, e^{i\omega t}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sin(|k|L) = 0$$

$\Longleftrightarrow \quad |k|L = \pi n, \quad$ avec $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{|k| = k_n = \frac{\pi n}{L} \quad \text{avec } n \in \{1, 2, 3, \dots\}}$$

alors $|\omega| = \omega_n = c k_n = \frac{\pi c}{L} n$

$= n \omega_1$, avec $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$

"fréquence fondamentale"

Cela donne pour $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$: harmonique

$$z(x,t) = z_+ e^{i(k_n x + \omega_n t)} - z_+ e^{i(-k_n x + \omega_n t)}$$

$$= z_+ 2i \sin(k_n x) e^{i\omega_n t}$$

avec $z_+ \in \mathbb{C}$ arbitraire,

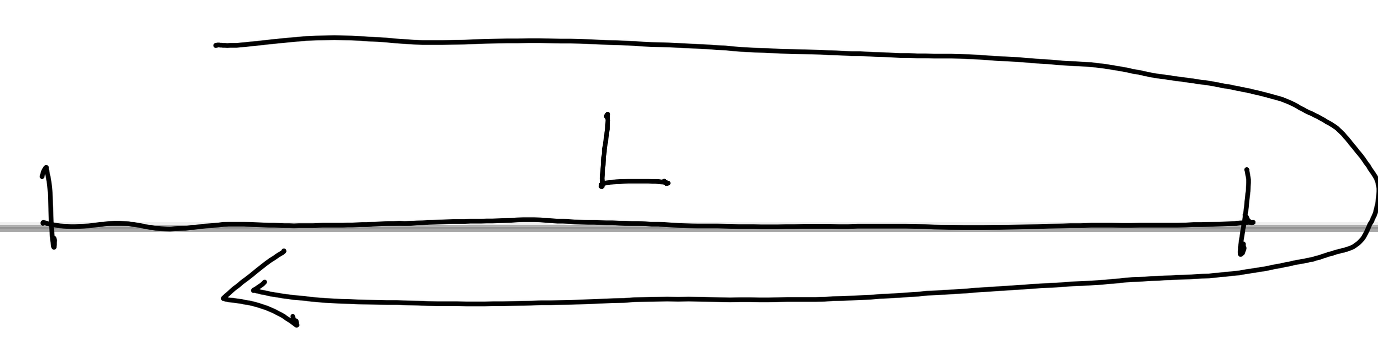
et l'onde physique est réelle :

$$\mathrm{Re}(z(\omega, t)) = V_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \sin(k_n x)$$

avec $V_n e^{i\alpha_n} = 2 i z_+ \in \mathbb{C}$

Applications numériques

1. $L = 0{,}56\ \text{m}$, $f = 110\ \text{Hz} = 110\ \text{s}^{-1}$



longueur aller-retour du signal périodique

or $c = \dfrac{2L}{T}$

$= f\,2L = 110 \times 2 \times 0{,}56\ \text{m/s}$

$= 123{,}2\ \text{m/s}$

$f_1 = 110\ \text{Hz}$,

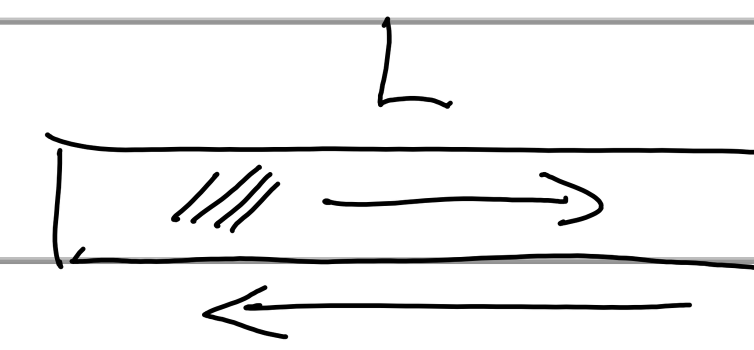
$f_n = n\, f_1$ donc $f_2 = 220\ \text{Hz}$

$f_3 = 330\ \text{Hz}$

$f_4 = 440\ \text{Hz}$, $f_5 = 550\ \text{Hz}$

(2) $c = \dfrac{2L}{T}$ ← longueur aller-retour du signal périodique

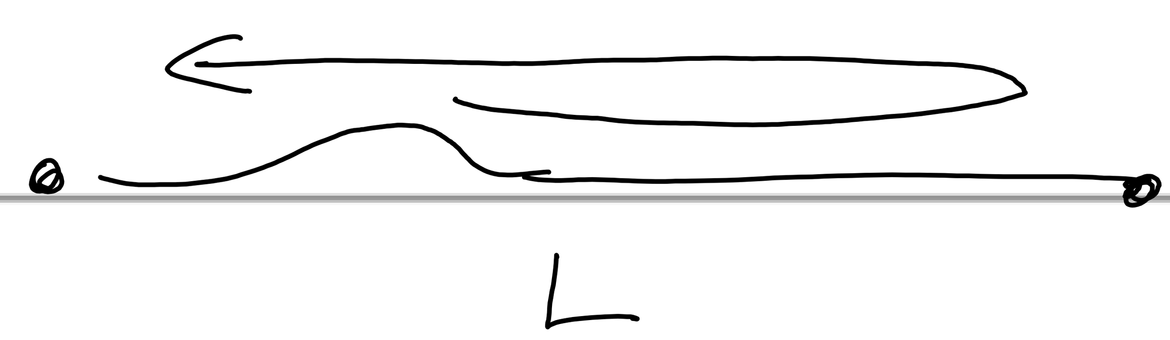
T ← période



$= f\,2L$ car $f = \dfrac{1}{T}$

donc $L = \dfrac{c}{2f} = \dfrac{343 \text{ m/s}}{2 \times 343 \text{ s}^{-1}} = 0{,}5 \text{ m}$

(3)



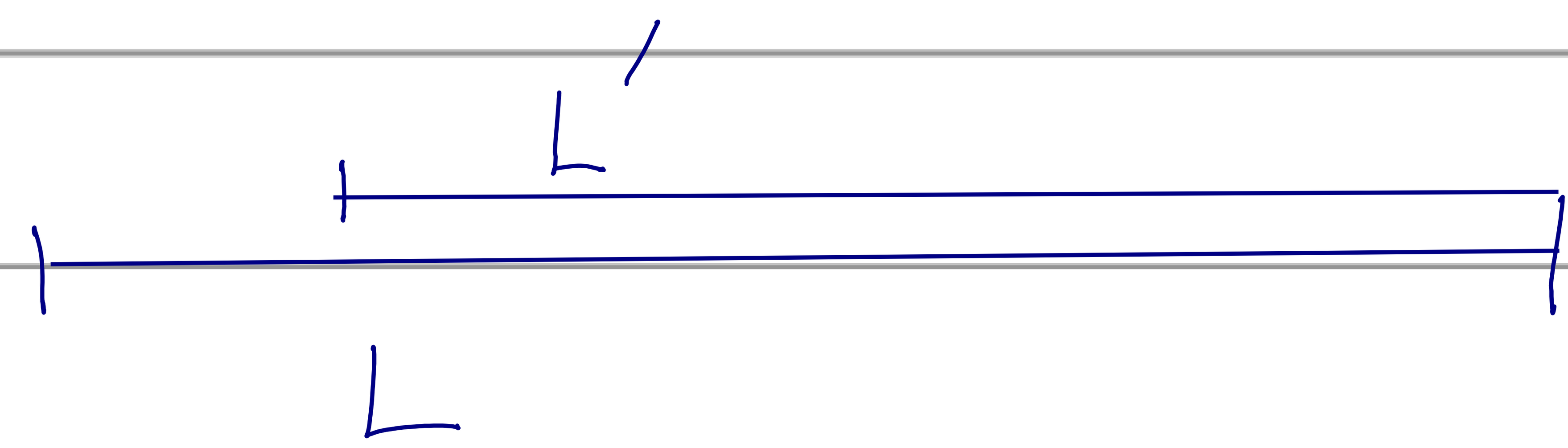
$v = \dfrac{2L}{T}$ ← longueur aller-retour du signal périodique

T ← période

$= f\,2L$ car $f = \dfrac{1}{T}$

$= 150 \text{ s}^{-1} \times 2 \times 0{,}5 \text{ m} = 150 \text{ m/s}$

(4)



on souhaite $f' = \frac{5}{4} f \iff \frac{f}{f'} = \frac{4}{5}$

or $c = \frac{2L}{T} = f\,2L = f'\,2L'$

donc $L' = \frac{f}{f'} L = \frac{4}{5} L = \frac{4}{5} \times 0,5 = 0,4\ m$

(5) $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f_{A_5}$

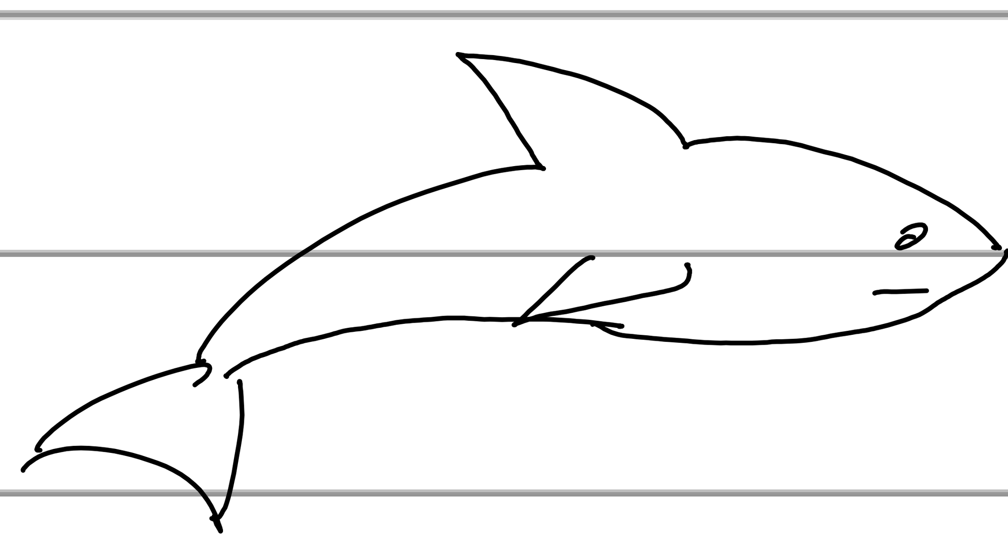
$\iff \lambda_{A_5} = \frac{c}{f} = \frac{343\ m/s}{440\ s^{-1}} = 0,80\ m$

Pour les autres la :

- $f_{A_6} = 2 f_{A_5} = 880\ Hz$, $\lambda_{A_6} = \frac{343}{880} = \frac{\lambda_{A_5}}{2} = 0,4\ m$

- $f_{A_7} = 4 f_{A_5}$, $\lambda_{A_7} = \frac{\lambda_{A_5}}{4} = 0,20\ m$

6



$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{1500\ m/s}{150 \cdot 10^{3}\ s^{-1}} = 10^{-2}\ m = 1\ cm$$

. Pour les Marsouins $f \geq 10^{5}$ Hz

$$\lambda = \frac{c}{f} \leq \frac{1500\ m/s}{10^{5}\ s^{-1}} = 0,015\ m = 1,5\ cm$$

Pour les Orques, $f \leq 10^{5}$ Hz,

$$\lambda = \frac{c}{f} \geq 1,5\ cm$$

Equation des ondes sur le rectangle $[0, L_1] \times [0, L_2]$

Domaine rectangulaire :

$x = (x_1, x_2) \in \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$

avec $L_1, L_2 > 0$

Equation des ondes pour $(x, t) \mapsto v(x, t) \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \Delta v = 0$$

avec $\Delta v = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$

(1) Montrons que pour tout entiers

$n_1 \geqslant 1, \quad n_2 \geqslant 2,$

l'expression suivante est solution :

arbitraire

$$v(x,t) = \cos(\omega_n t + \varphi) \sin(k_{n_1} x_1) \sin(k_{n_2} x_2)$$

avec $k_{n_1} = n_1 \dfrac{\pi}{L_1}$, $k_{n_2} = n_2 \dfrac{\pi}{L_2}$

$$\omega_n = c|k_n|, \quad |k_n|^2 = k_{n_1}^2 + k_{n_2}^2 .$$

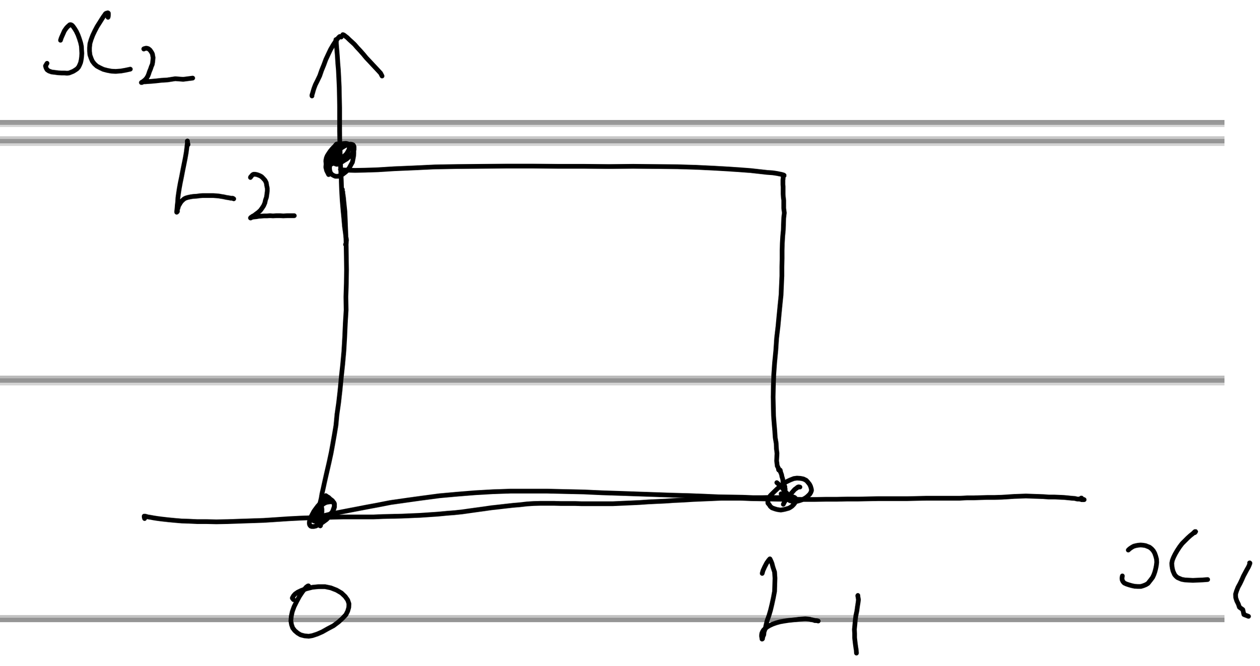
En effet $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\omega_n^2 v$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} = -k_{n_j}^2 v \text{ donc } \Delta v = -|k_n|^2 v$$

donc $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} - c^2 \Delta v = (\underbrace{-\omega_n^2 + c^2 |k_n|^2}_{0}) v = 0$

c'est à dire que l'équation d'onde est vérifiée.

De plus sur le bord de Ω :



- si $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$

  alors $v = 0$

- si $x_1 = L_1$ alors $\sin\left(k_{n_1} x_1\right) = \sin\left(n_1 \frac{\pi}{L_1} L_1\right) = 0$

  donc $v = 0$,

  de même si $x_2 = L_2$ alors $\sin\left(k_{n_2} x_2\right) = 0$, $v = 0$.

Donc les conditions aux bords sont vérifiées.

De l'équation de Schrödinger à l'équation de Newton

① Considérons l'équation de Schrödinger

$$(*) \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x)\psi$$

on considère $k \in \mathbb{R}^3$ (vecteur d'onde)
et $\omega \in \mathbb{R}$ (fréquence) fixées,
et l'onde plane (ou mode de Fourier)

$$\psi(x,t) = \exp(i(k.x - \omega t))$$

alors $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial x_j} = ik_j \psi$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j^2} = -k_j^2 \psi, \quad \Delta \psi = -|k|^2 \psi$$

avec $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$

et (*) donne :

$$i\hbar(-i\omega)\cancel{\psi} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)\left(-|k|^2\right)\cancel{\psi} + U(x)\cancel{\psi}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\hbar\omega(x,k) = \frac{|\hbar k|^2}{2m} + U(x)$$

$$\Longleftrightarrow \quad H(x,p) = \frac{|p|^2}{2m} + U(x)$$

Les équations de Hamilton

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k}, \quad \frac{dk}{dt} = -\frac{\partial\omega}{\partial x}$$

s'écrivent aussi, avec $H = \hbar\omega$, $p = \hbar k$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

(2) Les équations de Hamilton pour

$$H(x,p) = \frac{|p|^2}{2m} + U(x)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + U(x)$$

s'écrivent

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{1}{m} p_j \iff p_j = m \frac{dx_j}{dt}$$

et $\displaystyle \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = -\frac{\partial U}{\partial x_j}$

$$\iff m \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x_j} = -(\operatorname{grad} U)_j = F_j$$

"équation de Newton"

Propriétés générales des équations de Hamilton

(1) on a la fonction

$$\omega : x, k \longmapsto \omega(x, k)$$

composée avec

$$t \longmapsto x(t), k(t) \quad : \text{trajectoire}$$

déterminée par les équations de Hamilton

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k_j}, \quad \frac{dk_j}{dt} = -\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

donc $\frac{d}{dt} \omega(x(t), k(t))$

$$= \sum_j \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right)\left(\frac{dx_j}{dt}\right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_j}\right)\left(\frac{dk_j}{dt}\right)$$

$$= \sum_j \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial \omega}{\partial k_j}\right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial k_j}\right)\left(-\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right)$$

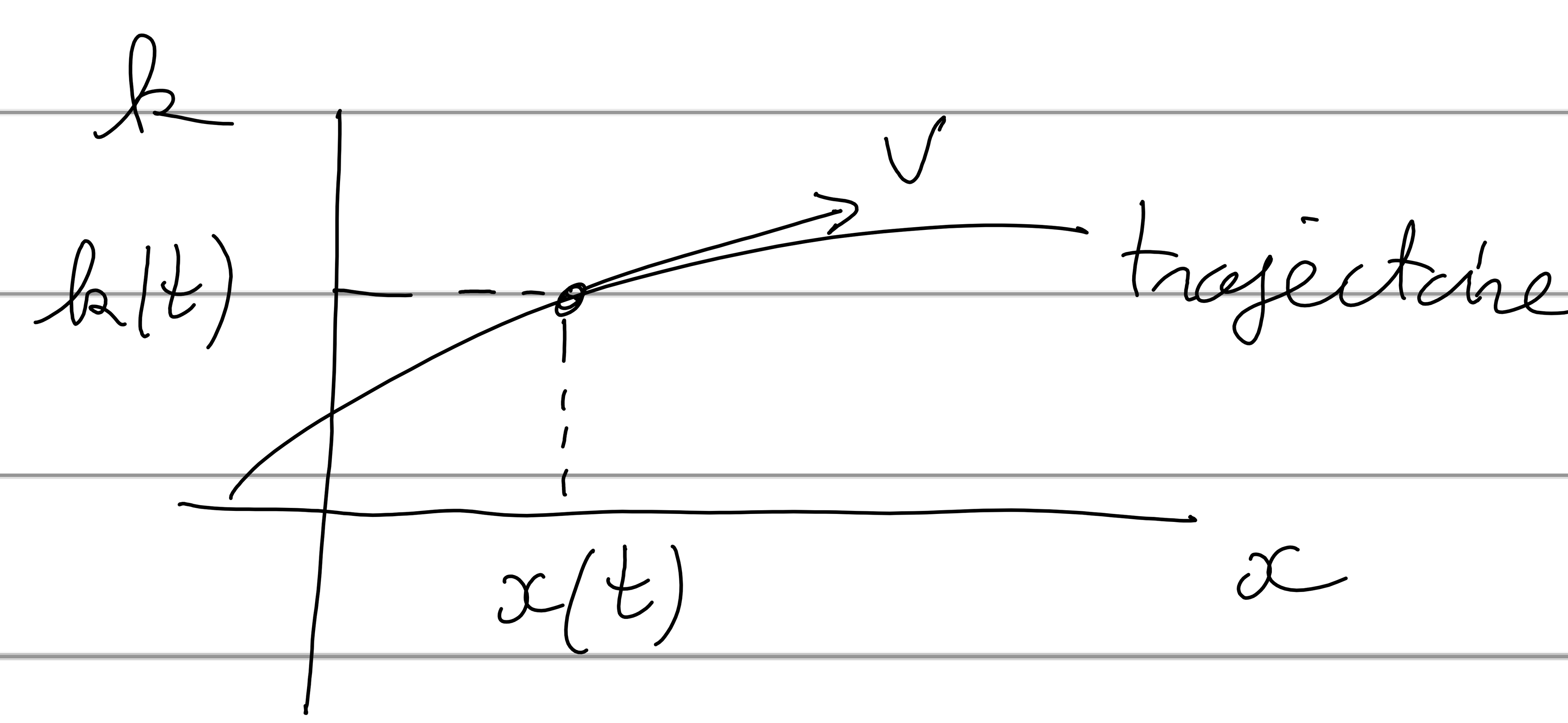
$$= 0$$

donc $t \mapsto \omega(x(t), k(t))$ est constante

(2) soit $V = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dk}{dt}\right)$: champ de vecteur

$= (V_x, V_k)$

avec $\begin{cases} V_{x_j} = \dfrac{dx_j}{dt} = \dfrac{\partial \omega}{\partial k_j} \\ V_{k_j} = \dfrac{dk_j}{dt} = -\dfrac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{cases}$



$$\mathrm{div}\, V = \sum_j \frac{\partial V_{x_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{k_j}}{\partial k_j}$$

$$= \sum_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j \partial k_j} - \frac{\partial \omega}{\partial k_j \partial x_j} = 0$$

Equation des ondes à indice variable $c(x)$ et réfraction

① Considérons l'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(c(x)\right)^2 \Delta v = 0$$

où $v : x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R} \longmapsto v(x,t) \in \mathbb{R}$ est une fonction,

$c : x \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow c(x) > 0$ est une fonction appelée <u>indice</u> variable,

et $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2}$: Laplacien de v.

- Pour trouver la relation de dispersion $\omega(x,k)$, on remplace $v(x,t) = \exp(i(k.x - \omega t))$ avec $k \in \mathbb{R}^3$, $\omega \in \mathbb{R}$ fixés.

- Cela donne

$$(-i\omega)^2 \psi - (c(x))^2(-|k|^2)\psi = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \omega^2 = (c(x))^2 |k|^2$$

donc la fonction de Hamilton est :

$$\boxed{\omega(x,k) = \pm\, c(x)\,|k|}$$

- Les équations de Hamilton sont pour $j=1,2,3$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = \dfrac{\partial \omega}{\partial k_j} \\[2mm] \dfrac{dk_j}{dt} = -\dfrac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{cases}$$

or $\dfrac{\partial \omega^2}{\partial k_j} = 2\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial k_j} = c^2(x)\left(\dfrac{\partial |k|^2}{\partial k_j}\right) = c^2(x)\, 2k_j$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \omega}{\partial k_j} = \frac{c^2(x)}{\omega} k_j = \pm\, c(x) \frac{k_j}{|k|}$$

et $\dfrac{\partial \omega}{\partial x_j} = \pm \left(\dfrac{\partial c}{\partial x_j}\right)|k|$

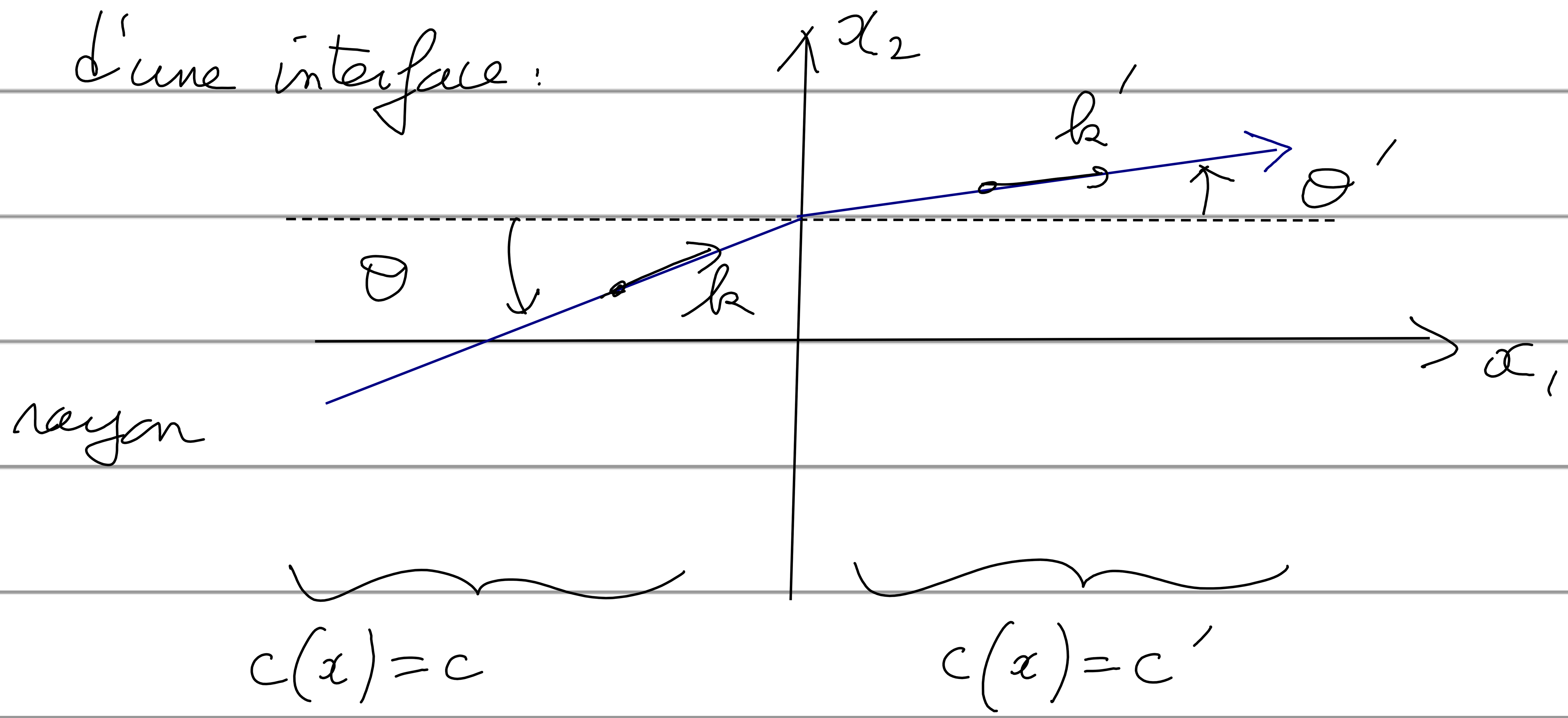
donc $\frac{dx}{dt} = \pm c(x) \left(\frac{k}{|k|} \right)$: vecteur unitaire dans la direction de k

ce qui implique

$$\left\| \frac{dx}{dt} \right\| = c(x)$$: l'indice $c(x)$ est aussi le module de la vitesse de groupe

et $\frac{dk}{dt} = \pm (\operatorname{grad} c) |k|$

2) Dans le cas particulier où $c(x)$ prend deux valeurs c, c' de part et d'autre d'une interface :



on cherche à exprimer θ' à partir de θ, en utilisant les équations de Hamilton.

. on a vu que $\omega(x,k) = \pm c(x)\,|k|$

où $c(x)$ dépend seulement de x_1.

donc $\dfrac{\partial c}{\partial x_2} = 0$,

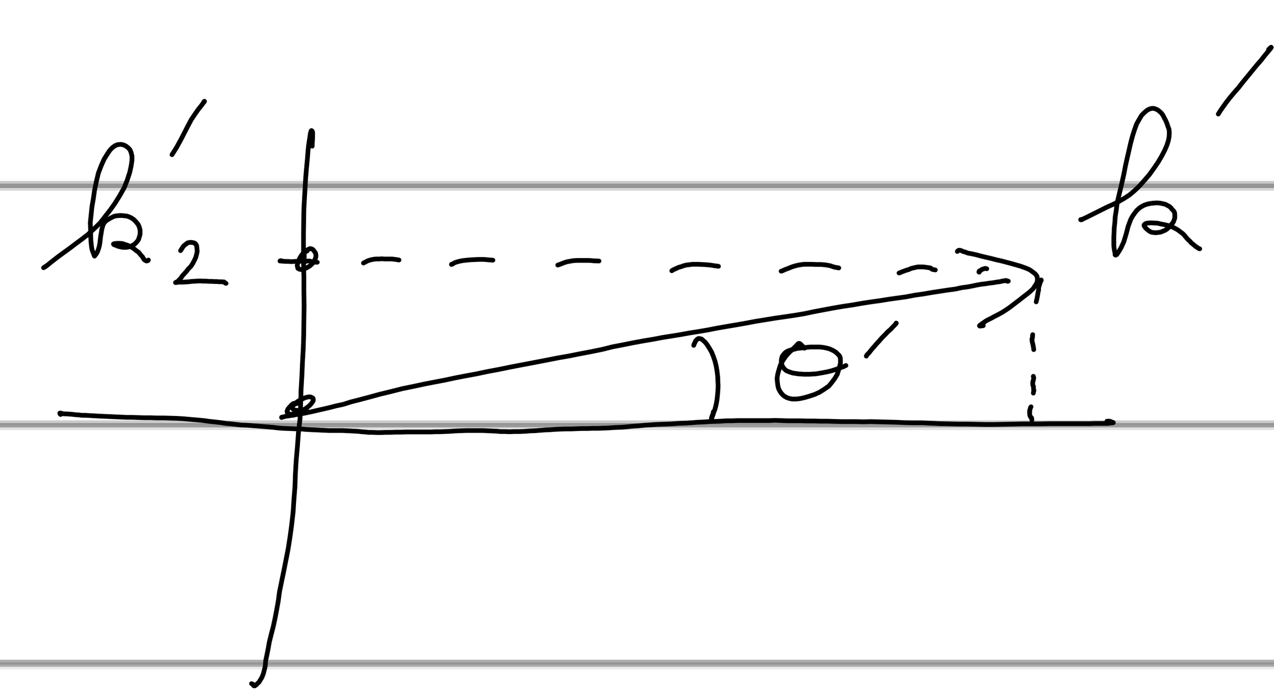
donc $\dfrac{dk_2}{dt} = -\dfrac{\partial \omega}{\partial x_2} = 0 \iff k_2 = \text{cte}$

donc $k_2' = k_2$ (de part et d'autre de l'interface)

. D'après la <u>conservation de l'énergie</u>,

$\omega = \omega'$ (de part et d'autre de l'interface)

$\iff c\,|k| = c'\,|k'|$



donc $\sin\theta' = \dfrac{k_2'}{|k'|}$

$= \dfrac{c'}{c}\dfrac{k_2}{|k|} = \dfrac{c'}{c}\sin\theta$ car de même $\sin\theta = \dfrac{k_2}{|k|}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{c'}\sin\theta' = \dfrac{1}{c}\sin\theta}$

Preuve de la relation onde-particules

Supposons une fonction de Hamilton à l'ordre 1 :

$\omega : x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \omega(x,k) = \omega_0 + \alpha . x + \beta . k$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^n$

où $\alpha . x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, $\quad \beta . k = \sum_{j=1}^{n} \beta_j k_j$

① l'opérateur associé s'obtient en remplaçant k_j par $-i \dfrac{\partial .}{\partial x_j}$

Ce qui donne $\hat{\Omega} = \omega_0 + \alpha . x + \beta . (-i \nabla)$

où $\nabla = \left(\dfrac{\partial .}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial .}{\partial x_j} \right)$

et $\beta . (-i \nabla) = -i \beta . \nabla = -i \sum_j \beta_j \dfrac{\partial .}{\partial x_j}$

L'équation d'évolution d'une fonction

$$u_t : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow u_t(x) \in \mathbb{C}$$

est

$$(*) \quad i \frac{\partial u_t}{\partial t} = \hat{\Omega}\, u_t$$

(2) Posons

$$u_t(x) = e^{i\varphi_t} e^{i k_t x} e^{-\frac{1}{2}\left|\frac{x - x_t}{\sigma}\right|^2}$$

: paquet d'onde Gaussien

avec
$$\begin{cases} x_t \in \mathbb{R}^n : \text{position} \\ k_t \in \mathbb{R}^n : \text{vecteur d'onde} \\ \sigma > 0 : \text{largeur} \\ \varphi_t \in \mathbb{R} : \text{phase} \end{cases}$$

On va vérifier que u_t est solution de l'équation d'évolution $(*)$, à condition que x_t, k_t sont solution des équation du mouvement de Hamilton:

$$\dot{x}_t = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \beta \quad \text{et} \quad \dot{k}_t = -\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\alpha$$

En effet, on a d'une part

$$i\frac{\partial u_t}{\partial t} = i\left[i\dot{\varphi}_t + i\dot{k}_t x + \frac{1}{\sigma^2}(x - x_t)\cdot\dot{x}_t\right]u_t$$

et d'autre part

$$\hat{\Omega}u_t = \left(\omega_0 + \alpha . x - i\beta . \nabla\right)u_t$$

or $\dfrac{\partial u_t}{\partial x_j} = \left[i(k_t)_j - \dfrac{1}{\sigma^2}\left(x_j - (x_t)_j\right)\right]u_t$

donc

$$\hat{\Omega}u_t = \left[\omega_0 + \alpha . x + \beta . k_t + \frac{i}{\sigma^2}\beta . (x - x_t)\right]u_t$$

et $(*) \Longleftrightarrow i\dfrac{\partial u_t}{\partial t} = \hat{\Omega}u_t$

$$\Longleftrightarrow -\dot{\varphi}_t - \dot{k}_t x + \frac{i}{\sigma^2}(x - x_t)\cdot\dot{x}_t$$

$$= \omega_0 + \beta k_t + \alpha x - \frac{i}{\sigma^2}(x - x_t)(-\beta), \quad \forall x$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot{\varphi}_t = -\omega_0 + \beta k_t$$

$$\begin{cases} \dot{x}_t = \beta = \dfrac{\partial \omega}{\partial k} \\ \dot{k}_t = -\alpha = -\dfrac{\partial \omega}{\partial x} \end{cases}$$

: équations de Hamilton

Applications

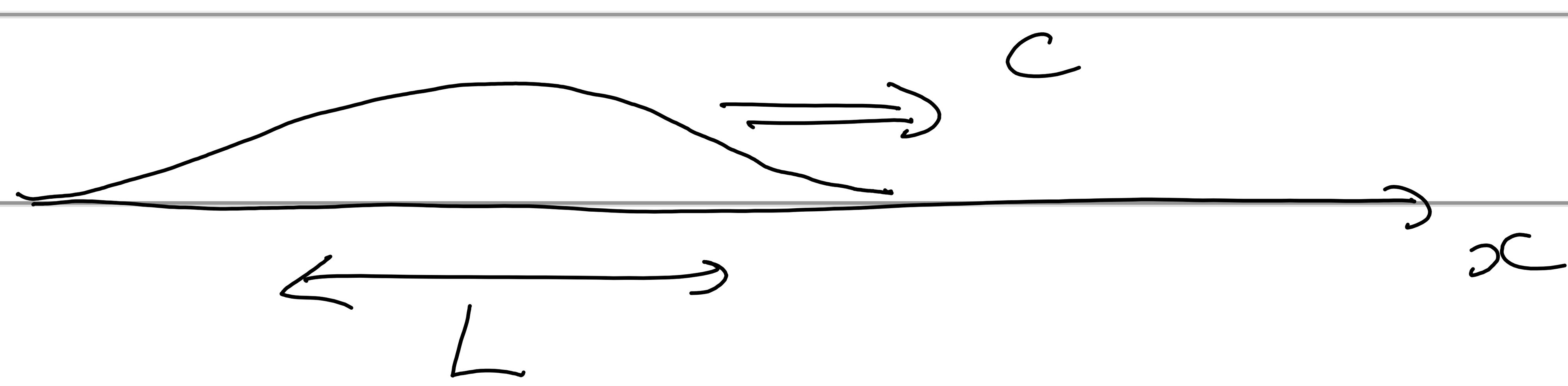
(1) Paquet d'onde durée $t = 0,2$ s.

vitesse $c = 343\,m/s = \frac{L}{t}$

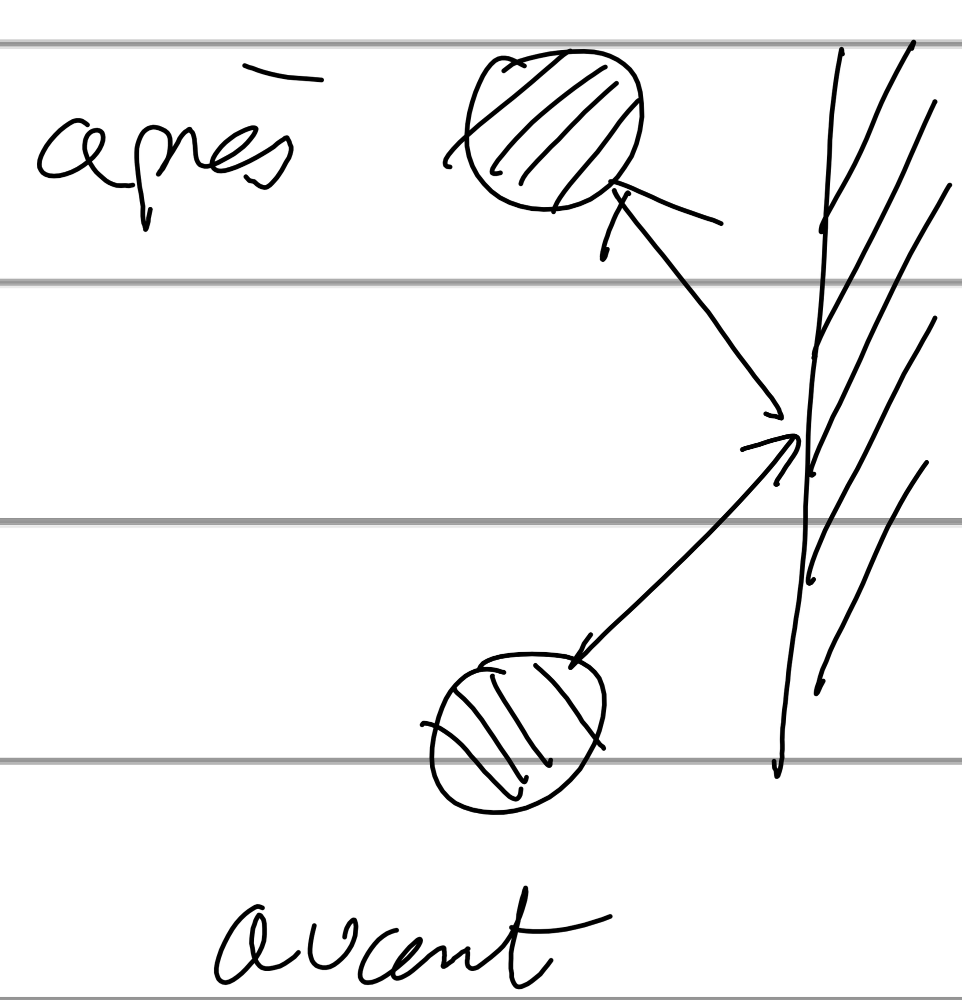
donc

taille $L = c\,t = 343\,\frac{m}{s} \times 0,2\,s$

$= 78\,m$



(2)



: reflexion parfaite sur un plan

sur un obstacle pointu :

le paquet d'onde

se décompose