Composition de l'air

Une mole de molécules de di-azote a la masse :

$$M_{N_2} = \underbrace{N_A}_{\text{nombre de molécules}} \times \underbrace{2}_{\text{nombre de noyaux}} \times (\underbrace{7}_{\text{protons}} + \underbrace{7}_{\text{neutrons}}) \times \underbrace{m_{nucl}}_{\text{masse d'un nucléon (proton ou neutron)}}$$

or $N_A \times m_{nucl} = 1\,g. = 10^{-3}\,kg$: masse d'une mole de nucléons

de même $M_{O_2} = N_A \times 2 \times (8+8) \times m_{nucl}$

donc la masse molaire moyenne des molécules d'air est : $M = 80\%\, M_{N_2} + 20\%\, M_{O_2}$

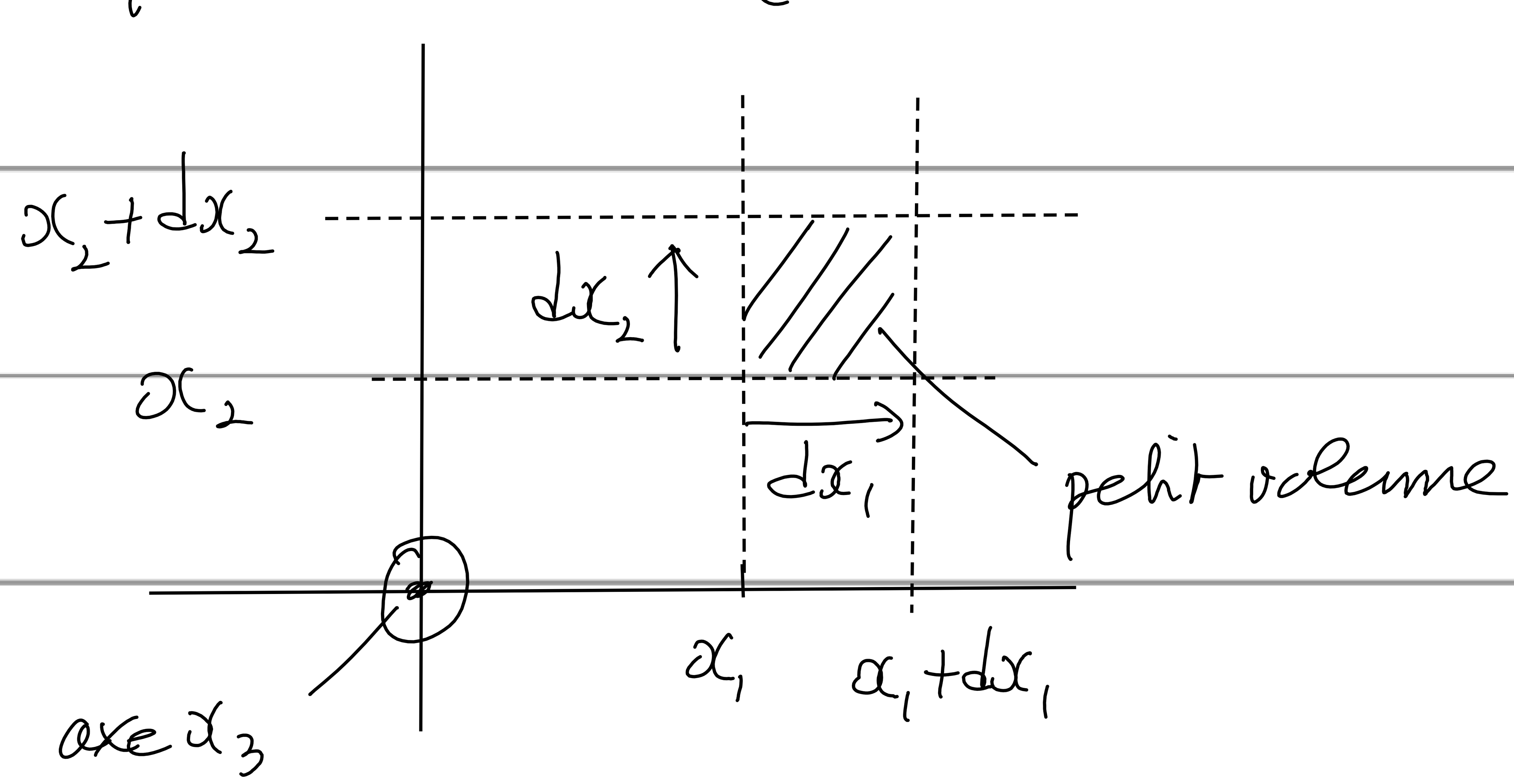
$$= 2\,(N_A\, m_{nucl})\,(0.8 \times 14 + 0.2 \times 16)$$

$$= 29\,g = 29 \cdot 10^{-3}\,kg \text{ (par mole)}$$

Equation de mouvement du fluide : équation d'Euler

(1) Pour démontrer l'équation de la "conservation de la masse", on va montrer une première démonstration pas vraiment rigoureuse, mais que l'on trouve dans les livres de physique.
(après on présente la démonstration rigoureuse en (1'))

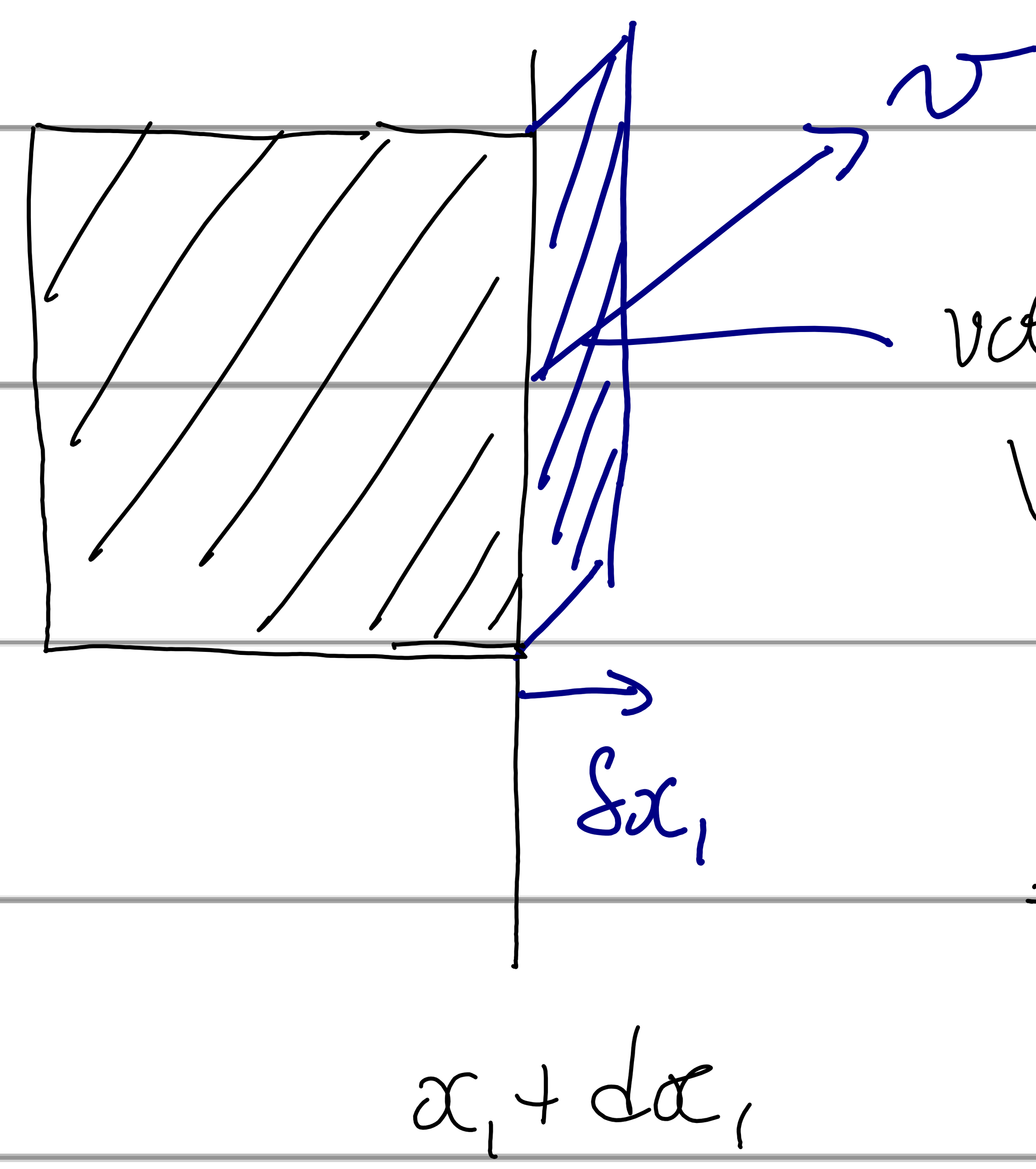
Considérons un petit volume $d^3x = dx_1 dx_2 dx_3$ l'espace (x_1, x_2, x_3), ici on ne représente que x_1, x_2 : (l'axe x_3 est $\perp$ au schéma)



Ce volume imaginaire est fixe et le fluide passe à travers lui à cause de la vitesse v.
Par conséquent la masse $m(t)$ dans ce volume varie avec le temps. Faisons le bilan,
on supposons que la masse totale est conservée,
ic la masse se déplace mais n'est pas détruite ni créée

- sur le côté droit en $x_1 + dx_1$, de surface $(dx_2\, dx_3)$ la vitesse est $v_j(x_1 + dx_1, x_2, x_3)$, $j = 1, 2, 3$ et pendant le temps dt, la longueur parcourue selon l'axe x_1 est :

$$\delta x_1 = v_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3)\, dt$$



volume déplacé :

$$V = \delta x_1 (dx_2 dx_3)$$
$$= v_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3)\, dt\, dx_2\, dx_3$$

$\Longrightarrow$ variation de masse $\delta m_1'$

La variation de masse dans l'élément de volume à cause de la fuite par ce côté droit est donc

$$\delta m_1' = -\, \rho(x_1 + dx_1, x_2, x_3)\, V$$
$$= -(\rho \times v_1)(x_1 + dx_1, x_2, x_3)\, dt\, dx_2\, dx_3$$

car fuite

de même la variation de masse à cause du coté gauche est :

$$\delta m_1 = +\left(\rho \times v_1\right)\left(x_1, x_2, x_3\right) \, dt \, dx_2 \, dx_3$$

or d'après la formule de la dérivée d'une fonction :

$$f(x+dx) - f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \times dx + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{terme négligeable} \\ \text{si } dx \ll 1,}}{o(dx)}$$

on déduit que

selon l'axe x_1 :

$$\delta m_1 + \delta m_1' = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho v_1\right)\right) dx_1 \; dt \, dx_2 \, dx_3$$

De même selon les axes x_2, x_3 et au total

la variation de masse dans ce petit volume est

$$\delta m = \left(-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\rho v_1\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\rho v_2\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\rho v_3\right)\right) dt \, d^3x$$

$$= \left(-\operatorname{div}\left(\rho v\right)\right) dt \, d^3x$$

car $\operatorname{div}(\vec{U}) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}$

or la masse volumique est $\rho = \dfrac{m}{d^3x}$,

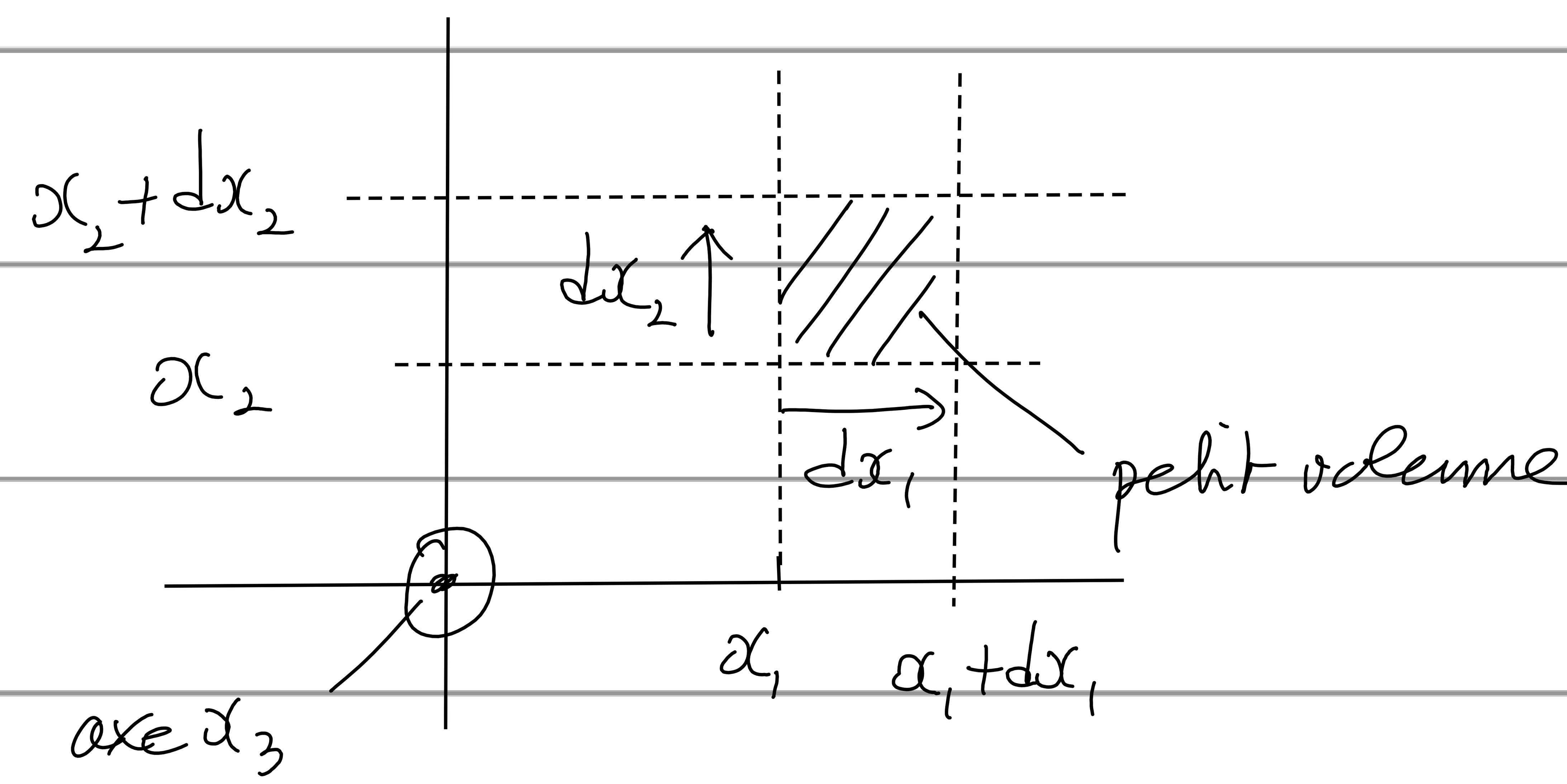
donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\delta m}{dt\, d^3x} = -\operatorname{div}(\rho v)$$

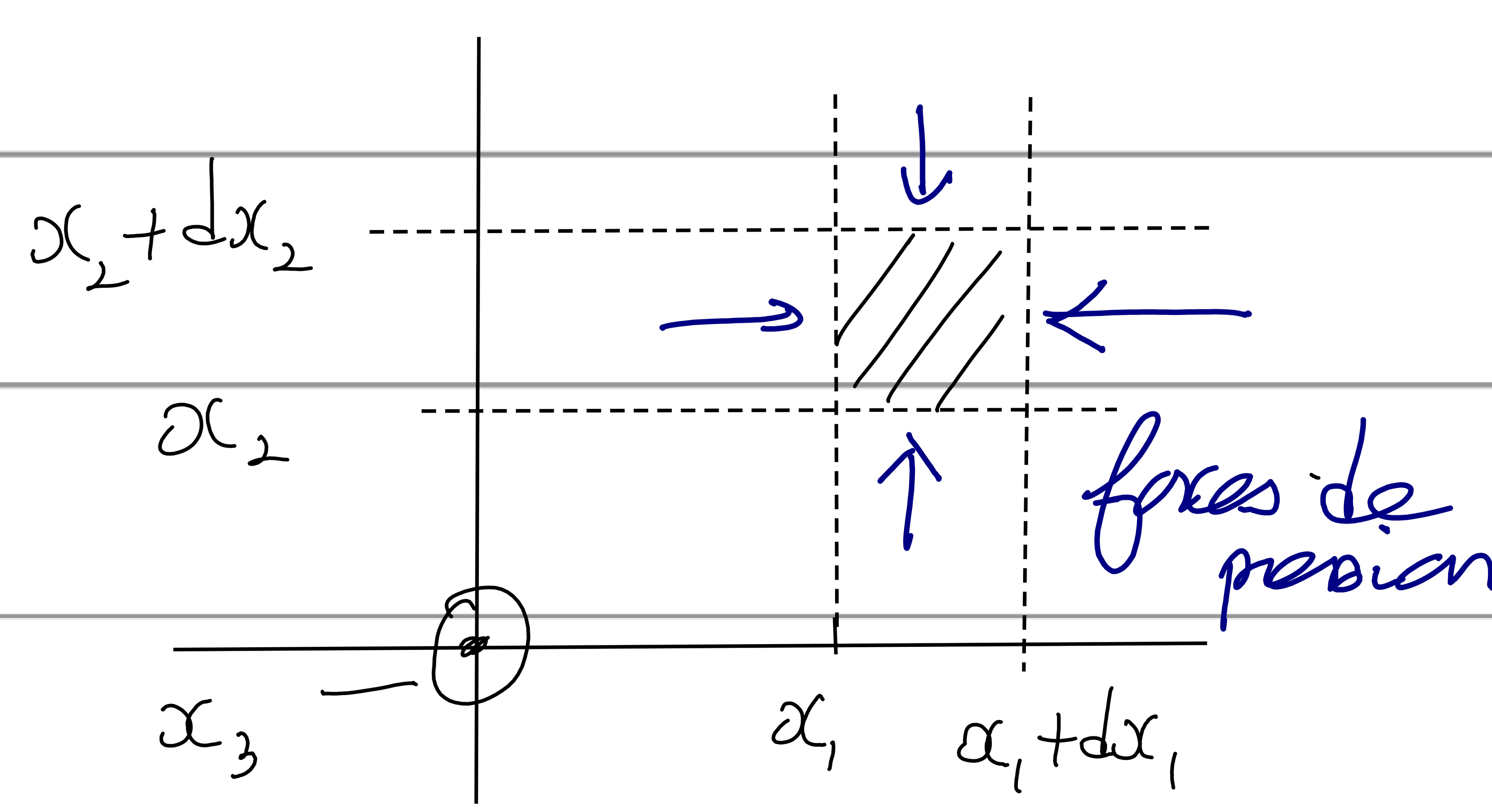
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

1' Autre preuve de l'équation de conservation de la masse dans un langage mathématique plus correct.

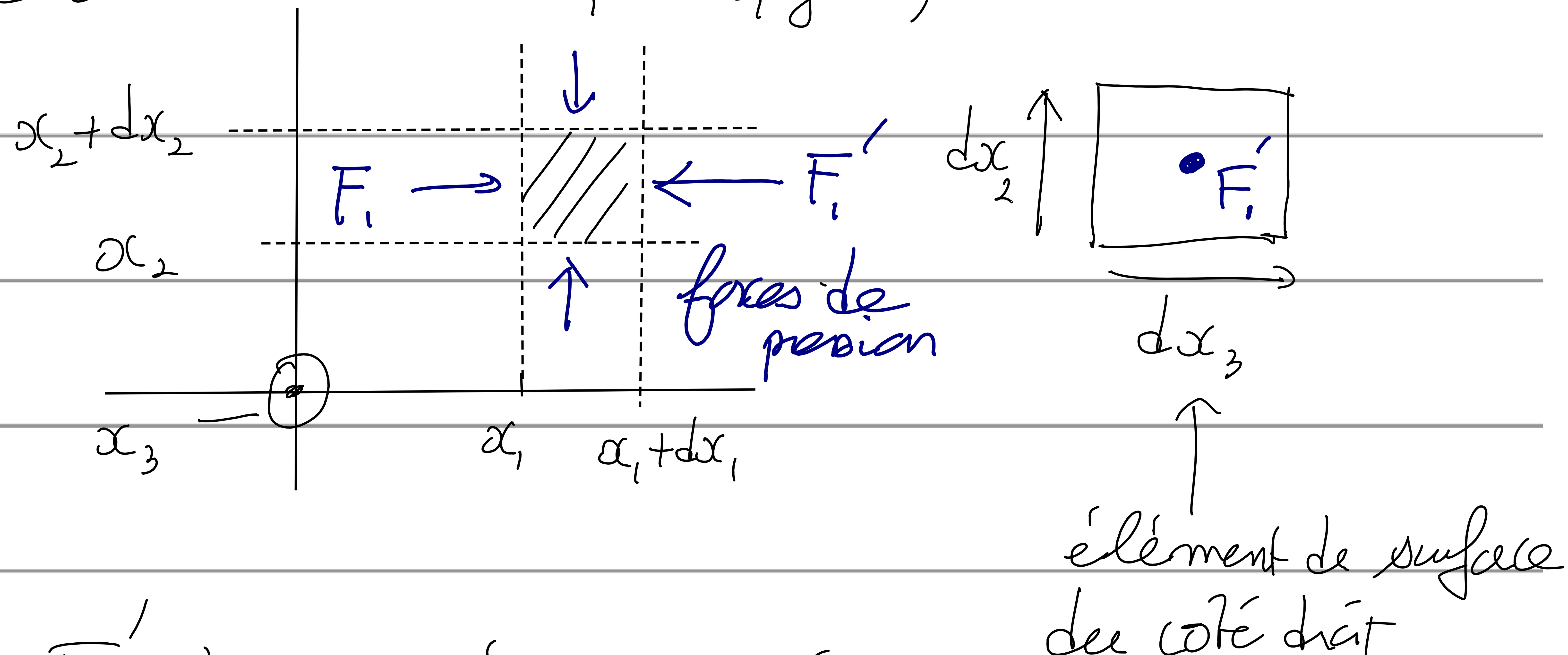
(2) Considérons à nouveau le petit élément de volume $d^3x = dx_1\, dx_2\, dx_3$



Sur chaque coté, ce volume subit une force de pression de la part du fluide environant,



sur le côté droit en $x_1 + dx_1$ fixé,



la force F_1' est selon l'axe x_1, négative:

$$F_1' = -p(x_1+dx_1, x_2, x_3)\underbrace{dx_2\,dx_3}_{\text{élément de surface}}$$

pression sur le côté droit

car la force est opposée à l'axe x_1

de même sur le côté gauche la force F_1 est selon x_1 positive:

$$F_1 = p(x_1, x_2, x_3)\,dx_2\,dx_3$$

la somme de ces deux forces est selon x_1 et d'amplitude

$$F_1 + F_1' = \big(p(x_1,x_2,x_3) - p(x_1+dx_1, x_2, x_3)\big)\,dx_2\,dx_3$$

or d'après la formule de la dérivée d'une fonction :

$$f(x+dx) - f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \times dx + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{terme négligeable} \\ \text{si } dx \ll 1}}{o(dx)}$$

on a ici :

$$F_1 + F_1' = -\left(\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2, x_3) \overbrace{dx_1\, dx_2\, dx_3}^{d^3x}$$

: selon l'axe x_1

De même pour les autres paires de faces (axes x_2, x_3) et au final la force total de pression exercée sur l'élément de volume est le vecteur

$$\vec{F} = \begin{cases} -\dfrac{\partial p}{\partial x_1}\, d^3x \\ -\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\, d^3x \\ -\dfrac{\partial p}{\partial x_3}\, d^3x \end{cases} = -\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, p\right) d^3x$$

qui est nulle si la pression $p(x,t)$ est uniforme, mais non nulle si $p(x,t)$ varie avec x.

(3) L'équation de mouvement de Newton pour l'élément de fluide de volume d^3x, de masse $m = \rho\, d^3x$

ρ : masse volumique

s'écrit : $m \dfrac{dv}{dt} = \vec{F}$ $(*)$

$\dfrac{dv}{dt}$: accélération

où $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\, v(x(t), t)$

v : champ de vitesse

$x(t)$: position de l'élément de volume à la date t

$(*) \Longleftrightarrow \rho\, d^3x \left(\dfrac{dv}{dt}\right) = -\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p\right) d^3x$

$\Longleftrightarrow \rho \dfrac{dv}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, p$: "équ. de Euler 1752"

Equation des ondes sonores

- Considérons un fluide libre (pas de force de pesanteur, ni viscosité)
  Son mouvement est donc décrit par l'équation de mouvement de Euler (i.e. Newton) :

$$\rho \frac{dv}{dt} = - \overrightarrow{\text{grad}}\, P$$

- Supposons
$$\begin{cases} P(x,t) = p_0 + p(x,t) \\ \rho(x,t) = \rho_0 + \rho(x,t) \end{cases}$$

p_0, ρ_0 : constantes ; $p(x,t)$, $\rho(x,t)$: petites fluctuations

On admet que le mouvement est suffisement lent pour conserver l'entropie et cela implique

$$P(x,t) = C\left(\rho(x,t)\right)^{\gamma} \quad \text{avec } \gamma = \frac{7}{5}$$

(pour molécules diatomiques)

1

La formule de Laplace donne

$$p = C\rho^\gamma$$

$$\Leftrightarrow \ln p = \ln C + \gamma \ln \rho$$

$$\Leftrightarrow d\ln p = \gamma\, d\ln \rho$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{p_0} = \gamma \frac{\rho}{\rho_0}$$: au 1er ordre

$$\Leftrightarrow \rho = \frac{\rho_0}{p_0 \gamma} p$$: relie les fluctuations de densité aux fluct. de pression

(2) on a l'accélération :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\, v(x(t), t) = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) \underbrace{\left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\right)}_{= v_j} + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) \underbrace{\left(\frac{\partial t}{\partial t}\right)}_{=1}$$

dérivée de fonction composée

$$= \left(\sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) v_j \right) + \frac{\partial v}{\partial t}$$

on a supposé $\mathbb{P} = p_0 + p(x,t)$

or $\vec{\text{grad}}(p_0) = 0$ très petit

donc $\vec{\text{grad}}(\mathbb{P}) = \vec{\text{grad}}(p)$ très petit

donc $\rho \frac{dv}{dt} = -\vec{\text{grad}}(\mathbb{P})$ très petit

donc v est très petit,

donc $\left(\frac{\partial v}{\partial x_j}\right) v_j \ll \frac{\partial v}{\partial t}$.

Ainsi

$$\frac{dv}{dt} \simeq \frac{\partial v}{\partial t}$$

et <u>l'équation d'Euler</u> donne $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \simeq -\text{grad}\, p$

(*)

De même, $\rho\vec{v} = (\rho_0 + \rho)\vec{v} \approx \rho_0 \vec{v}$

très petit

donc l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

(**) donc $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \,\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$ au 1er ordre.

Alors (*) $\iff$ $\mathrm{div}\left(\rho_0 \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = -\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, p)$

$$= -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j^2}$$

$$= -\Delta p$$

$\iff$ $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0 \,\mathrm{div}(\vec{v})\right) = -\Delta p$

et avec (**) : $\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p$ $\quad$ (*)

or $\rho = \frac{\rho_0}{p_0 \gamma} p$ donc

(*) donne

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p \iff \frac{\rho_0}{p_0 \gamma} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p$$

$$\iff \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0}}$$

L'équation des gaz parfait est

(*) $p_0 V = n R T_0$

p_0 : pression moyenne ; n : nombre de moles dans le volume V ; T_0 : température moyenne

$R = 8{,}31$ J/K

or la masse est $m = M n$

M : masse/mol ; n : nombre de moles

Masse volumique moyenne $\rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{Mn}{V} \iff \frac{n}{V} = \frac{\rho_0}{M}$

donc (*) $\iff p_0 = \frac{\rho_0}{M} R T_0$

donc

$$c^2 = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} = \frac{R T_0 \gamma}{M}$$

Valeurs numériques sur les ondes sonores

(1) $T_0 = 20\,C^\circ = 273 + 20\,K = 293\ K$

$p_0 = 10^5\ Pa$

$$\rho_0 = \frac{M p_0}{R T_0} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5}{8{,}31 \cdot 293}\ \frac{kg}{m^3}$$

$$= 1{,}19\ kg/m^3$$

$$c = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{7 \cdot 10^5}{5 \cdot 1{,}19}\right)^{1/2} \frac{m}{s}$$

$$= 343\ m/s$$

② on a $c = \left(\dfrac{\gamma R T}{M}\right)^{1/2}$

$$\Longleftrightarrow \ln c = \frac{1}{2} \ln T + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\gamma R}{M}\right)$$

constantes

$$\Longleftrightarrow \frac{dc}{c} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{20}{293}\right) = 3\%$$

$$dc = 3\% \times c = 0{,}03 \times 343 \text{ m/s}$$

$$= 10 \text{ m/s}$$

(3) Pour l'Hélium 4,

la masse d'une mole de molécules est

$$M = \underbrace{(2+2)}_{\text{2 protons + 2 neutrons}} \cdot 10^{-3} \ \text{kg}$$

une molécule est monoatomique donc

$$\gamma = 1 + \frac{2}{3+\underbrace{0}_{\text{pas de rotation interne}}} = \frac{5}{3}$$

$$c = \left(\frac{\gamma R T_0}{M}\right)^{1/2} = \left(\frac{5 \quad 8{,}31 \quad 273}{3 \quad \cdot 4 \cdot 10^{-3}}\right) \frac{m}{s}$$

$$= 972 \ m/s$$

(4) D'après la loi des gaz parfaits

$$p_0 V = n R T \quad , \quad n = \frac{N}{N_A}$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{p_0 V N_A}{R T_0} = \frac{10^5 \cdot 6 \cdot 10^{23}}{8.31 \cdot 293} = 10^{25}$$

(5)

$$c = \frac{d}{\Delta t}$$

c : vitesse, d ← distance, Δt ← temps

$$\Leftrightarrow d = c \cdot \Delta t = 343 \cdot 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 17 \text{ m.}$$

Ce temps $\Delta t = 50$ ms est appelé la "latence maximale" en musique.

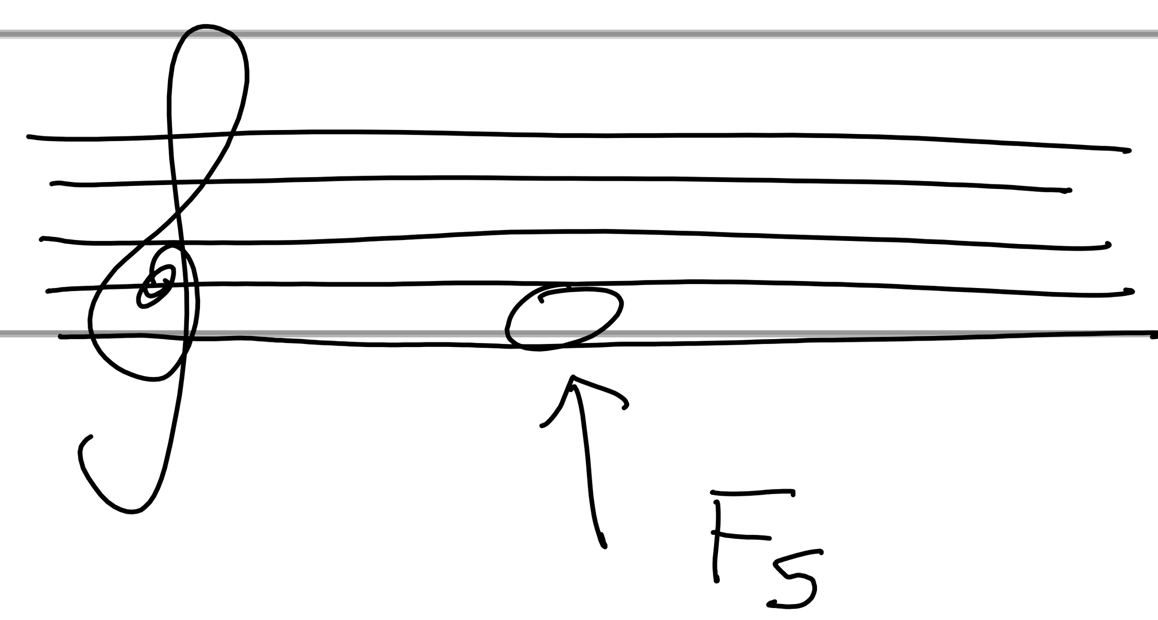
Donc pour jouer ensemble, des musiciens (orchestre) doivent être distants de moins de 17 m (à peu près)

(6) $c = \dfrac{d}{t} \iff d = c \cdot t$

$= 343 \times 10 = 3430 \text{ m}$

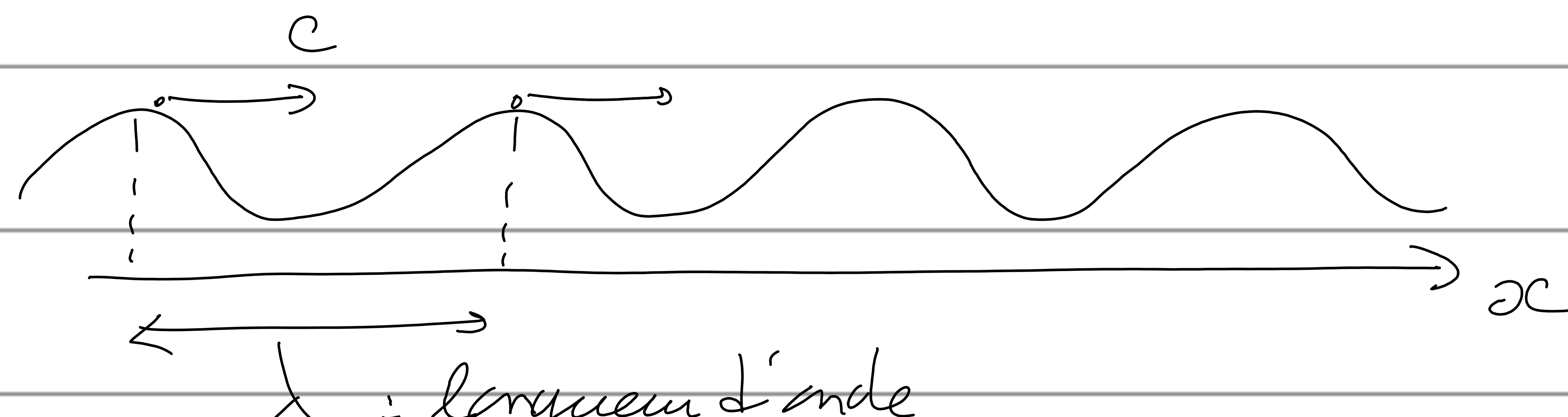
$= 3{,}43 \text{ km}$

(7) Le fa F_5



a une fréquence $f_{F_5} = 343 \text{ Hz}$

onde :



donc le temps pour parcourir une longueur d'onde

et la période $T_{F_5} = \dfrac{1}{f_{F_5}}$,

et

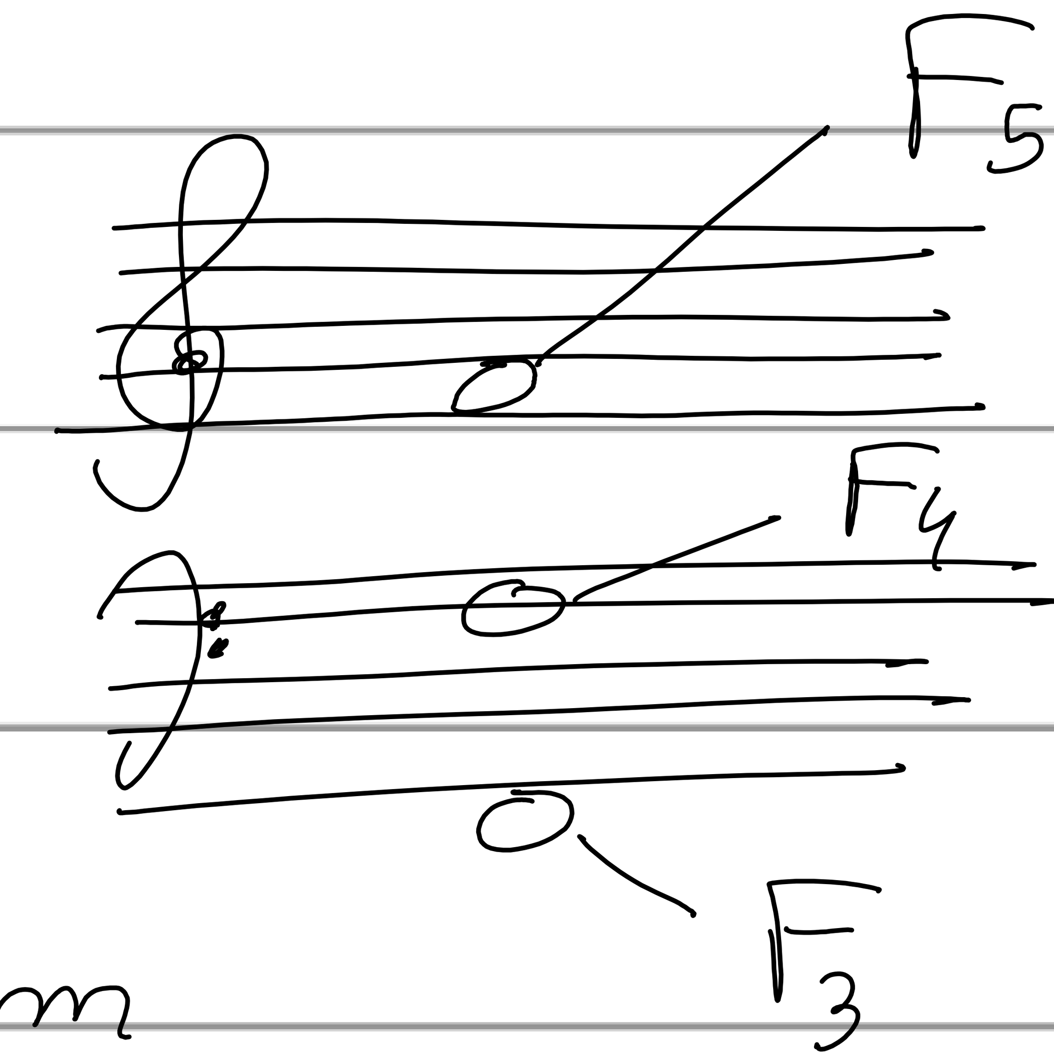
$c = \dfrac{\lambda}{T} \iff \lambda = cT = \dfrac{c}{f} = \dfrac{343}{343} \text{ m} = 1 \text{ m}$

distance (λ)

temps (T)

$f_{F_4} = \frac{1}{2} f_{F_5}$: car une octave en dessous

$f_{F_3} = \frac{1}{2} f_{F_4} = \frac{1}{4} f_{F_5}$



$\lambda_{F_4} = \frac{c}{f_{F_4}} = 2\,\frac{c}{f_{F_5}} = 2\,\lambda_{F_5} = 2m$

$\lambda_{F_3} = 4\,\lambda_{F_5} = 4\,m$

(8) on a vu que $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{1500}{150\cdot 10^3}\,m = 0{,}01\,m = 1\,cm$