Etats liés du Deuton

1) on a
$$\hat{S}_{p,x}\,|+_p\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|-_p\rangle$$
$$\hat{S}_{p,y}\,|+_p\rangle = i\,\frac{\hbar}{2}\,|-_p\rangle$$
$$\hat{S}_{p,x}\,|-_p\rangle = \frac{\hbar}{2}\,|+_p\rangle$$
$$\hat{S}_{p,y}\,|-_p\rangle = (-i)\,\frac{\hbar}{2}\,|+_p\rangle$$

donc

$$\begin{cases} \hat{S}_{p,+}\,|+\rangle = \left(\hat{S}_{p,x} + i\,\hat{S}_{p,y}\right)|+\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(|-\rangle - |-\rangle\right) = 0 \\ \hat{S}_{p,+}\,|-\rangle = \left(\hat{S}_x + i\,\hat{S}_y\right)|-\rangle = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle + |+\rangle\right) = \hbar\,|+\rangle \end{cases}$$

de même

$$\begin{cases} \hat{S}_{p,-}\,|+\rangle = \left(\hat{S}_x - i\,\hat{S}_y\right)|+\rangle = \hbar\,|-\rangle \\ \hat{S}_{p,-}\,|-\rangle = \left(\hat{S}_x - i\,\hat{S}_y\right)|-\rangle = 0 \end{cases}$$

- <u>Opérateurs de spin total</u> :

$$\begin{cases} \hat{S}_x = \hat{S}_{p,x} + \hat{S}_{n,x} \\ \hat{S}_y = \hat{S}_{p,y} + \hat{S}_{n,y} \\ \hat{S}_z = \hat{S}_{p,z} + \hat{S}_{n,z} \end{cases}$$

- <u>Montrons la relation</u> $\vec{S}^2 = \hbar^2\frac{3}{2}\,Id + \left(S_{p,+}S_{n,-} + S_{p,-}S_{n,+} + 2S_{pz}S_{nz}\right)$

en effet : $\vec{S}^2 = \left(\vec{S}_p + \vec{S}_n\right)^2 = \vec{S}_p^{\,2} + \vec{S}_n^{\,2} + 2\,\vec{S}_p\cdot\vec{S}_n$

$$= \hbar^2\frac{3}{4} + \hbar^2\frac{3}{4} + 2\left(S_{px}S_{nx} + S_{py}S_{ny} + S_{pz}S_{nz}\right)$$

$$= \hbar^2\frac{3}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\left(S_{p+} + S_{p-}\right)\left(S_{n+} + S_{n-}\right) + \frac{(i)^2}{4}\left(S_{p-} - S_{p+}\right)\left(S_{n-} - S_{n+}\right)\right) + 2S_{pz}S_{nz}$$

car $\begin{cases} S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) \\ S_y = \frac{i}{2}(S_- - S_+) \end{cases}$

ainsi
$$\vec{S}^2 = \hbar^2 \frac{3}{2} + (S_{p+} S_{m-} + S_{p-} S_{m+}) + 2 S_{pz} S_{mz}$$

(2). Soit $|\psi\rangle = |+_p +_m\rangle$,

on a $\vec{S}^2 |\psi\rangle = \left(\hbar^2 \frac{3}{2} + 2\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\right)|\psi\rangle = \hbar^2 2 |\psi\rangle = \hbar^2 J(J+1)|\psi\rangle$

avec $J = 1$

$S_z |\psi\rangle = \hbar |\psi\rangle = \hbar M |\psi\rangle$ avec $M = 1$

donc $|J=1; M=1\rangle = |++\rangle$

. Soit $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)$

on a $\vec{S}^2 |\psi\rangle = \hbar^2 \frac{3}{2} |\psi\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar^2 \left(|-+\rangle + |+-\rangle\right) + \frac{2}{\sqrt{2}}\left(-\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 |+-\rangle - \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 |-+\rangle\right)$

$= \hbar^2 2 |\psi\rangle = \hbar^2 J(J+1)|\psi\rangle$

avec $J = 1$

$S_z |\psi\rangle = 0$ donc $M = 0$

donc $|J=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right)$

. Soit $|\psi\rangle = |-_p -_m\rangle$

comme ci-dessus, on calcule que $\underline{J = 1, M = -1}$

. Soit $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$,

on calcule que $\underline{J = 0, M = 0}$. "état singulet"

. Les états $J = 1$ sont symétriques

. L'état $J = 0$ est antisymétrique

On a $\vec{S}^2 = \vec{S}_p^2 + \vec{S}_n^2 + 2 \cdot \vec{S}_p \vec{S}_n$

$$= \hbar^2 \frac{3}{2} \hat{I} + 2 \cdot \vec{S}_p \vec{S}_n$$

donc $\vec{S}_p \vec{S}_n \quad \frac{1}{2}\left(\vec{S}^2 - \hbar^2 \frac{3}{2} \hat{I}\right)$

$$= \frac{1}{2} \hbar^2 \left(J(J+1) - \frac{3}{2} \right) \hat{I} \text{ dans } \mathcal{D}_J$$

$$= \begin{cases} \hbar^2 \frac{1}{4} & \text{dans } \mathcal{D}_{J=1} \\ -\frac{3}{4} \hbar^2 \hat{I} & \text{dans } \mathcal{D}_{J=0} \end{cases}$$

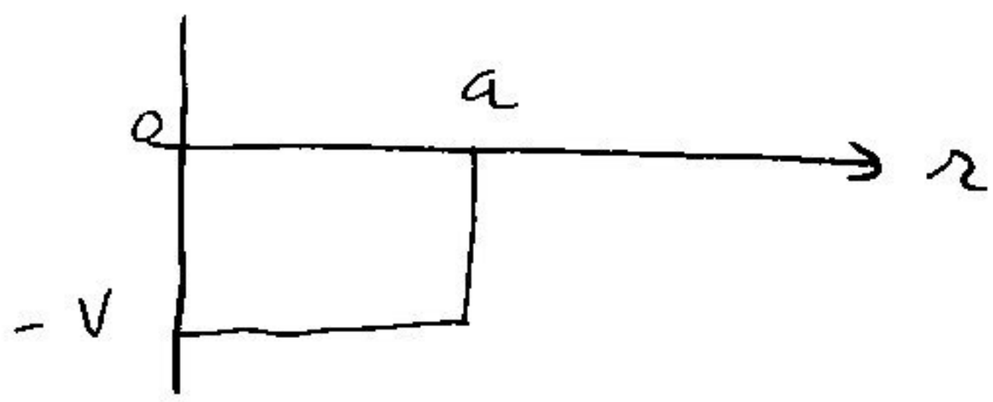
donc sur les <u>états $J=1$</u> (espace $\mathcal{D}_{J=1}$), on a

$$V(r) = V_1(r) + \frac{1}{4} V_2(r)$$

et sur l'<u>état $J=0$</u> on a

$$V(r) = V_1(r) - \frac{3}{4} V_2(r)$$

④ On considère le potentiel



et $-V < E < 0$

$0 < \varepsilon = E + V < V$

• pour $0 < r < a$ la solution de $H\psi_1 = E\psi_1$

$$\Longleftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2M}\psi_1'' - V\psi_1 = E\psi_1 \Longleftrightarrow \psi_1'' + \frac{(V+E)2m}{\hbar^2}\psi_1 = 0$$

est $\psi_1(r) = A \cdot \sin(kr)$ avec $k^2 = \frac{(V+E)2m}{\hbar^2} = \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}$

$\varepsilon = V + E$

• pour $r > a$, la solution de $H\psi_2 = E\psi_2 \Longleftrightarrow \psi_2'' + \frac{E2m}{\hbar^2}\psi_2 = 0$

est $\psi_2(r) = B\, e^{-kr}$ avec $k^2 = \frac{(-E)2m}{\hbar^2} = \frac{(V-\varepsilon)2m}{\hbar^2}$

• le raccordement en $r = a$ s'écrit :

(1) $\psi_1(a) = \psi_2(a) \Longleftrightarrow A \sin(ka) = B e^{-ka}$

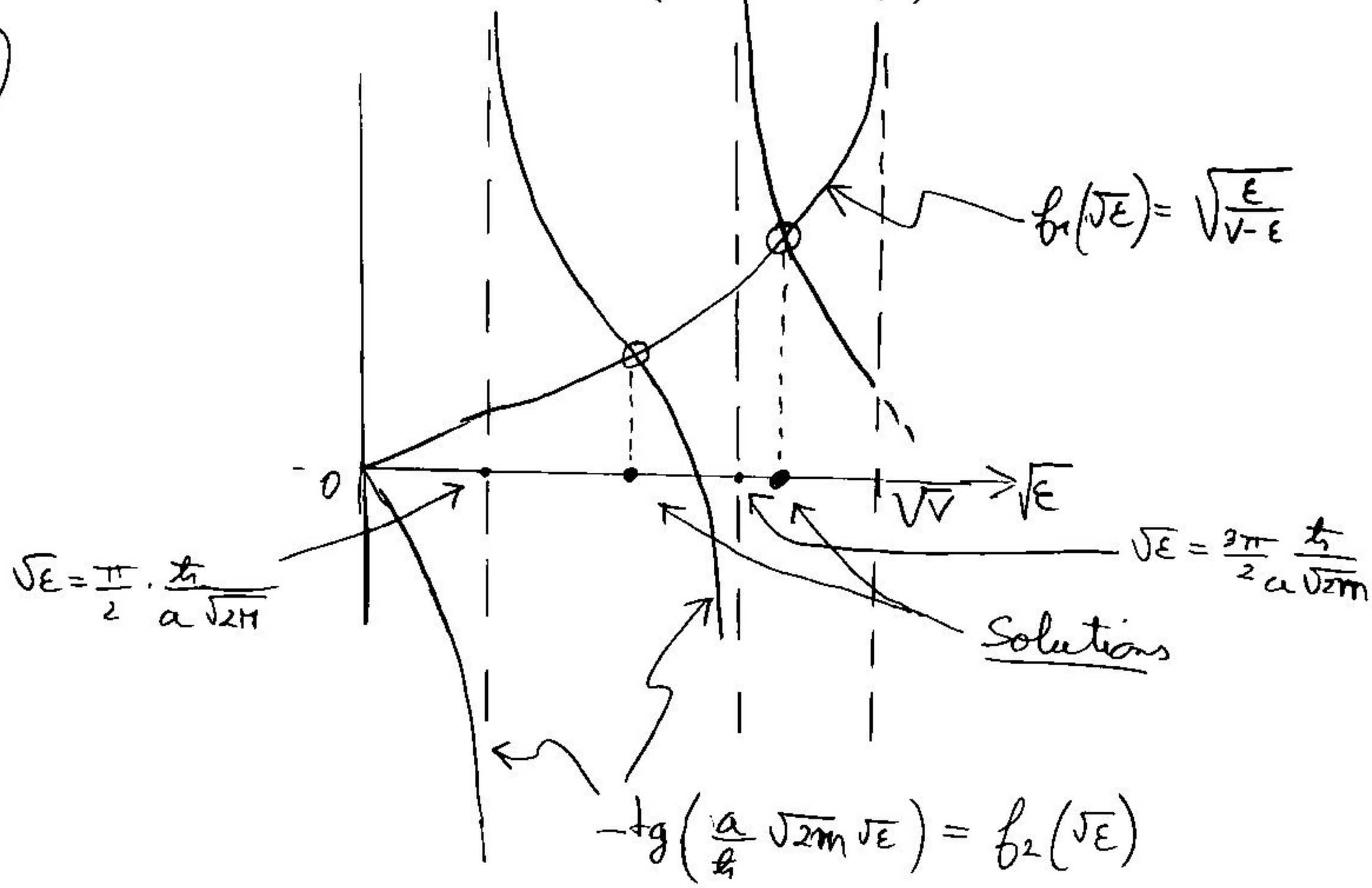
(2) $\psi_1'(a) = \psi_2'(a) \Longleftrightarrow kA \cos(ka) = -kB e^{-ka}$

donc $\frac{(1)}{(2)}$ donne : $\frac{1}{\kappa}\, tg(\kappa a) = -\frac{1}{k}$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\kappa}{k} = -tg(\kappa a)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{V-\varepsilon}} = -tg\left(\sqrt{2m\varepsilon}\cdot\frac{a}{\hbar}\right)$$

5



- D'après le graphe, il y a une seule solution ssi

$$\frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{a\sqrt{2m}} < \sqrt{V} < \frac{3\pi}{2}\frac{\hbar}{a\sqrt{2m}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{(\hbar c)^2}{a^2\, 2(mc^2)} < V < \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \frac{(\hbar c)^2}{a^2\, 2(mc^2)}$$

$m = \frac{M}{2}$: masse réduite

A.N. : $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{(200)^2\ \text{MeV}^2\,\text{fm}^2}{1\ \text{fm}^2 \cdot 940\ \text{MeV}} < V < \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \frac{(200)^2}{1 \cdot 940}$ MeV

$$\Longleftrightarrow \quad 165\ \text{MeV} < V < 945\ \text{MeV}$$

⑥ D'après ci-dessus

$$105 \text{ MeV} < V_1 + \frac{1}{4} V_2 < 945 \text{ MeV}$$: car 1 état pour $J = 1$

$$V_1 - \frac{3}{4} V_2 < 105 \text{ MeV}$$: car pas d'état lié pour $J = 0$

or $V_2 \ll V_1$ donc $V_1 \approx 105$ MeV

et $\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) V_2 = 2 V_2 \geqslant 2,2 \text{ MeV} = \Delta E$

$\longrightarrow V_2 \geqslant 4,4$ MeV

L'énergie de liaison ΔE est très faible devant $V_1 = 105$ MeV la profondeur du puits.

L'état est donc très peu lié.

⑦ • La force nucléaire est "invariante d'isospin", autrement dit, le potentiel serait le même pour un système proton - proton ou neutron - neutron

• D'après le principe de Pauli, le proton étant un fermion, le système à 2 proton doit être antisymétrique.

Comme l'état fondamental spatial est symétrique, l'état de spin doit être antisymétrique.

D'après les expressions obtenues en ②, c'est l'état $J=0$, qui est antisymétrique.

Mais $J=0$ n'a pas d'état lié, donc il n'existe pas d'état lié à 2 protons ou 2 neutrons.

Mesures successives

1. Pour $n = 1$, il y a un seul polariseur positionné à l'angle $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$,

$$\text{Proba} = |\cos(\alpha_1)|^2 = 0$$

le dispositif est opaque

pour $n = 2$, la proba de passer le premier polariseur est $p_1 = |\cos(\alpha_1)|^2 = \left|\cos\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)\right|^2 = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$

et de traverser le deuxième : $p_2 = |\cos(\alpha_2 - \alpha_1)|^2 = |\cos(\alpha_1)|^2 = \frac{1}{2}$

La probabilité de traverser le dispositif est

$$\text{Proba} = p_1 \cdot p_2 = p_1^2 = \frac{1}{4}$$

2. Pour n quelconque, il y a n polariseurs, faisant un angle $\alpha_1 = \frac{1}{n}\frac{\pi}{2}$ entre eux

La proba de passer le polariseur k est : $p_{k-1 \to k} = |\cos(\alpha_1)|^2$

indépt de k. $= \cos^2\left(\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}\right)$

La proba de traverser le dispositif est donc

$$\text{Proba} = (p)^n = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)^{2n}$$

Pour $n \gg 1$, $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\log(1+x) = x + o(x)$

$\exp(x) = 1 + x + o(x)$

donc $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 1 - \frac{\pi^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\text{Proba} = p^n = \left(1 - \frac{\pi^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{2n} = e^{2n \log\left(1 - \frac{\pi^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

$$\text{Prob} = \exp\left(2n\left(-\frac{\pi^2}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$