
Notes de cours sur la Mécanique quantique

Université Joseph Fourier, Grenoble ;

Master Physique M1

(version : 11 novembre 2015)

Frédéric Faure

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure>

Table des matières

0.0.1	Introduction	9
0.1	Rappels de mécanique classique	11
I	Les fondements	17
1	Une particule quantique sans spin, à 1 dimension (I)	19
1.1	Espace des états : les fonctions d'ondes	19
1.1.1	Espace vectoriel des fonctions d'ondes	19
1.1.2	Exemples importants	20
1.1.3	Le produit scalaire	23
1.1.4	Vecteur dual, espace dual	25
1.2	Opérateurs différentiels $\hat{x}, \hat{p}, \hat{H}$	26
1.2.1	Définitions	26
1.2.2	Opérateurs linéaires	27
1.2.3	Opérateurs adjoints et autoadjoints	28
1.3	Évolution d'un état quantique	30
1.3.1	L'équation d'évolution	30
1.3.2	Exemples d'évolutions d'ondes (images et films)	31
1.4	Bases, et changement de bases	41
1.4.1	Base orthonormée	41
1.4.2	Relation de fermeture	43
1.4.3	Expression d'un opérateur dans une base	44
1.4.4	Changement de base (*)	45
1.5	Spectre d'opérateurs	45
1.5.1	Définition et propriétés générales	45
1.5.2	Spectre de l'opérateur \hat{x} , "base de position"	48
1.5.3	Spectre de l'opérateur \hat{p} , "base d'impulsion"	51
1.5.4	Spectre de l'opérateur \hat{H} , base des états stationnaires	53
1.6	Spectre d'opérateur et résultat d'une mesure	57
1.6.1	Opération idéale de mesure d'un système quantique	57
1.6.2	Sur la difficulté d'interpréter la mécanique quantique	64
1.6.3	Valeurs moyenne et variance de l'observable	66
1.6.4	Relation d'incertitude et relations de commutation	70

1.7	Résumé du chapitre 1	72
1.7.1	Fonction d'onde	72
1.7.2	Evolution d'un état quantique $\psi_t(x)$	75
1.7.3	Signification probabiliste de la fonction d'onde $\psi(x)$	79
1.8	Conseils de Lecture	85
2	Une particule quantique sans spin à 1 dimension (II)	87
2.1	Interprétation des opérateurs $\hat{x}, \hat{p}, \hat{H}$ comme générateurs	87
2.1.1	\hat{H} génère les translations dans le temps	87
2.1.2	Groupe des translations des états quantiques en espace	92
2.1.3	Groupe des translations en impulsion (*)	94
2.1.4	Générateurs en mécanique classique (*)	95
2.1.5	Représentation de Heisenberg (*)	96
2.2	Le potentiel harmonique ; Spectre de \hat{H} et évolution	98
2.2.1	Importance du potentiel Harmonique en physique	98
2.2.2	Résolution algébrique du spectre	102
2.2.3	Application : Modèle d'Einstein (1907) sur la capacité calorifique des matériaux	110
2.2.4	Application : les modes quantiques du champ électromagnétique dans le vide.	112
2.2.5	Un effet surprenant du "vide quantique" de photons : la force de Casimir (1948)	118
2.2.6	(*) Les états cohérents et leur évolution par l'oscillateur harmonique	120
2.3	Correspondances classique-quantique à l'aide du paquet d'onde Gaussien .	130
2.3.1	Comptage semi-classique du nombre d'états. La loi de Weyl.	130
2.3.2	Applications	133
2.3.3	(*) Règle de quantification semi-classique de Bohr-Sommerfeld	136
2.3.4	(*) Représentation quantique dans l'espace de phase	139
2.4	Conseils de Lecture	143
3	Une particule à 3 dimensions sans spin	145
3.1	Une particule à 3 dimensions sans spin	145
3.1.1	Espace des états \mathcal{H}	145
3.1.2	L'espace \mathcal{H} comme produit tensoriel $\mathcal{H} = \mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_y \otimes \mathcal{H}_z$	146
3.1.3	(*) L'oscillateur Harmonique à 2 dimensions	149
3.2	Particule chargée dans un champ électromagnétique	149
3.2.1	Dynamique classique et invariance de Jauge	150
3.2.2	Équation de Schrödinger et invariance de Jauge Quantique	153
3.2.3	Effet Aharonov-Bohm	155
3.2.4	Interprétation géométrique de l'invariance de Jauge quantique, et autres théories de Jauges (*)	157
3.2.5	Remarque importante sur la nécessité d'une théorie quantique du champ électromagnétique	168

3.3	(*) Niveaux de Landau et spectre fractal de Hofstadter	169
3.4	Conseils de Lecture	171
4	Particule de spin 1/2	173
4.1	L'espace des états de spin	173
4.2	Rotation de 2π et 4π d'un spin	176
4.3	Générateurs des rotations et matrices de rotation	177
4.4	(*) Représentation de l'état de spin sur la sphère de Bloch	181
4.5	Groupe $SU(2)$ de rotation du spin, et relations de commutation	184
4.5.1	Non commutativité du groupe et relations de commutation	184
4.5.2	Rotation autour d'un axe \vec{u} quelconque	187
4.5.3	(*) Algèbre de Lie des rotations	188
4.5.4	(*) Groupe de Lie des rotations	188
4.5.5	(*) Représentation des opérateurs de rotation dans une base : groupe des matrices $SU(2)$	189
4.6	(*) Espace quantique total d'une particule à 3 dimensions avec spin 1/2 . .	190
4.6.1	Remarques	190
4.6.2	Une base de \mathcal{H}_{tot} et champ spinoriels	190
4.7	Autres degrés de liberté internes	191
4.8	Mesure de spin, application récente : la Cryptographie quantique	192
4.8.1	Cryptographie classique symétrique à clef secrète	192
4.8.2	Le protocole B.B.84 pour partager une clef secrète	193
4.9	Interaction du spin avec le champ électromagnétique	195
4.9.1	Cas de l'électron	195
4.9.2	Autres particules de spin 1/2	196
4.9.3	Évolution du spin seul, précession de Larmor	197
4.9.4	Résonance Magnétique Nucléaire (R.M.N.) et Imagerie Magnétique Résonante (I.R.M.)	199
4.10	Conseils de Lecture	202
5	Plusieurs particules	203
5.1	Plusieurs particules discernables	203
5.1.1	Pour deux particules	203
5.1.2	Opérateurs de \mathcal{H}_{total}	204
5.1.3	Pour N particules	204
5.2	Non localité de la mécanique quantique, le paradoxe E.P.R.	205
5.2.1	États enchevêtrés : états surprenants de l'espace total	205
5.2.2	Description quantique orthodoxe	205
5.2.3	Objection de Einstein-Podolsky-Rosen (E.P.R.) sur la non localité (1935)	208
5.2.4	Théories locales à variable cachées et inégalités de Bell (1964) . . .	209
5.2.5	Violation de l'inégalité par la mécanique quantique (1976)	210
5.2.6	Egalité de G.H.Z. (1989)	212

5.3	Plusieurs particules identiques	217
5.3.1	Deux particules identiques	217
5.3.2	Plusieurs particules identiques	220
5.4	Aperçu sur les particules élémentaires et forces élémentaires (*)	224
5.4.1	Liste des particules élémentaires	224
5.4.2	Les particules composées	226
II Outils et méthodes		229
6	Symétries et règles de conservation	231
6.1	Propriétés et méthodes de base	231
6.1.1	Spectre commun de deux opérateurs qui commutent	231
6.1.2	Application : recherche du spectre de \hat{H}	232
6.1.3	Loi de conservation et groupe de symétrie dynamique	233
6.1.4	Impulsion totale et conservation	236
6.2	Groupe de symétrie dynamique commutatif : électron dans un potentiel périodique cristallin, spectre en bandes.	238
6.2.1	Explication qualitative de la formation de bandes	239
6.2.2	Ondes de Bloch	240
6.3	Groupe non commutatif : les rotations et le moment angulaire	246
6.3.1	Générateurs du groupe de rotation dans $\mathcal{H}_{\text{espace}} = L^2(\mathbb{R}^3)$	247
6.3.2	Moment angulaire total et conservation	251
6.3.3	Espace de représentation réductible et irréductible d'un groupe	253
6.3.4	Espace de représentation irréductible d'un groupe commutatif	254
6.3.5	Espaces de représentation irréductibles des groupes de rotation SU(2) et SO(3)	254
6.3.6	Application : calcul du spectre du rotateur rigide	260
6.4	Importance des représentations irréductibles en physique	264
6.4.1	Propriétés fondamentales : le Lemme de Schur et le théorème de Wigner	266
6.4.2	Exemple : Spectre de l'atome d'hydrogène	269
6.5	Composition des moments angulaires	274
6.5.1	Particule composée de deux particules de spin 1/2	274
6.5.2	Résultat général sur la composition de deux moments cinétiques	279
6.5.3	Application : symétrie d'isospin, et sections efficaces de réactions hadroniques	282
6.5.4	Règles de sélection et théorème de Wigner-Eckardt	284
6.6	Symétries fondamentales en physique	286
7	Introduction à la théorie de la diffusion	289
7.1	Introduction	289
7.2	Amplitude de diffusion $f(k, \theta, \varphi)$	291
7.3	Approximation de Born	300

7.4	Opérateur de diffusion, la matrice \hat{S}	303
7.5	Théorie des ondes partielles pour les potentiels centraux	304
8	Méthodes d'approximation ; résolution approchée	309
8.1	Théorie des perturbations stationnaires	309
8.1.1	Cas de niveaux non dégénérés	311
8.1.2	Exemple : vibration anharmonique d'un atome	313
8.1.3	Cas de niveaux dégénérés	315
8.2	Théorie des perturbations dépendant du temps	317
8.2.1	Rappels sur l'approximation dipolaire électrique	317
8.2.2	Effet d'une onde cohérente ; transitions dans le spectre discret . . .	320
8.2.3	Effet d'une onde incohérente	326
8.2.4	Transition vers les continuum ; La photo-ionisation ; Effet photoélec- trique	328
8.3	Méthodes variationnelles	332
8.3.1	Méthode variationnelle pour problèmes stationnaires	332
III	Mécanique quantique avancée	337
9	Statistiques quantiques et décohérence	339
9.1	Description d'un ensemble statistique d'états quantiques par un opérateur densité	339
9.1.1	Définition de l'opérateur densité	339
9.1.2	Formulation du postulat de la mesure avec la matrice densité	344
9.1.3	Opérateur densité pour un système à deux états	344
9.1.4	Equation d'évolution	345
9.1.5	Entropie de l'ensemble statistique	346
9.2	Opérateur densité partielle pour un système composé	354
9.2.1	Rappels sur les systèmes composés	354
9.2.2	Décomposition de Schmidt	358
9.2.3	Un modèle simple de décohérence	359
A	Formules	361
A.1	Analyse et intégrales	361
A.1.1	Intégrales Gaussiennes	361
A.1.2	Transformée de Fourier	362
A.2	Algèbre	363
A.2.1	Séries	363
A.2.2	Diagonalisation d'une matrice 2×2	363
A.2.3	Relations de commutation	363
A.2.4	Algèbre des matrices de Pauli	364
A.2.5	Relations sur les matrices	364

A.2.6	Inverse d'une matrice 2×2	364
A.2.7	Relations de commutations	365
A.3	Calcul différentiel dans \mathbb{R}^3	365
A.3.1	Rappels sur le calcul différentiel vectoriel.	365
A.3.2	En coordonnées sphériques :	366
A.3.3	Relations	367
B	Solutions des exercices	369
B.1	Chapitre 1	369
B.2	Chapitre 2	370
B.3	Chapitre 3	380
B.4	Chapitre 4	382
B.5	Chapitre 7	384

Avertissement

Ces notes sont encore provisoires. Certains passages n'ont pas encore été relus correctement.

Les marques @@ signifie qu'il faut compléter ou revoir le passage.

Le signe (*), signifie que le passage peut être sauté en première lecture, et sera probablement sauté lors de l'exposé.

Merci de me communiquer toute remarque ou correction (d'orthographe, d'expression, ou sur le contenu physique ou mathématique). Les remarques d'ordre pédagogique seront particulièrement les bienvenues : commentaires sur la progression pédagogique, sur les passages plus ou moins faciles à assimiler, et plus ou moins appréciés.

Ces notes ont été rédigées en utilisant le logiciel libre et gratuit **LyX** sous **Linux**. Pour les graphiques, nous avons utilisé **xfig** ou **inkscape**. Pour les calculs numériques, nous avons utilisé entre autres la librairie graphique C++ **root**. Pour certains calculs symboliques, nous avons utilisé **xcas** (logiciel libre et gratuit).

0.0.1 Introduction

0.0.1.1 But et objets de la mécanique quantique :

Le rôle de la théorie quantique est de décrire le comportement et donner les lois d'évolution des constituants microscopiques de la matière. Plus précisément, les phénomènes quantiques (que sont essentiellement des "phénomènes d'interférences" présentés plus loin) se manifestent pour des objets de petite taille Δx et/ou de petites impulsions Δp telles que

$$\Delta x \Delta p \simeq h$$

avec la **constante de Planck** :¹

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$$

on utilise aussi la constante appelée "h barre" :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

La théorie quantique est donc essentielle en physique des particules, nucléaire, physique atomique, moléculaire et physique du solide. Par ailleurs, comme les phénomènes macroscopiques résultent du comportement collectifs des objets microscopiques, la théorie quantique a des conséquences indirectes mais essentielles à l'échelle macroscopique.

Ordres de grandeurs (tiré du cours de l'X sur le Web) :

1. Remarque sur les dimensions : d'après les relations, $p = m \frac{dx}{dt}$ et $E = \frac{p^2}{2m}$, on a $p dx = \dots = 2E dt$ et on déduit que $[x] [p]$ et $[E] [t]$ ont les même dimensions.

Système	Masse (kg)	Vitesse (m/s)	Ouverture a (m)	$p.a/h$
Homme passant une porte	70	1	1	10^{34}
Globule rouge dans capillaire	10^{-16}	10^{-1}	10^{-4}	10^{11}
Electron à travers une fente	$9 \cdot 10^{-31}$	700	10^{-6}	1

0.0.1.2 Différences et relations entre mécanique classique et mécanique quantique

- Le changement radical entre la mécanique quantique et la mécanique classique est essentiellement que en mécanique classique une particule est un **objet ponctuel** décrit par un point (\vec{x}, \vec{p}) dans l'espace des phases (position - vitesse), alors que en mécanique quantique, une particule est un **objet étendu**, décrit par une fonction d'onde $\psi(\vec{x})$. Une conséquence est la possibilité d'interférences. Le rôle de la mécanique est de donner les lois qui gouvernent l'évolution de ces objets. Ce sont les **équations de Hamilton** (ou Newton) dans le cas classique et l'**équation de Schrödinger** dans le cas quantique.
- La théorie quantique est valable pour des constituants élémentaires ou pour une assemblée de quelques constituants (atomes molécules) tant qu'il sont parfaitement "isolés" de leur environnement. Ici le mot "**isolé**" signifie précisément que le système étudié ne modifie pas son environnement au sens où il ne change pas l'état quantique de l'environnement de façon "significative". Voir discussion précise à la section 1.6.1 page 57. On ne peut pas parler de la fonction d'onde d'une balle ou même d'une poussière qui sont des objets non isolés. En principe une théorie complète devrait pouvoir décrire toutes les échelles de la nature. A l'heure actuelle on ne sait pas rendre compatible de façon totalement satisfaisante, la théorie quantique avec l'aspect "classique" de la nature à l'échelle macroscopique. Cela est discuté depuis longtemps, voir le paradoxe du chat de Schrödinger. Voir par exemple [Cla88],[Har02],[DEC⁺96] pour les développements récents à ce sujet.
- Si le système étudié n'est pas isolé et influence un système extérieur, il est nécessaire d'inclure ce système extérieur dans la description quantique. Cette affirmation sera justifiée page 168. Sinon, on peut se contenter d'une description classique du système extérieur.

0.0.1.3 Place de la théorie quantique en physique :

On oppose :

théorie Classique et théorie Quantique.

Théorie non relativiste, relativiste et relativité générale (où l'énergie et la matière influencent la courbure de l'espace temps) ;

Cela donne le tableau suivant :

(A droite et en dessous, se trouve chaque fois une théorie supposée plus générale que la précédente.)

Mécanique :	Classique	Quantique
Non relativiste	Mécanique de Newton (1687)	Mécanique quantique(1925)
Relativiste	Relativité restreinte (1905) Equations de Maxwell (1865)	Théorie Quantique des champs (≥ 1930)
Relativité Générale	Relativité générale (1916)	... ?théorie des cordes ?...

0.0.1.4 Autres remarques

- Esprit du cours : introduction à la mécanique quantique ; présentation à travers des exemples physiques autant que possible. Les notions mathématiques ne sont introduites que lorsque elles sont jugées nécessaires.

0.0.1.5 Prérequis supposés

- En mathématiques : notion d'espace vectoriel, de transformée de Fourier.
- En physique : mécanique analytique, Hamiltonienne. Voir [Fau10c] ou Section 0.1.
- En mécanique quantique : problèmes 1D stationnaire,...

0.0.1.6 Références conseillées :

on insiste sur l'importance de travailler le cours avec des livres.

Livres en français : Cohen [CBF], Feynmann[Fey63], Messiah [Mes64], Basvedant [Bas86].

Livres en anglais :

- Bransden[BC89], et plus difficiles : Sakurai[J.J85], Ballentine[L.E90].

Aspects mathématiques :

- Gustavson [SI00], et plus avancés : [Tay96a], [RS72].

0.1 Rappels de mécanique classique

La théorie de la mécanique quantique a été découverte par Heisenberg, Schrödinger et d'autres au début du XXème siècle. Elle décrit la matière par des "ondes de matière" qui évoluent selon l'équation de Schrödinger. Ces ondes ont une signification probabiliste en physique. Avant, les constituants de la matière étaient décrit par les équations de la "mécanique classique" (Newton 1686, Hamilton 1833) qui sont des lois déterministes pour les trajectoires des particules. Nous rappelons quelques aspects de la mécanique classique dans cette Section. A la Section 1 suivante on expliquera le passage entre les descriptions classique

et quantique en terme de paquet d'onde, assimilable à une particule et avec le "principe de correspondance" (qui se formalise avec le théorème d'Egorov).

On appelle **mécanique classique**, les lois fondamentales de la physique en générale antérieures à la mécanique quantique mais plus précisément les lois « non quantiques ». On discutera de cette distinction précisément plus loin. En mécanique classique il y a :

- Les loi de Newton et de Hamilton : elles définissent les équations du mouvement pour les éléments de matière ou particules élémentaires soumises à différentes forces.
- Les lois de Maxwell : elles décrivent l'évolution des champs électromagnétiques et les forces qu'ils exercent sur la matière chargée.

Ensuite, avec la physique statistique (qui contient la thermodynamique), à partir de ces lois fondamentales, on peut décrire les « milieux continus » comme les gaz, les fluides, les matériaux, les plasmas etc..

La théorie de la relativité d'Einstein (relativité restreinte en 1906 puis relativité générale 1916) est considérée aussi comme une théorie de la mécanique classique (car non quantique). Elle propose un nouveau cadre théorique plus géométrique dans l'espace-temps pour formuler les équations de mouvement de la matière et des champs électromagnétiques.

0.1.0.7 Équations de mouvement :

Notons $x(t) \in \mathbb{R}^d$ la **position d'une particule** à l'instant $t \in \mathbb{R}$. (il est habituel de considérer les dimensions d'espaces $d = 1, 2, 3$). La fonction $t \in \mathbb{R} \rightarrow x(t) \in \mathbb{R}^d$ s'appelle la **trajectoire de la particule**.

Définition 0.1.1. « Loi de Newton 1687 ». La trajectoire d'une particule de masse $m > 0$ et soumise à une **force** $F(x, t) \in \mathbb{R}^d$ est déterminée par l'équation différentielle ordinaire :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, t) \quad (0.1.1)$$

avec la donnée des conditions initiales de position $x(0)$, et vitesse $\frac{dx}{dt}(0)$.

Il est préférable de transformer l'équation du deuxième ordre en équation du premier ordre. Avec l'hypothèse de force potentielle, cela donne les équations de Hamilton :

Définition 0.1.2. On supposera que $F(x, t)$ est une **force potentielle** c'est à dire qu'elle peut s'écrire sous la forme particulière² :

$$F = - \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d} \right) =: - \frac{\partial V}{\partial x} \quad (0.1.2)$$

2. Localement il est nécessaire et suffisant que $\text{rot}(F) = 0$

avec une fonction $V(x, t) \in \mathbb{R}$ appelée **énergie potentielle**. Posons l'**impulsion** :

$$p := m \frac{dx}{dt} \in \mathbb{R}^d \quad (0.1.3)$$

et introduisons la fonction réelle suivante, appelée **Hamiltonien** (ou énergie totale)

$$H(x, p, t) := \frac{1}{2m} |p|^2 + V(x, t) \in \mathbb{R} \quad (0.1.4)$$

(Le premier terme $\frac{1}{2m} |p|^2 = \frac{1}{2} m \left| \frac{dx}{dt} \right|^2$ s'appelle l'**énergie cinétique**).

Proposition 0.1.3. « *Équations de Hamilton 1833* » Les équations de Newton (0.1.1) peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp(t)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (0.1.5)$$

déterminant un champ de vecteur $\mathcal{V} := \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial x} \right)$ sur l'**espace des phases** $(x, p) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ (figure 0.1.1).

Démonstration. On calcule

$$\frac{\partial H}{\partial p} \stackrel{(0.1.4)}{=} \frac{1}{m} p \stackrel{(0.1.3)}{=} \frac{dx}{dt}$$

et

$$-\frac{\partial H}{\partial x} \stackrel{(0.1.4)}{=} -\frac{\partial V}{\partial x} \stackrel{(0.1.2)}{=} F \stackrel{(0.1.1)}{=} m \frac{d^2x}{dt^2} \stackrel{(0.1.3)}{=} \frac{dp}{dt}$$

□

Remarque 0.1.4. L'aspect antisymétrique assez particulier des équations de Hamilton (0.1.5) laisse déjà entrevoir d'une certaine façon la mécanique quantique ondulatoire. En 1833 Hamilton a utilisé au départ ces équations pour exprimer l'optique géométrique des rayons qui n'est qu'une approximation de l'optique ondulatoire [GS90]. Nous verrons de façon analogue que la mécanique classique est une approximation de la mécanique quantique ondulatoire.

0.1.0.8 Exemples

Il faut savoir que pour les problèmes à un degré de liberté, $d = 1$ (donc l'espace des phases est $(x, p) \in \mathbb{R}^2$ de dimension 2), et $H(x, p)$ indépendant de t , alors les équations du mouvement sont solubles. En dimension plus grande elles ne le sont pas en général, sauf exceptions comme le problème à deux corps qui est soluble car il se ramène en fait à un problème à un degré de liberté. Plus généralement ces problèmes solubles sont appelés **systèmes intégrables** [Arn76]. L'étude du chaos déterministe est consacrée au contraire à l'étude des problèmes parmi les « plus simples » qui ne sont pas solubles.

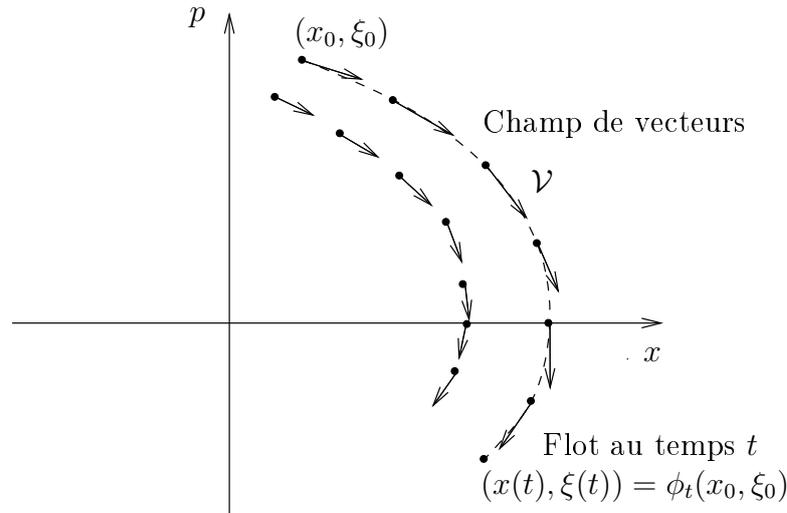


FIGURE 0.1.1 – Champ de vecteurs de Hamilton \mathcal{V} et flot Hamiltonien ϕ_t dans l'espace des phases.

Exemple 0.1.5. « Le problème à deux corps » C'est un système intégrable d'importance historique car c'est par lui que Newton a écrit (0.1.1) en 1687. A l'échelle du système solaire, on peut considérer la Terre comme un point de masse $m = 6.10^{24}\text{kg}$ à la position $x \in \mathbb{R}^3$ soumise à la force d'attraction gravitationnelle de la part du soleil (situé en $x = 0$) :

$$F(x) = -C \frac{u}{|x|^2}$$

avec $u = \frac{x}{|x|}$ vecteur unitaire et $C = \mathcal{G} \cdot m \cdot m_S$ avec la masse du soleil $m_S = 2.10^{30}\text{kg}$ et la constante de gravitation universelle $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$. Cette force dérive de l'énergie potentielle

$$V(x) = -C \frac{1}{|x|}. \quad (0.1.6)$$

L'équation du mouvement obtenue est $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}F(x) = -\mathcal{G} \cdot m_S \frac{u}{|x|^2}$. Remarquer que curieusement la masse de la Terre n'y intervient pas. Cela signifie que par exemple une poussière (ayant une autre masse) qui serait à la place de la Terre (même position et même vitesse) aurait la même trajectoire autour du Soleil. Cette remarque appelée « **principe d'équivalence** » a conduit Einstein à la théorie de la relativité où la gravitation n'est plus une force mais découle de la géométrie de l'espace temps.

De façon analogue mais à une toute autre échelle, dans un atome d'hydrogène, un électron de masse $m = 9,31.10^{-31}\text{kg}$ est soumis à la « force de Coulomb » de la part du proton

$$F(x) = -C' \frac{u}{|x|^2}, \quad V(x) = -C' \frac{1}{|x|}$$

avec $C' = k_C q \cdot q$ où $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ est la charge élémentaire de l'électron et du proton et $k_C = 9 \cdot 10^9 \text{Nm}^2 \text{C}^{-2}$ est la constante de Coulomb.

Dans ces deux problèmes, grâce à la forme particulière de $V(x)$, on peut résoudre exactement les équations du mouvement et obtenir que les trajectoires de la planète (respect. de l'électron) sont des ellipses (ou paraboles ou hyperboles selon la condition initiale) [Arn76].

Exemple 0.1.6. « Puits de potentiel, oscillateur Harmonique ». A une dimension $d = 1$ on s'intéresse à une particule près d'un minimum local de l'énergie potentielle $V(x)$ que l'on suppose en $x = 0$ avec $V(0) = 0$. Par développement de Taylor, on écrit :

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 + O(x^3)$$

avec $k = \frac{d^2 V}{dx^2}(0) > 0$. En ne gardant que ce premier terme (comme première approximation) le Hamiltonien s'écrit :

$$H(x, p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad (0.1.7)$$

et s'appelle le modèle de l'**oscillateur harmonique**. Les trajectoires sont des ellipses dans l'espace des phases³, voir figure 0.1.2.

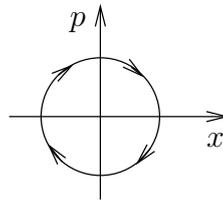


FIGURE 0.1.2 – Une trajectoire de l'oscillateur harmonique dans l'espace des phases. La position $x(t)$ et la vitesse $v(t) = \frac{1}{m} p(t)$ oscillent en quadrature.

3. Avec le changement de variables $X := \sqrt{\frac{k}{2}} x, Y := \frac{p}{\sqrt{2m}}$ et posant $\omega := \sqrt{\frac{k}{m}}, Z = X + iY$, (0.1.5) donne l'équation de mouvement $\frac{dZ}{dt} = -i\omega Z$ qui donne le mouvement de rotation $Z(t) = Z(0) e^{-i\omega t}$.

Index

- adjoint**, 28
- algèbre de l'oscillateur Harmonique, 127
- algèbre de Lie complexifiée, 103
- algèbre de Lie d'opérateurs, 103
- algèbre de Lie de l'oscillateur Harmonique, 102
- algèbre de Weyl-Heisenberg, 124
- analyse micro locale, 76
- analyse semi classique, 76
- approximation harmonique, 99
- approximation linéaire, 99
- autoadjoint**, 29

- base d'énergie, 63
- base de Fourier, 43, 52
- base de position, 50, 63
- base orthonormée, 41
- Bohr-Sommerfeld, 138
- boost, 94
- bra, 74
- bra**, 25

- capacité calorifique des matériaux, 110
- catastrophe infra-rouge, 117
- catastrophe ultraviolette, 117
- cellule de Planck, 130
- changement de Jauge, 153
- changement de référentiel Galiléen, 94
- choix d'une Jauge, 162
- Chromo-dynamique, 166
- Classique, 10
- collapse, 340
- collapse de la fonction d'onde, 80, 84
- commutateur, 70
- condition de Laue, 302
- connexion sur un fibré vectoriel, 157

- constante de Planck, 72
- corps noir, 133
- corrélées, 148
- courbure de la connexion, 161

- degré de liberté spatial, 146
- degrés de liberté, 112
- densité d'état, 56
- densité de niveaux, 132
- densité de probabilité, 61, 63, 84
- diffusion isotrope, 305
- diffusion s, 305
- dimension finie, 41
- dimension infinie, 41
- dispersion**, 31
- distribution de Bargmann, 141
- distribution de Dirac, 50, 74
- distribution de Husimi, 141
- domaine de définition d'opérateur**, 27
- double fentes de Young, 58
- double puits de potentiel, 38
- dualité onde-corpuscule, 79
- dé-corrélés, 149
- décomposition de Cartan, 104
- dégénérescence, 47
- dégénérée, 55
- dérivée covariante, 153, 158
- détecteur, 83

- E.D.P., 75
- Effet Aharonov-Bohm, 155
- effet photo-électrique, 115
- ensemble statistique d'états, 341
- entropie de Shannon, 349
- entropie statistique, 132
- environnement, 57

- espace bosonique, 223
- espace de Hilbert, 74
- espace de Hilbert**, 24
- espace des phases, 13
- espace des phases**, 31
- espace dual, 25
- espace fermionique, 223
- espace produit tensoriel, 146, 148
- espace propre, 47, 81
- espace quantique du spin, 175
- espace somme directe, 148
- espace vectoriel, 72
- espace vectoriel**, 20
- espace vectoriel complexe, 20
- espace vectoriel réel, 20
- espaces de Sobolev**, 25
- Everett, 66

- facteur gyromagnétique de l'électron, 117
- fentes de Young, 155
- fibré vectoriel, 157
- fil quantique, 25, 42
- fonction d'onde, 72
- fonction d'onde**, 19
- fonction de Dirac, 49
- fonction de Hermite, 105
- fonction de partition, 352
- fonctions d'Hermite, 105
- force, 12
- force de Casimir, 118
- force de Lorentz, 151
- force nucléaire faible, 166
- force nucléaire forte, 166
- force potentielle, 12
- forme linéaire**, 25
- formule de Gutzwiller, 139
- formule de transport, 298
- formule des traces semi-classique, 139
- fréquence de Bohr**, 321

- gaz de photons, 133
- gluons, 166
- gravitation, 168

- group, 90
- groupe**, 20
- groupe commutatif**, 20
- groupe de l'oscillateur Harmonique, 127
- groupe de Lie de dimension 1, 90
- groupe de Weyl-Heisenberg, 125
- Groupes de Lie, 90
- générateur, 88, 90
- géométrie différentielle, 156

- Hamilton**, 10
- Hamiltonien, 13, 26
- harmonique, 99
- hasard quantique, 84
- hermitique**, 29
- holonomie, 161

- impulsion, 13, 72
- incertitude, 67
- intégration par partie, 29
- Invariance de Jauge classique, 153
- Invariance de Jauge quantique, 154
- inégalité de Cauchy-Schwartz, 74
- inégalité de Heisenberg, 71
- inégalité de Schwartz, 71
- isolé, 57
- isolée, 19
- isomorphisme de Riesz**, 25

- ket, 72
- ket**, 20

- l'écart type, 67
- Laser, 115
- Le problème à deux corps, 14
- lemme de Poincaré, 156
- Limite classique-quantique, 64
- localisation forte de Anderson, 56
- loi (faible) des grands nombre, 350
- loi de Boltzmann, 110
- Loi de Newton, 12
- loi de Planck, 133
- loi de probabilité, 346
- Loi de Thomas Fermi, 130

- Loi de Weyl, 130
 Lorentzienne, 50
- Many world interpretation, 66
 matrice densité, 341
 matrices de Pauli, 179
 Modèle d'Einstein, 110
 modèle de Debye, 112
 modèle standard de la physique des particules, 101
 moment d'ordre n , 69
 moyenne expérimentale, 84
 moyenne statistique, 84
 multiplicité, 47, 55
 mécanique classique, 12
 mécanique quantique, 72
- nabla, 146
 niveaux d'énergie, 77
 normalisation, 46
normalisé, 24
 normalisée, 74
 norme, 23, 73
 Notation de Dirac, 28
notation de Dirac, 20
 noyau de Schwartz, 51
- observable, 59, 83, 90
 observables, 81
 onde plane, 51, 72
onde plane, 21
 onde stationnaire, 54, 76
 ondes sismiques, 135
opérateur, 26
opérateur adjoint, 28
 opérateur autoadjoint, 46
 Opérateur d'impulsion, 26
 opérateur d'évolution, 88
 Opérateur de position, 26
 opérateur de spin, 178
 opérateur de translation, 92
 opérateur densité, 341
 opérateur densité partiel, 356
 opérateur identité, 27
 opérateur impulsion, 93
opérateur linéaire, 27
 opérateur partiel, 355
 opérateur positif, 343
 opérateur rotation, 149
 opérateurs d'échelle, 106
 Opérateurs de création et d'annihilation, 103
 opérateurs de création et d'annihilation, 106
opérateurs différentiels, 27
 opérateurs vectoriels, 145
orthogonales, 23
 oscillateur harmonique, 15, 32, 98
- paquet d'onde Gaussien, 73
paquet d'onde Gaussien, 21
 particule, 19, 72
 particule libre, 54
 phonons, 101
 photon, 101
 photons, 115
 polarisation, 345
 polynôme d'Hermite, 105
 position d'une particule, 12
 postulat de la mesure, 58
postulat de la mesure, 80
 potentiel Harmonique, 98
 potentiel quadratique, 54
 potentiel scalaire, 150
 potentiel vecteur, 150
 principe d'équivalence, 14
 principe de correspondance, 76, 150
 principe de superposition, 76
principe de superposition, 30
 probabilité, 84
 problème inverse, 302
 produit scalaire, 73
produit scalaire, 23
produit scalaire de Hilbert-Schmidt, 27
 produit tensoriel, 146
 projecteur orthogonal, 44
 projecteur spectral, 59
 propagateur, 88

- Quantification du champ électromagnétique, 114
 quantification géométrique, 139
 Quantique, 10
 quarks, 166
- rang de Schmidt, 358
 rayonnement du corps noir, 115
 relation d'incertitude, 71
 Relation d'incertitude temps-énergie, 91
 relation de fermeture, 82
 relation de Parseval, 53
 relation de polarisation, 89
 relativiste, 10
 relativité générale, 12
 relativité restreinte, 12
 renormalisation, 117
 représentation dans l'espace de phase, 139
 représentation de Heisenberg, 96
 représentation de Husimi, 32, 139
 représentation de Schrödinger, 96
 représentation en impulsion, 52
 représentation en position, 50
 règle de Leibnitz, 163
 règle de quantification, 138
 réduction de l'état quantique, 340
 réduction du paquet d'onde, 63, 80, 84
 réduction symplectique, 238
- section de l'espace fibré, 159
 simplement connexe, 156
 spectre, 45
 spectre continu, 49
 spectre du corps noir, 133
 spectre ponctuel, 56
 sphère d'Ewald, 302
 symbole de l'opérateur, 97
 systèmes intégrables, 13
- temps de décohérence, 63
 température d'Einstein, 110
 théorie de Jauge, 156, 157
 théorie de Jauge électro-faible, 157
 théorie des connections sur fibrés vectoriels, 156
 théorie des distributions, 50
 théorie du champ moyen, 333
 théorème d'Erhenfest, 70
 Théorème de Wigner-Eckardt, 286
 trace partielle, 355
 trajectoire de la particule, 12
 transformation active, 149
 transformation infinitésimale, 91
 transformation passive, 149
 transformée de Fourier, 52, 79
 trivialisatation du fibré, 162
- unitaire, 89
- valeur moyenne, 67, 81
 valeur propre, 45
 valeur propre simple, 47
 variance, 67
 vecteur colonne, 42
vecteur dual, 25
 vecteur dual métrique, 74
 vecteur propre, 45
- xcas, 105
- Équations de Hamilton, 13
- élément du groupe, 90
 éléments de matrice, 44
 énergie cinétique, 13
 énergie noire, 117
 énergie potentielle, 13
 équation de Liouville quantique, 345
 équation de Schrödinger, 72, 75
équation de Schrödinger, 10, 30
 équation de Schrödinger stationnaire, 53, 76
 équation linéaire aux dérivées partielles, 75
 équations de Maxwell, 112
 état cohérent, 123
 état cohérent du champ, 115
 état de position, 74
 état fondamental, 77

état non polarisé, 345
état physique, 62
état pur, 341
état quantique, 341
état quasi-classique, 73
état stationnaire, 54
états physiques, 74
évolution temporelle, 30

Bibliographie

- [ADR82] A. Aspect, Dalibard J., and Roger G. Experimental tests of Bell's inequalities using time-varying analysers. *Physical Review Letters*, 49 :1804–1807, 1982.
- [AM76] Neil W. Ashcroft and D. N. Mermin. *Solid State Physics*. Brooks Cole, January 1976.
- [Arn76] V.I. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Ed. Mir. Moscou, 1976.
- [Asp76] A Aspect. Proposed experiment to test the non-separability of quantum mechanics. *Physical review D*, 14 :1944–1951, 1976.
- [B.] Parisse B. *Logiciel libre de calcul formel*. Taper xcas dans google.
- [Bac] H. Bacry. *Lessons on group theory*.
- [Bas86] J.L. Basvedant. *Mécanique quantique*. Ellipses, 1986.
- [BC89] B.H. Bransden and C.J. Joachain. *Introduction to quantum mechanics*. Longman, 1989.
- [Bel64] Bell J. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, 1 :195–200, 1964.
- [BPLB13] R. Bach, D. Pope, SH. Liou, and H. Batelaan. Controlled double-slit electron diffraction. *New Journal of Physics*, 15(3) :033018, 2013.
- [CB73] Y. Choquet-Bruhat. *Distributions : théorie et problèmes*. 1973.
- [CBF] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique*.
- [Cla88] Claude Cohen-Tannoudji. *Cours 1988-89-90 : Cohérences quantiques et dissipation*. Cours de Claude Cohen-Tannoudji au Collège de France. http://www.lkb.ens.fr/users/laloe/public_html/PHYS/cours/college-de-france/, 1988.
- [CTDRG87] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons et atomes*. 1987.
- [CTDRG88] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Processus d'interaction entre photons et atomes*. ..., 1988.
- [DEC+96] D. Giulini, E. Joos, C. Kiefer, J. Kupsch, I.O. Stamatescu, and H.D. Zeh. *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Springer-Verlag, 1996.

- [DGLR89] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer, and B. Roulet. *Physique statistique*. 1989.
- [DM02] Dietrich Dehlinger and M. W. Mitchell. Entangled photon apparatus for the undergraduate laboratory. *American Journal of Physics*, 70 :898–902, 2002.
- [EN99] K.J. Engel and R. Nagel. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, volume 194. Springer, 1999.
- [EN06] K.J. Engel and R. Nagel. *A short course on operator semigroups*. Springer, 2006.
- [F. 00] F. Faure. Exposés sur la quantification géométrique. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure>, pages 1–12, 2000.
- [Faua] F. Faure. *Cours de Mécanique quantique pour Master M1 de physique*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement>.
- [Faub] F. Faure. Films d’animations d’ondes quantiques. http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/meca_q/animations.
- [Fau10a] F. Faure. *Cours de géométrie et topologie pour la physique pour Master M2 de physique*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement>, 2010.
- [Fau10b] F. Faure. *Cours de Mathématiques pour la physique. Niveau Master 1*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement>, 2010.
- [Fau10c] F. Faure. *Cours de Mécanique Analytique pour Licence L3 de physique*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement>, 2010.
- [Fey63] R. Feynman. *Le cours de physique de Feynman, Mécanique quantique*. 1963.
- [GS90] V. Guillemin and S. Sternberg. *Geometric asymptotics*. Amer Mathematical Society, 1990.
- [Gut91] M. Gutzwiller. *Chaos in classical and quantum mechanics*. Springer-Verlag, 1991.
- [Har02] S. Haroche. *Cours de mécanique quantique*. <http://...>, 2002.
- [HB] Michel Hulin and Odile Betbeder. *Théorie des groupes appliquée à la physique*.
- [HTS⁺01] R. Hennino, N. Tregoures, M Shapiro, L. Margerin, M Campillo, B. van Tiggelen, and R. Weaver. Observation of equipartition of seismic waves. *Phys. Rev. Letters*, 86 :3447–3450, 2001.
- [Jac75] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, 1975.
- [J.J85] J.J. Sakurai. *Modern Quantum mechanics*. Benjamin Cummings Publishing Company, 1985.
- [L.E90] L.E. Ballentine. *Quantum Mechanics*. 1990.
- [LGA] J. Leys, E. Ghys, and A. Alvarez. *Dimension. Videos*. <http://www.dimensions-math.org>.
- [IS02] Dossier Pour la Science. *L’art du Secret. La cryptographie*. Dossier hors Série, juillet/oct 2002.

- [Mar02] A. Martinez. *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*. Universitext. New York, NY : Springer, 2002.
- [Mel95] Richard B. Melrose. *Geometric scattering theory*. Stanford Lectures. <http://www-math.mit.edu/~rbm/book.html>, 1995.
- [Mes64] A. Messiah. *mécanique quantique*. 1964.
- [Mil94] P. Milonni. *The Quantum Vacuum, an introduction to quantum electrodynamics*. Academic Press, 1994.
- [MR90] Philippe Martin and Francis Rothen. *Problèmes \tilde{A} N -corps et champs quantiques*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes (PPUR), 1990.
- [Nak03] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.
- [NGWH01] Nicolas Gisin, Grégoire Ribordy, Wolfgang Tittel, and Hugo Zbinden. Quantum Cryptography. *to appear in Reviews of Modern Physics, e-print : quant-ph/0101098*, 2001.
- [Omn00] R. Omnes. *Comprendre la mécanique quantique*. EDP Sciences, 2000.
- [Paz83] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 198. Springer New York, 1983.
- [Per86] A. Perelomov. *Generalized coherent states and their applications*. Springer-Verlag., 1986.
- [PRK95] G. Papanicolaou, L. Ryzhik, and J. Keller. Stability of the p to s energy ratio in the diffusive regime. 1995.
- [Roo06] Borwein Choi Rooney. *The Riemann hypothesis*. Springer, 2006.
- [RS72] M. Reed and B. Simon. *Mathematical methods in physics, vol I : Functional Analysis*. Academic press, New York, 1972.
- [Sak67] J.J. Sakurai. *Advanced quantum mechanics*. 1967.
- [Sch66] L. Schwartz. *Theorie des distributions*. 1966.
- [Seg95] C. Segal. *Lectures on Lie groups and Lie Algebras*. 1995.
- [SI00] Gustafson S. and Sigal I. *Mathematical concepts of quantum mechanics*. Springer, 2000.
- [Ste94] S. Sternberg. *Group theory and physics*. Cambridge University Press, 1994.
- [Tay96a] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol I*. Springer, 1996.
- [Tay96b] M. Taylor. *Partial differential equations, Vol II*. Springer, 1996.
- [WDG90] W. M. Zhang, D. H. Feng, and R. Gilmore. Coherent states : theory and some applications. *Rev. Mod. Phys.*, 62 :867, 1990.
- [Woo92] N.M.J. Woodhouse. *Geometric quantization*. Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [YCB82] M. Dillard-Bleick Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette. *Analysis, manifolds and physics*. North-Holland, 1982.

- [Zur91] W.H. Zureck. *Phys. Today*, 44 :36, 1991.
- [Zwo12] M. Zworski. *Semiclassical Analysis*. Graduate Studies in Mathematics Series. Amer Mathematical Society, 2012.

#script qui selectionne les chapitres pour faire des fichiers pdf individuels.

```
pdftk cours.pdf cat 1-15 387-end output cours_intro.pdf
pdftk cours.pdf cat 19-85 output cours_chap1.pdf
pdftk cours.pdf cat 87-144 output cours_chap2.pdf
pdftk cours.pdf cat 145-171 output cours_chap3.pdf
pdftk cours.pdf cat 173-202 output cours_chap4.pdf
pdftk cours.pdf cat 203-227 output cours_chap5.pdf
pdftk cours.pdf cat 231-287 output cours_chap6.pdf
pdftk cours.pdf cat 289-307 output cours_chap7.pdf
pdftk cours.pdf cat 309-335 output cours_chap8.pdf
pdftk cours.pdf cat 339-359 output cours_chap9.pdf
pdftk cours.pdf cat 361-367 output cours_annexe.pdf
pdftk cours.pdf cat 369-386 output cours_solutions.pdf
pdftk cours.pdf cat 1-367 387-end output cours_complet_sans_solutions.pdf
```