Annexe A

Formules

A.1 Analyse et intégrales

A.1.1 Intégrales Gaussiennes

Formule 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-X^2\right) dX = \sqrt{\pi} \tag{A.1.1}$$

Démonstration. Soit $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Alors

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dxdy\right) \\ &= \int_0^{\infty} drr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2} = 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2} dr = 2\pi \left(\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}\right) = \pi \end{aligned}$$

donc $I = \sqrt{\pi}$. □

Formule 2 Soit

$$Q(x) = Ax^2 + Bx + C$$
$$A, B, C \in \mathbb{C} \quad \text{et } \Re(A) > 0 \text{ pour la convergence.}$$

Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-Q(x)\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \exp\left(-C + \frac{B^2}{4A}\right) \tag{A.1.2}$$

Preuve : @@

Formule 3. Pour $n \geq 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

où

$$(2n-1)!! := (2n-1)(2n-3)\dots 5.3.1 == \frac{(2n)!}{2^n (n!)}$$

appelée **double factorielle**. (par symétrie, pour une puissance impaire $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = 0$).

Démonstration. Il faut dériver la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ par rapport à α et faire $\alpha = 1$ à la fin : soit

$$I_\alpha := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

On a

$$\frac{d^n I_\alpha}{d\alpha^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{-1}{2}\right) \left(\frac{-3}{2}\right) \dots \left(-\frac{2n-1}{2}\right)$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n-1)!!}{2^n}$$

□

A.1.2 Transformée de Fourier

Dans $\mathbb{R}^3$, on a la fonction de Green de la particule libre :

$$\langle x| \frac{1}{-\Delta + k^2} |y\rangle = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi |x-y|} \tag{A.1.3}$$

Démonstration. On pose $k = i\kappa \in i\mathbb{R}$. Utilisant la relation de fermeture en base d'impulsion (et $\hbar = 1$),

$$\begin{aligned} \langle x| \frac{1}{-\Delta + k^2} |y\rangle &= \int d^3\vec{p} \langle x|p\rangle \langle p|y\rangle \frac{1}{(p^2 + \kappa^2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} e^{i\vec{p}.(x-y)} \frac{1}{(p^2 + \kappa^2)} \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, on passe en coordonnées sphériques et utilise la formule des résidus pour obtenir

$$\langle x| \frac{1}{-\Delta + k^2} |y\rangle = \frac{e^{-\kappa|x-y|}}{4\pi |x-y|} = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi |x-y|}$$

□

A.2 Algèbre

A.2.1 Séries

Série arithmétique et géométrique @@

A.2.2 Diagonalisation d'une matrice 2×2

Formule générale : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Soit

$$\Delta = (a-d)^2 + 4bc.$$

Si $\Delta \neq 0$ alors la matrice A se diagonalise[1] :

$$A = PDP^{-1}, \qquad P = \begin{pmatrix} a-d+\sqrt{\Delta} & a-d-\sqrt{\Delta} \\ 2c & 2c \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} \frac{a+d+\sqrt{\Delta}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d-\sqrt{\Delta}}{2} \end{pmatrix},$$

Remarque : la matrice P contient les vecteurs propres en colonne, et ils sont définis à la multiplication près par un nombre.

Cas particulier : Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \bar{b} & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} |b| & -|b| \\ \bar{b} & \bar{b} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} |b| & 0 \\ 0 & -|b| \end{pmatrix}$$

A.2.3 Relations de commutation

On a :

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$[\hat{q}, F(\hat{p})] = i\hbar \frac{dF(\hat{p})}{d\hat{p}}$$

$$[F(\hat{q}), \hat{p}] = i\hbar \frac{dF(\hat{p})}{d\hat{q}}$$

preuve : Voir [CBF]p 172.

1. Avec le logiciel gratuit **xcas** de calcul formel (pour l'obtenir, taper **xcas** dans google). Et dans xcas, écrire : `A:=[[a,b],[c,d]]; D:=egvl(A); P:=egv(A);` On vérifira que `simplify(P*D*inv(P));` redonne bien la matrice `A` .

Si les opérateurs A, B vérifient :

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$$

alors on a la **formule de Glauber**

$$\exp(A)\exp(B) = \exp([A, B]/2)\exp(A + B) \tag{A.2.1}$$

preuve : Voir [CBF]p 174, ou TD.

Autre preuve : poser $C = i[A, B]$; Alors les trois opérateurs (A, B, C) vérifient l'algèbre de Weyl-Heisenberg (comme $\hat{q}, \hat{p}, i\hbar$) :

$$C = [A, B], \quad [A, C] = [B, C] = 0$$

Considérons les matrices :

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui vérifient aussi la même algèbre. On procède comme dans la section 2.2.6.4, on vérifie sur les matrices 3×3 que $e^a e^b = e^{c/2} e^{a+b}$ $\square$.

A.2.4 Algèbre des matrices de Pauli

On a

$$\left(\vec{\sigma}.\vec{A}\right)\left(\vec{\sigma}.\vec{B}\right) = \vec{A}.\vec{B} + i\vec{\sigma}.\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) \tag{A.2.2}$$

valable même si $\vec{A}, \vec{B}$ sont des opérateurs.

Si $\vec{u}$ vecteur unitaire :

$$\exp(i\varphi\vec{\sigma}.\vec{u}) = \cos\varphi + i\sin\varphi\,\vec{\sigma}.\vec{u}$$

A.2.5 Relations sur les matrices

Pour une matrice A (ou un opérateur à Trace) on a :

$$\det\left(e^A\right) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$$

A.2.6 Inverse d'une matrice 2×2

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Det}(A) = ad - bc \neq 0$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

A.2.7 Relations de commutations

Pour 3 opérateurs A, B, C on a

$$[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B$$

Démonstration. On écrit :

$$\begin{aligned}[AB, C] &= ABC - CAB = A\,([B, C] + CB) - CAB \\ &= A\,[B, C] + [A, C]\,B\end{aligned}$$

□

A.3 Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^3$

références : Jackson [Jac75], début et fin.
Ici $f(\vec{x})$ représente une fonction. $\vec{V}(\vec{x})$ représente un champ de vecteurs.

A.3.1 Rappels sur le calcul différentiel vectoriel.

Voir Feynmann "Electromagnétisme", chap 2.

- Pour un champ scalaire $V(x, y, z)$, le champ vectoriel $\vec{W} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}V$ a pour coordonnées : $W_x = \frac{\partial V}{\partial x}, W_y = \frac{\partial V}{\partial y}, W_z = \frac{\partial V}{\partial z}$. On écrit aussi : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}V = \vec{\nabla}V$.
- Si $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ sont les coordonnées du champ vectoriel $\vec{E}(\vec{x})$, alors le champ $\vec{W} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}$ a pour coordonnées :

$$\begin{aligned}W_x &= \tfrac{\partial E_z}{\partial y} - \tfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ W_y &= \tfrac{\partial E_x}{\partial z} - \tfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ W_z &= \tfrac{\partial E_y}{\partial x} - \tfrac{\partial E_x}{\partial y}\end{aligned}$$

  on s'en rappelle en écrivant : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ avec "l'opérateur vectoriel" $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.
- Et

$$\mathrm{div}\vec{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

  qui se retient en écrivant $\mathrm{div}\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{E}$.
- Le **Laplacien** ΔV est le champ scalaire :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Propriétés importantes :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}V\right) = \vec{0}$$
$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\right) = 0$$
$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}V) = \Delta V$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}(\vec{a})) - \Delta\vec{a}$$

Formules de Stokes

- Si γ est un chemin dont a, b sont les extrémités, alors

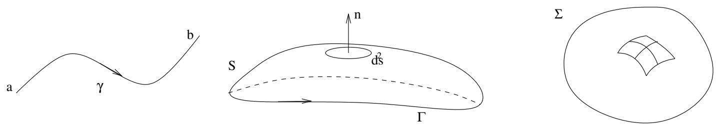
$$\int_\gamma \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)\,.d\vec{l} = f(b) - f(a)$$

- Si S est une surface dontγ est le contour, alors

$$\int_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{V}\right).\vec{n}\,d^2s = \int_\Gamma \vec{V}\,d\vec{l}$$

- Si V est un volume dont le bord est la surface $S = \partial V$, alors

$$\int_V \mathrm{div}(\vec{V})\,d^3v = \int_{\Sigma=\partial V} \vec{V}.\vec{n}\,d^2s$$



Lemme de Poincaré : Réciproquement les formules suivantes

$$\begin{aligned}
\vec{\mathrm{grad}}\,f = 0 &\;\Rightarrow\; f = cste\\
\vec{\mathrm{rot}}\vec{u} = 0 &\;\Rightarrow\; \exists f,\ \mathrm{tq}\,\vec{u} = \vec{\mathrm{grad}}f\\
\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 &\;\Rightarrow\; \exists\vec{u},\ \mathrm{tq}\,\vec{v} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{u}
\end{aligned}$$

ne sont pas toujours vraies. Elles sont vraies sur un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace qui est une boule (contractible en un point), ne contenant donc pas de trous.

A.3.2 En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = (\partial_r f)\,\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r}\partial_\theta f\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\varphi f\right)\vec{e}_\varphi \tag{A.3.1}$$

A.3.3 Relations

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \vec{a}\left(\mathrm{div}\,\vec{b}\right) - \vec{b}\,(\mathrm{div}\,\vec{a}) + \left(\vec{b}.\overrightarrow{\nabla}\right)\vec{a} - \left(\vec{a}.\overrightarrow{\nabla}\right)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{a}).\vec{b} - \vec{a}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{b}) \tag{A.3.2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(f.\vec{V}\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \wedge \vec{V} + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) \tag{A.3.3}$$

$$\mathrm{div}\,(f\,\vec{a}) = \mathrm{grad}\,(f)\,.\vec{a} + f.\mathrm{div}(\vec{a}) \tag{A.3.4}$$

$$\mathrm{div}(\vec{e}_r) = \frac{2}{r}$$

$$\left(\vec{a}.\overrightarrow{\nabla}\right)\vec{e}_r = \frac{1}{r}\left(\vec{a} - (\vec{a}.\vec{e}_r)\,\vec{e}_r\right) \equiv \frac{\vec{a}_\perp}{r}$$