Université Joseph Fourier. Master 1 Physique.
TD de mécanique quantique, Frédéric Faure.

TD n°6
Plusieurs particules

1 Etats quantiques Fermions et bosons (ex. de cours)

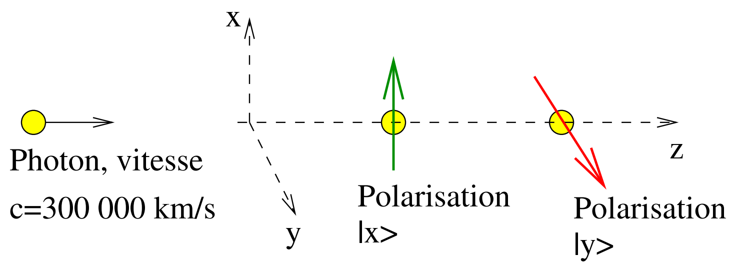
On considère un électron de fonction d'onde spatiale notée $\varphi_1(\vec{x})$, et d'état de spin $|S_1\rangle$. L'état quantique total de cet électron est noté $|\psi_1\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |S_1\rangle \in \left(L^2\left(\mathbb{R}^3\right) \otimes \mathbb{C}^2\right)$. Un deuxième état possible est noté $|\psi_2\rangle = |\varphi_2\rangle \otimes |S_2\rangle$. On considère maintenant deux électrons qui sont dans les états $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$. On rappelle que l'état total des deux électrons (qui sont des fermions) est alors l'état antisymétrique :

$$|\psi_1\rangle \wedge |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle - |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle\right)$$

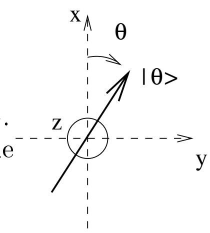
1. Supposons que les deux électrons aient le même état de spin $|S_1\rangle = |S_2\rangle = |S\rangle$. Ecrire l'état total, et en particulier sa partie spatiale $\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ en fonction de $\varphi_1(\vec{x}_1)$ et $\varphi_2(\vec{x}_2)$. Donner un exemple de cette situation, en particulier dans le ferromagnétisme.
2. Supposons que les deux électrons soient dans le même état spatial $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ (même orbitale). Ecrire l'état total, et en particulier sa partie spin. Donner un exemple de cette situation.
3. Même questions pour deux bosons.

2 Paradoxe avec plusieurs particules : inégalité de Bell et non localité de la mécanique quantique

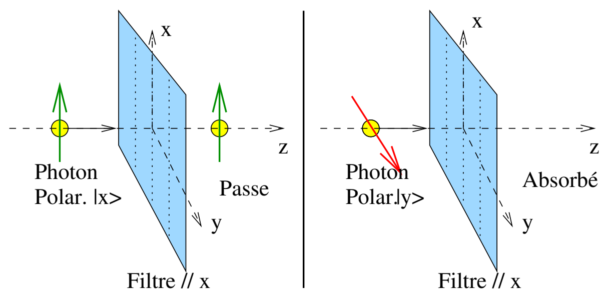
Considérons un photon se déplaçant selon z. Il a deux états quantiques de polarisations $|x\rangle, |y\rangle$, correspondant aux axes x, y et formant une base orthonormée de l'espace quantique de polarisation.



1. Donner l'expression générale d'un état quantique quelconque de polarisation noté $|P\rangle$. Donner en particulier l'expression de l'état de polarisation rectiligne $|\theta\rangle$, faisant un angle θ avec l'axe x, dans le plan (x, y).



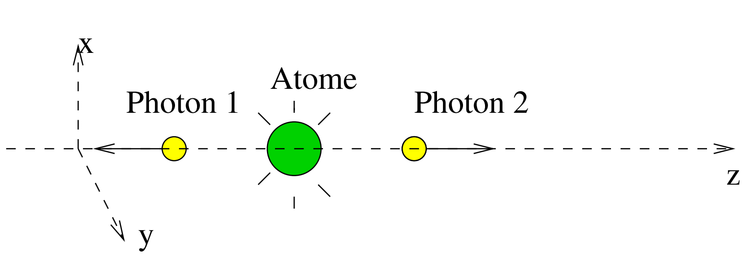
2. Un filtre polarisant orienté selon l'axe x agit comme un appareil de mesure parfait : il laisse passer un photon dans l'état $|x\rangle$ avec probabilité 1, et absorbe un photon dans l'état $|y\rangle$ avec probabilité 1. D'après le postulat de la mesure, quelle est l'action de ce filtre sur un photon dans l'état général $|P\rangle$? (Préciser en particulier l'état du photon après la mesure.) Préciser votre résultat pour le cas d'un photon dans l'état $|\theta\rangle$?

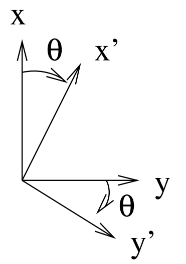


3. Comment préparer un photon dans l'état $|\theta\rangle$ (avec θ arbitraire) à l'aide d'un filtre et d'un faisceau de photons non polarisé (c'est à dire mélange statistique équiprobable des deux états de polarisation), ?
4. Un faisceau lumineux non polarisé d'intensité I_0 traverse deux filtres faisant un angle θ entre eux. Quelle est l'intensité I_1 à la sortie ?
5. Pour un filtre orienté selon x, on code $A_x = 1$ si le photon est passé et $A_x = -1$ s'il est absorbé. On note $\langle A\rangle$ la valeur moyenne, c'est-à-dire :
$$\langle A\rangle = (+1) \times \text{Proba.(passe)} + (-1) \times \text{Proba.(absorbé)}$$
On définit l'observable $\hat{A}$ associée à cette mesure par $\hat{A}|x\rangle = (+1)|x\rangle$ et $\hat{A}|y\rangle = (-1)|y\rangle$. Pour un état de polarisation $|P\rangle$ général, exprimer $\langle A\rangle$ à partir de $|P\rangle$ et $\hat{A}$ (justifier).

6. On considère un dispositif expérimental, où un atome se désexcite et émet deux photons (1 et 2) décrits par l'état total (enchevétré) :

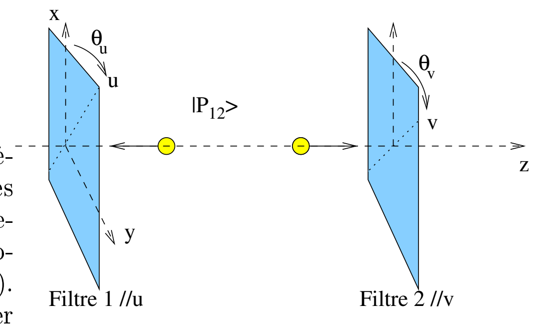
$$|P_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_1\rangle|y_2\rangle - |y_1\rangle|x_2\rangle\right)$$



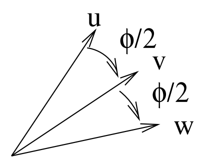


Exprimer le même état $|P_{12}\rangle$ par rapport à une autre base $|x'\rangle, |y'\rangle$ correspondant à un autre système d'axe (x', y') faisant un angle θ avec (x, y) ?

7. On effectue une mesure de polarisation sur chaque photon séparément, avec des filtres orientés respectivement selon les axes u, v faisant un angle θ_u, θ_v avec l'axe x. Le résultat de la mesure sur le photon 1 est noté A_u ($A_u = \pm 1$) et celui sur le photon 2 est noté B_v. Montrer que $\langle A_u B_v\rangle = -\cos\left(2\left(\theta_v - \theta_u\right)\right)$. (Aide : remplacer $\theta_u \to 0$ et $\theta_v \to \theta = \theta_v - \theta_u$. Utiliser $\hat{B} \equiv \hat{R}(\theta)\,\hat{A}\hat{R}(-\theta)$.)



8. Si l'on choisit ces angles parmi u, v, w décalés de $\phi/2$ comme sur la figure, on note



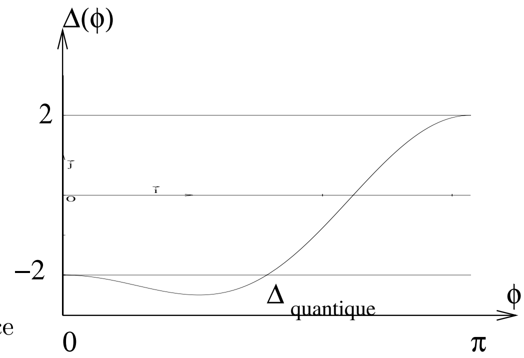
$$\Delta(\phi) = \langle A_u B_v\rangle - \langle A_u B_w\rangle + \langle A_v B_v\rangle + \langle A_v B_w\rangle$$

qui se mesure expérimentalement avec plusieurs mesures successives.

Montrer que d'après la mécanique quantique

$$\Delta_{quantique}(\phi) = \cos 2\phi - 2\cos\phi - 1$$

dont l'allure est donnée sur la figure. Préciser la valeur du minimum.
L'expérience (faite en 1976 par A. Aspect et al.) est en accord avec ce résultat.



9. Pour une théorie locale à variables cachées, le résultat de la mesure d'une observable O est aléatoire et en moyenne on l'exprime par $\langle O\rangle = \int O d\mu$ où μ est une mesure de probabilité.
On notera $A = A_u$, $A' = A_v$, $B = B_v$, $B' = B_w$ et

$$\Delta_{loc}(A, A'; B, B') = \langle AB\rangle - \langle AB'\rangle + \langle A'B\rangle + \langle A'B'\rangle$$

Dans ces notations où a été supposée la localité de la théorie ?
En utilisant $|A|, |A'|, |B|, |B'| = 1$, montrer l'**inégalité de Bell (1965)** $|\Delta_{loc}| \leq 2$. (Aide : commencer par $|\Delta_{loc}| \leq |\langle AB\rangle - \langle AB'\rangle| + |\langle A'B\rangle + \langle A'B'\rangle|$)
Conclusion sur la non localité de la mécanique quantique ?

10. En suivant une démarche analogue au calcul de la question (9), montrer que en mécanique quantique, quelque soit l'état $|P_{12}\rangle$ on a $|\Delta_{quantique}(\phi)| \leq 2\sqrt{2}$.

Référence : Stamatescu p.305, dans ***"Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory"****, Springer-Verlag 1996.*