

TD n°4  
*Particule chargée dans un champ magnétique*

---

Références : [1]  $H_{III}$ ,  $E_{VI}$  et *appendice III*.

## 1 Hamiltonien d'une particule chargée (ex. de cours)

Réf : [2], chap.3

1. En électromagnétisme, rappeler l'expression de  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  à partir des potentiels  $\vec{A}$ ,  $U$ .
2. Montrer que les équations de Hamilton classique  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$ ,  $\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$  avec le Hamiltonien

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - q\vec{A}(\vec{x}, t) \right)^2 + qU(\vec{x}, t)$$

sont équivalentes à l'équation de Newton avec la force de Lorentz :

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}_{Lorentz} = q \left( \vec{E} + \frac{d\vec{x}}{dt} \wedge \vec{B} \right)$$

## 2 L'effet Aharonov-Bohm (1959)

Dans le dispositif expérimental décrit par la figure (1), un faisceau cohérent d'électrons part de  $x_0$ , puis est séparé en deux chemins  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , et se recombine dans la région d'interférences où un détecteur est placé. L'onde quantique des électrons n'est présente que sur la zone en gris. Cela est similaire à l'expérience des doubles fentes de Young en optique. Le disque hachuré entouré par les faisceaux contient un champ magnétique  $\vec{B}$  perpendiculaire à la figure. Le champ  $\vec{B}$  est nul ailleurs, en particulier sur le trajet des faisceaux (zone grise). On note  $\phi = \int_{disque} \vec{B} \cdot d^2 \vec{s}$  le flux magnétique.

1. Montrer<sup>1</sup> que  $\left( \int_{\gamma_1} \vec{A} \cdot d\vec{l} - \int_{\gamma_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} \right) = \phi$ . Dédurre que  $\vec{A}$  est forcément non nul sur le trajet des électrons (bien que  $\vec{B} = 0$ ). Utilisant les coordonnées polaires avec l'origine

---

1. **Rappel de calcul différentiel** : on a les **formules de Stokes** suivantes.

– Si  $\gamma$  est un chemin d'extrémité  $a, b$  et  $f$  une fonction alors  $\int_{\gamma} \text{grad}(f) \cdot d\vec{l} = f(b) - f(a)$ .

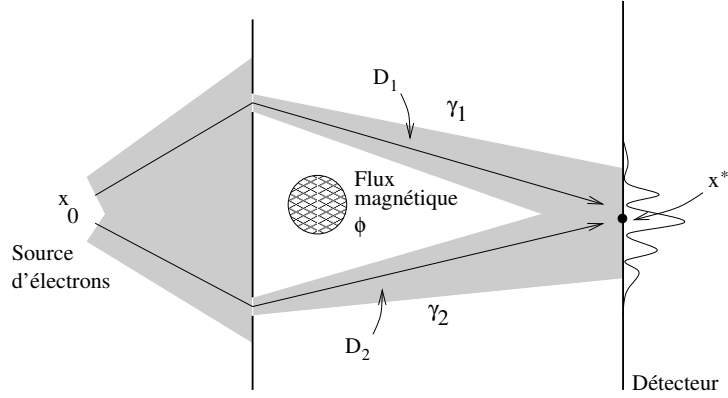


FIGURE 1 –

sur le flux magnétique, montrer que  $\vec{A} = \frac{\phi}{2\pi r} \vec{u}_\theta$  est une expression possible pour le potentiel vecteur dans la région où  $B = 0$  (externe au tube de flux).

2. Sur la figure 1, on note  $\mathcal{D}_1$  le domaine en gris qui entoure le chemin  $\gamma_1$  supérieur où  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = 0$ . D'après le Lemme de Poincaré il existe une fonction  $\chi$  sur  $\mathcal{D}_1$  telle que  $\vec{A} = \text{grad} \chi$ . On suppose  $\chi(x_0) = 0$  pour simplifier. On a donc  $\chi(x) = \int_{x_0}^x \vec{A}(x') \cdot d\vec{l}$  où l'intégrale ne dépend pas du chemin reliant  $x_0$  à  $x$ . On considère l'équation de Schrödinger suivante qui décrit l'onde stationnaire de l'électron sur le trajet  $\gamma_1$  (le potentiel  $V$  est ici présent pour modéliser les forces qui dévient le faisceau) :

$$\frac{1}{2m} \left( \vec{p} - e\vec{A} \right)^2 \psi_1 + V\psi_1 = E\psi_1 \quad (1)$$

En posant

$$\psi_1(x) = \exp\left(\frac{ie\chi(x)}{\hbar}\right) \psi_0(x) = \exp\left[\frac{ie}{\hbar} \int_{x_0}^x \vec{A}(x') \cdot d\vec{l}\right] \psi_0(x), \quad x \in \mathcal{D}_1$$

- 
- Si  $S$  est une surface dont le bord est une courbe  $\gamma$  et  $\vec{u}$  un champ de vecteur alors  $\int_S \vec{\text{rot}}(\vec{u}) \cdot d^2\vec{s} = \int_{\gamma=\partial S} \vec{u} \cdot d\vec{l}$ .
  - Si  $V$  est un volume dont le bord est la surface  $S$  et  $\vec{v}$  un champ de vecteur alors  $\int_V \text{div}(\vec{v}) \cdot d^3x = \int_{S=\partial V} \vec{v} \cdot d^2\vec{s}$ .
  - On a aussi  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}}(f)) = 0$  et  $\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{u})) = 0$ .
  - Réciproquement les formules suivantes (**Lemme de Poincaré**)

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} f = 0 &\Rightarrow f = \text{cste} \\ \vec{\text{rot}} \vec{u} = 0 &\Rightarrow \exists f, \text{ tq } \vec{u} = \vec{\text{grad}} f \\ \text{div } \vec{v} = 0 &\Rightarrow \exists \vec{u}, \text{ tq } \vec{v} = \vec{\text{rot}} \vec{u} \end{aligned}$$

ne sont pas toujours vraies. Elles sont vraies sur un domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace qui est une boule (contractible en un point), ne contenant donc pas de trous.

montrer que l'on obtient l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\frac{1}{2m} (\vec{p})^2 \psi_0 + V\psi_0 = E\psi_0$$

(i.e. sans potentiel vecteur  $\vec{A}$ ). Aide : on montrera au préalable que

$$(\vec{p} - e\vec{A}) \left( \exp \left( ie \frac{\chi(x)}{\hbar} \right) \varphi \right) = \exp \left( ie \frac{\chi(x)}{\hbar} \right) (\vec{p}\varphi)$$

pour toute fonction  $\varphi$ .

3. On note de même  $\psi_2(x)$  l'amplitude de la fonction d'onde sur le chemin  $\gamma_2$  dans le domaine  $\mathcal{D}_2$ , et on suppose  $\psi_2(x_0) = \psi_1(x_0) = \psi_0(x_0)$  au point  $x_0$ . L'amplitude de l'onde au point  $x^*$  de l'écran est alors donnée par  $\psi_1(x^*) + \psi_2(x^*)$ . De ce qui précède, déduire la densité de probabilité de présence  $I = |\psi_1(x^*) + \psi_2(x^*)|^2$  de l'électron en ce point  $x^*$  en fonction du flux  $\phi$ ? Conclusion? (Comparer le cas classique et quantique)
4. Ce phénomène d'interférences est observé dans des structures semi-conducteurs. Il permet de détecter des changements de champs magnétique très faibles. Supposons que la surface entourée par les chemins soit de  $S = 20\mu m \times 20\mu m$ . Calculer la variation de champ magnétique  $\Delta B$  que l'on peut détecter à travers ce dispositif interférométrique. (comparer au champ magnétique terrestre de  $40\mu T$ ).

### 3 Niveaux de Landau

On considère des électrons libres, confinés dans un plan  $(x, y)$  (entre deux couches de semi-conducteurs). On impose un fort champ magnétique transverse, constant et uniforme  $\vec{B} = B \vec{e}_z$ ,  $B = 0.21 \text{ Tesla}$ . On suppose les électrons indépendants.

1. Montrer que  $\vec{A} = (A_x = -\frac{1}{2}By, A_y = \frac{1}{2}Bx, A_z = 0)$  est une expression possible pour le potentiel vecteur. Écrire le Hamiltonien  $\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\vec{p}} - e\vec{A})^2$  décrivant la dynamique d'un électron, à partir des opérateurs  $(\hat{x}, \hat{p}_x, \hat{y}, \hat{p}_y)$ , sans développer.
2. On propose d'effectuer le changement de variables suivant  $(\hat{x}, \hat{p}_x, \hat{y}, \hat{p}_y) \rightarrow (\hat{Q}, \hat{P}, \hat{q}, \hat{p})$  :

$$\begin{cases} Q = \frac{1}{\sqrt{\hbar e B}} (p_x + \frac{eB}{2}y) \\ P = \frac{1}{\sqrt{\hbar e B}} (p_y - \frac{eB}{2}x) \end{cases} \quad \begin{cases} q = \frac{1}{eBX} (p_x - \frac{eB}{2}y) \\ p = -\frac{1}{eBX} (p_y + \frac{eB}{2}x) \end{cases} ,$$

Quelles sont les unités physiques de  $(\hat{Q}, \hat{P}, \hat{q}, \hat{p})$ ? Calculer les commutateurs des opérateurs  $(\hat{Q}, \hat{P}, \hat{q}, \hat{p})$  deux à deux, pour vérifier que ce sont bien des variables canoniques? On introduira une "constante de Planck effective"

$$\hbar_{eff} = \frac{\hbar}{eBX^2}$$

Exprimer  $\hbar_{eff}$  à partir du flux  $\phi = BX^2$  de  $B$  à travers la surface élémentaire  $X^2$  et du “**quantum de flux**” ou **fluxon**  $\phi_0 = h/e$ ?

3. En introduisant la fréquence cyclotron  $\omega = eB/m$ , donner l’expression de  $\hat{H}$  en fonction des nouveaux opérateurs  $(\hat{Q}, \hat{P}, \hat{q}, \hat{p})$ ,  $(\hbar\omega)$ ,  $X$  et  $\hbar_{eff}$ ?
4. Donner l’expression des niveaux d’énergie  $E_n$  de  $\hat{H}$ , appelés **niveaux de Landau**, et donner leur multiplicité. Interprétation?

## Références

- [1] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Mécanique quantique*.
- [2] F. Faure. *Cours de Mécanique quantique pour Master M1 de physique*. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement>.