Objet glissant sur la table

(1) En coordonnées polaire,

$$|V_1|^2 = V_r^2 + (r V_\theta)^2 \quad : \text{vitesse}^2 \text{ de } (1)$$

La vitesse^2 de (2) est $V_2^2 = \left(\frac{d}{dt}(\ell - r)\right)^2 = \dot{r}^2 = V_r^2$

donc

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) V_r^2 + \frac{1}{2} m_1 r^2 V_\theta^2$$

L'énergie potentielle de pesanteur est :

$$U = m_2 g z, \qquad \text{avec } z = -(\ell - r)$$

$$U = m_2 g (r - \underset{\text{cste}}{\ell}) \quad \text{ou} \quad U(r) = m_2 g r$$

de sorte que $U(0) = 0$

(2) Lagrangien :

$$L(r, \theta, V_r, V_\theta) = E_c - U$$

impulsions

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial V_r} = (m_1 + m_2) V_r \quad \Longleftrightarrow \quad V_r = \frac{1}{m_1 + m_2} p_r$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial V_\theta} = m_1 r^2 V_\theta \quad \Longleftrightarrow \quad V_\theta = \frac{1}{m_1 r^2} p_\theta$$

Hamiltonien

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = p_r \cdot V_r + p_\theta \cdot V_\theta - L$$

$$= \frac{1}{m_1 + m_2} p_r^2 + \frac{1}{m_1 r^2} p_\theta^2 - \frac{1}{2}\frac{(m_1 + m_2) p_r^2}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{m_1 r^2}{2(m_1 r^2)^2} p_\theta^2 + ($$

$$H(r,\theta,p_r,p_\theta) = \frac{1}{2(m_1+m_2)} p_r^2 + \frac{1}{2m_1 r^2} p_\theta^2 + \underbrace{m_2 g r}_{U(r)}$$

(3)
$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{1}{(m_1+m_2)} p_r$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{m_1 r^2} p_\theta$$

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r} = +\frac{1}{m_1 r^3} p_\theta^2 - m_2 g$$

$$\frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

(4)
$$\frac{dp_\theta}{dt} = 0 \longrightarrow p_\theta = \mathcal{L} = \text{cste},$$

et $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{m_1 r^2(t)} \mathcal{L}$

donc $\mathcal{L} = m_1 r^2(0) \cdot \dfrac{d\theta}{dt}(0)$: moment angulaire

(5)
$$H(r,p_r) = \frac{1}{2(m_1+m_2)} p_r^2 + \frac{1}{2m_1 r^2} \mathcal{L}^2 + \underbrace{m_2 g r}_{U(r)}$$

$$= \frac{p_r^2}{2M} + V(r)$$

avec
$$\begin{cases} M = m_1 + m_2 \\ V(r) = \dfrac{\mathcal{L}^2}{2m_1 r^2} + m_2 g r \end{cases}$$

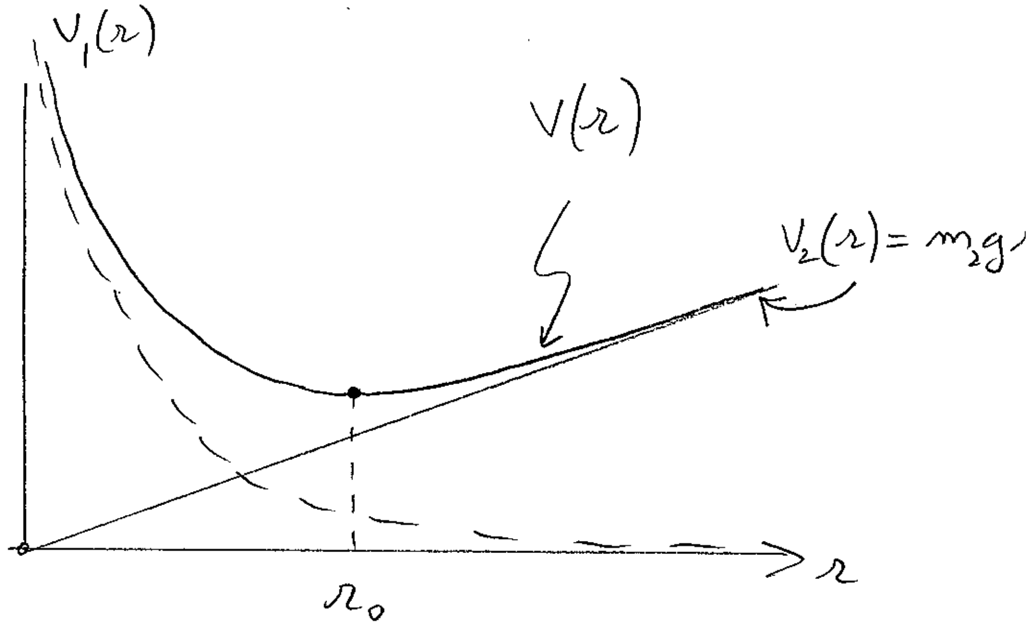
(6) $V_1(r) = \dfrac{\mathcal{L}^2}{2 m_1 r^2}$: "énergie potentielle centrifuge"
car $\mathcal{L}$ est le moment angulaire

$$F_1 = -\frac{dV_1}{dr} = \frac{\mathcal{L}^2}{m_1 r} > 0$$: force positive, vers $r \uparrow$ "répulsive"

$V_2(r) = U(r) = m_2 g r$: "énergie potentielle de pesanteur"

$$F_2 = -\frac{dV_2}{dr} = -m_2 g < 0$$: force négative vers $r \downarrow$ "attractive".

· si $\mathcal{L} \neq 0$:



(7) Recherche du minimum :

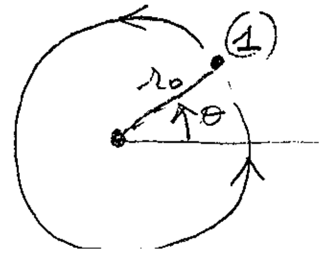
$$0 = \frac{dV(r)}{dr} = -\frac{\mathcal{L}^2}{m_1 r_0} + m_2 g \iff r_0 = \frac{\mathcal{L}^2}{m_1 m_2 g}$$

L'énergie totale E est conservée.

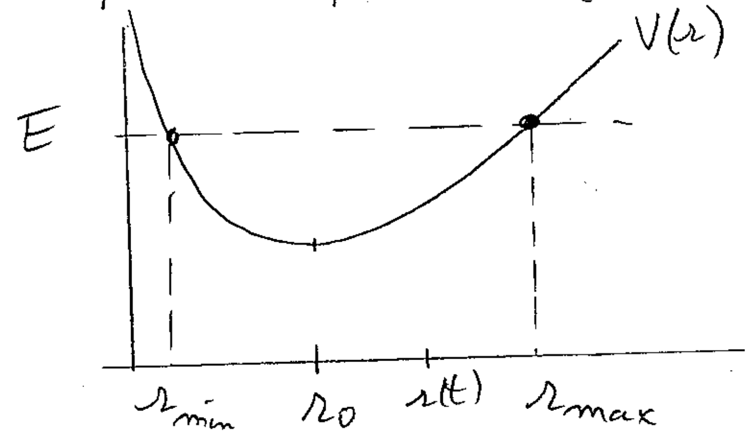
a) Si $E = V(r_0)$, alors $r(t) = r_0$: position d'équilibre stable.

et d'après (3), $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{m_1 r_0^2} \mathcal{L}$ = cste : mouvement

→ mouvement circulaire
à vitesse angulaire ω constante.



b) si énergie $E > V(r_0)$ alors $r(t)$ oscille dans le puits de potentiel (mouvement à 1 dimension)



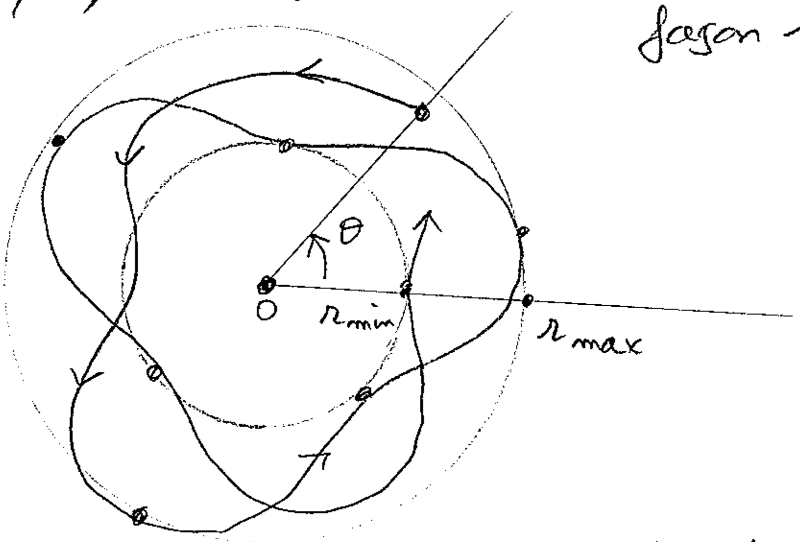
entre :

$$r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}$$

$\omega(t) = \dfrac{d\theta}{dt}(t) = \dfrac{1}{m_1 r^2(t)} \mathcal{L}$ d'après (3) varie aussi

mais ne change pas de signe (sauf $\mathcal{L} = 0 \Longrightarrow \omega = 0$)

Donc si $\mathcal{L} \neq 0$, l'objet (1) tourne sur le plan de la façon suivante.



La trajectoire ne se referme pas (sauf condition exceptionnelle).

Lagrangien d'une particule chargée

$$H = P\cdot V - L \iff L = P\cdot V - H$$

avec $V = \dfrac{\partial H}{\partial P}$: équ. de mvt de Hamilton.

Cela donne pour $H(X,P,t) = \dfrac{1}{2m}\left(P - qA(X,t)\right)^2 + qU(X,t)$

$$V = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{1}{m}\left(P - qA(X,t)\right)$$

$$\iff P = mV + qA(X,t),$$

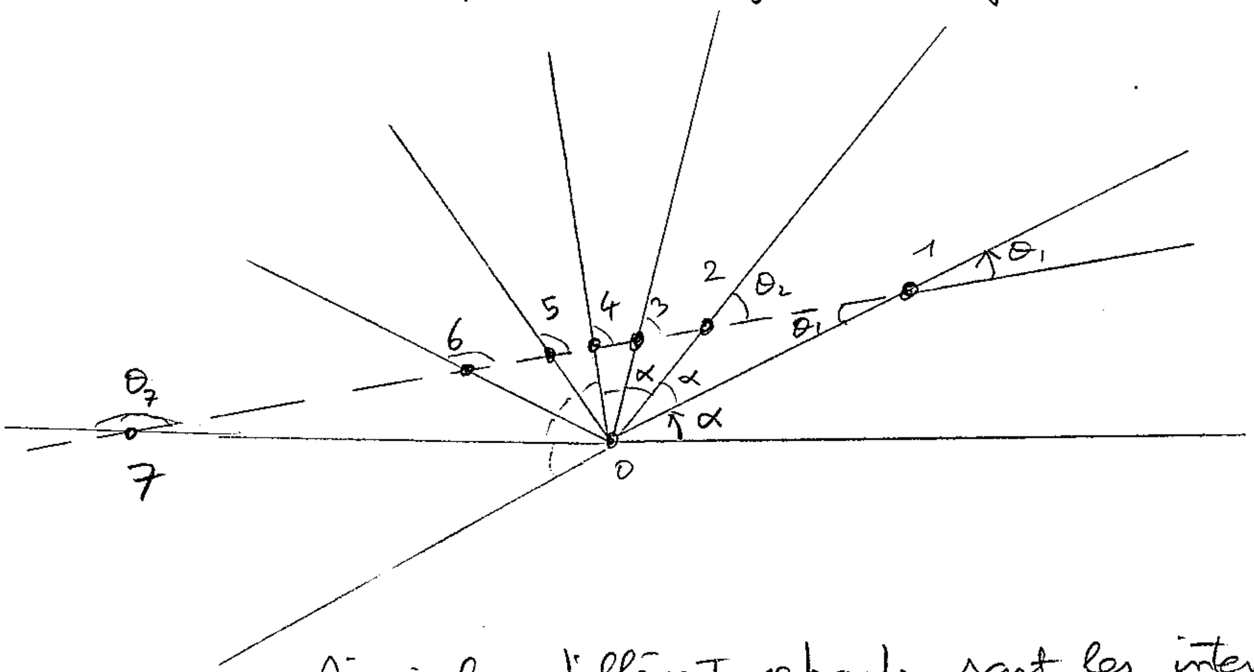
et $L(X,V,t) = P\cdot V - H$

$$= mV^2 + qA\cdot V - \frac{1}{2m}(mV)^2 + qU$$

$$L(X,V,t) = \frac{1}{2}mV^2 + qA(X,t)\cdot V + qU(X,t)$$

Bille dans un angle

(1) on considère la trajectoire en ligne droite, et on recopie les images de l'angle α :



Ainsi les différents rebonds n sont les intersection de cette droite avec les rayons posées aux angles $(n\alpha)$.

dans le triangle $(0-1-2)$ on déduit :

$$\theta_1 + (\pi - \theta_2) + \alpha = \pi$$

$$\longrightarrow \theta_2 = \theta_1 + \alpha$$

$$\text{et } \theta_n = \theta_{n-1} + \alpha = \theta_1 + (n-1)\,\alpha$$

(2) Le dernier rebond N est la plus grande valeur de n telle que $\theta_n < \pi$ donc

$$\theta_1 + (N-1)\alpha < \pi \longrightarrow N < 1 + \left(\frac{\pi - \theta_1}{\alpha}\right)$$

ainsi $$N = 1 + \underbrace{\left[\frac{\pi - \theta_1}{\alpha}\right]}_{\text{partie entière}}$$

(3) si $\theta_1 = 10°$, $\alpha = 30°$, alors $N = 1 + \left[\frac{180-10}{30}\right] = 1 + \left[\frac{17}{3}\right] = 1 + 5 = 6$